UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA SEMIÓTICA

Marcelo Henrique Tomacheusk da Rosa

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

PRPGEM

Cidade,

2021

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA SEMIÓTICA

Marcelo Henrique Tomacheusk da Rosa

Orientadora:
Dra. Michele Regiane Dias Veronez

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em educação matemática como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Outubro de 2022

Rosa, Marcelo Henrique Tomacheusk da
Aspectos da modelagem matemática à luz da semiótica / Marcelo Henrique Tomacheusk da Rosa. -- Campo Mourão-PR,2022.
101 f.: il.

Orientador: Michele Regiane Dias Veronez.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2022.

1. Matemática-estudo e ensino. 2. Didática - Matemática. 3. Triângulos. I - Veronez, Michele Regiane Dias (orient). II - Título.

Marcelo Henrique Tomacheusk da Rosa

ASPECTOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA SEMIÓTICA

Comissão Examinadora:

Dra. Michele Regiane Dias Veronez
UNESPAR

Dr. Amauri Jersi Ceolim
UNESPAR

Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL

Resultado: Aprovado

Campo Mourão
Outubro de 2022

Dedico o presente trabalho a Gih Sassá, amor de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, ternamente,

...à atenção, carinho e companheirismo de Gisele Marques Sassá, minha namorada, esposa, amiga e parceira de aventuras.

...ao profissionalismo, paciência e saberes de minha caríssima orientadora, Dra. Michele Regiane Dias Veronez.

...à solicitude e generosidade dos professores componentes da banca, Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida e Dr. Amauri Jersi Ceolim, por disponibilizarem seu tempo e conhecimento para comigo.

...à toda a equipe de professores e profissionais envolvidos com o Programa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UNESPAR – PRPGEM.

RESUMO

O presente texto, no formato *multipaper*, dispõe sobre o desenvolvimento e desfechos de uma pesquisa interessada nos conhecimentos matemáticos e outros acionados e/ou construídos no decorrer de duas atividades de Modelagem Matemática (MM) quando observados sob as lentes das teorias semióticas de Charles S. Peirce e Heinz Steinbring. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é refletir sobre o potencial da Modelagem Matemática na construção de conhecimento dos alunos e como isso é revelado em suas produções sígnicas. Para tanto, os autores optaram por duas vias de análise, descritas na forma de dois artigos. No primeiro, embasado na semiótica peirceana, observaram o que as produções sígnicas dos alunos sugerem, considerados os modos como os objetos matemáticos são expressos por eles ao longo do desenvolvimento de atividades de MM. E no outro, associando as ideias de Heinz Steinbring à semiótica de Charles S. Peirce, procuraram evidenciar as eventuais relações entre os objetos matemáticos suscitados pelos alunos e os signos por eles manifestos ao longo do desenvolvimento de atividade de MM. Em aspecto metodológico, além das teorias mencionadas, consideraram-se os entendimentos de Isaac Epstein, Maria Ogécia Drigo, Lúcia Santaella e Winfried Nöth quanto à semiótica. Os autores concluem, da análise das produções sígnicas dos participantes, pela existência de processos de [res]significação em cada uma das fases das atividades de MM, apontando a MM com uma alternativa para o ensino e aprendizagem de matemática na qual as diferentes situações enfrentadas pelos alunos além de suscitarem conhecimentos matemáticos, proporcionam a construção de conhecimentos outros, em um processo de semiose.

Palavras-chave: Educação matemática; Semiótica peirceana; Semiose; Epistemologia; Triângulos epistemológicos.

ABSTRACT

The present text, in multipaper format, deals with the development and outcomes of a research interested in mathematical knowledge and other triggered and/or constructed in the course of two Mathematical Modeling (MM) activities observed through the lens of Charles S. Peirce and Heinz Steinbring semiotic theories. In this context, this work's purpose is to think about the potential of Mathematical Modeling in the construction of students' knowledge and how this is revealed in their sign productions. For this intent, the authors opted for two analysis routes, described in two articles. In the first text, based on Peircean semiotics, they observed what the students' sign productions suggest, considering the ways in which mathematical objects are expressed by them throughout the development of MM activity. In the second one, associating Heinz Steinbring's ideas with Charles S. Peirce's semiotics, they sought to highlight the possible relationships between the mathematical objects raised by the students and the signs they manifest during the development of MM activity. In a methodological aspect, in addition to the theories mentioned, the understandings of Isaac Epstein, Maria Ogécia Drigo, Lúcia Santaella and Winfried Nöth on semiotics were considered. The authors conclude, from the analysis of the signic productions of the participants, by the existence of processes of [re]signification in each MM activities phases, pointing to the MM as an alternative for the teaching and learning of mathematics in which the different situations faced by the students, besides the mathematical knowledge raised, provide the construction of other knowledges, in a process of semiosis.

Keywords: Mathematics education; Peircean semiotics; Semiosis; Epistemology; Epistemological triangles.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
MM	Modelagem Matemática
NBR	Norma Técnica Brasileira
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sendo a matemática uma disciplina presente nos currículos escolares em todo o mundo (MACHADO, 2001), as pesquisas em Educação Matemática têm, conforme Fiorentini e Lorenzato (2012), entre seus interesses, os processos pedagógicos relativos à transmissão/assimilação e/ou apropriação/construção do saber matemático. Entre as possibilidades oriundas dessas incursões didáticas, existe a denominada Modelagem Matemática (MM), em busca do relacionamento de tópicos ao cotidiano e atualidade dos próprios aprendizes com conceitos da matemática (KLÜBER, 2012).

Almeida e Dias (2004), bem como Almeida e Silva (2014), apontam a MM como uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática, na qual, a partir de problemas, em geral não matemáticos, faz-se uso de conceitos matemáticos para a compreensão e estruturação das eventuais soluções em pauta. Ou seja, em busca de solução a questões oriundas da realidade, suscitam-se tópicos interessantes ao currículo desejado e outros conhecimentos numéricos e/ou algébricos em prol de compreender a problemática, assim como estruturar e desenvolver uma eventual resposta às demandas elencadas.

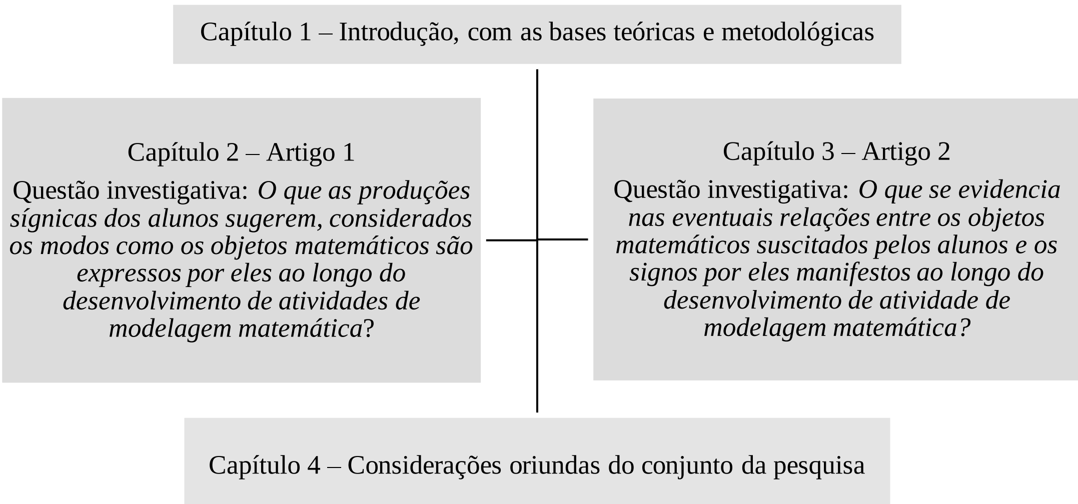
A MM é objeto de estudos vários: Almeida e Dias (2004) com a MM como estratégia de ensino e aprendizagem; Almeida e Silva (2014), em práticas de MM na perspectiva da Educação Matemática; Almeida, Silva e Vertuan (2019) e Veronez (2009) com a MM na educação básica; Bassanezzi (2015) em aspectos teóricos e práticos do ensino-aprendizagem com MM; Meyer, Caldeira e Malheiros (2019) em discussões sobre a MM relacionada a diferentes perspectivas em Educação Matemática; entre outros. Dentre as diversas possibilidades do olhar à MM, uma dela diz respeito às tentativas de interlocução com os processos cognitivos relacionados à MM (KAISER; SRARIMAN, 2006) e a tentativa de acesso a tal propósito pode ser realizada por meio da teoria semiótica, como nas pesquisas de Almeida e Silva (2017), Madruga et al (2016), Ramos e Almeida (2021) e Veronez (2009).

A Semiótica é um vasto terreno da filosofia, com origens na Grécia Antiga e cujo escopo, hoje, é dividido em diversas teorias. Neste trabalho, em particular, o olhar origina-se a partir dos trabalhos de Peirce (1986, 2017, 2020), filósofo e matemático americano. No entanto, sendo ampla sua obra e, em parte, ainda não publicada (mesmo em sua língua nativa), com acesso somente a pesquisadores credenciados, seus conceitos podem ser conhecidos, também, por meio das pesquisas de Epstein (2014), Nöth (1998, 2005) e Santaella (1992, 2012a, 2012b, 2017, 2018, 2020), entre outros. Peirce (1986, 2017, 2020) desenvolveu sua teoria na forma de uma lógica triádica (relacionada a três elementos) de signo, bem como suas relações, implicando em uma ideia de semiose como construção cognitiva (DRIGO, 2007).

Steinbring (2006) traz o signo para a matemática delineando uma relação do signo com o objeto em duas vertentes: uma semiótica, sobre o papel do signo matemático em relação aos objetos ao qual referência; e uma epistemológica, no campo da possibilidade de um signo indicar um domínio de conhecimento sobre o objeto referenciado; dando origem a uma estrutura relacional denominada triângulo epistemológico.

Utilizando-se do arcabouço teórico das semióticas acima, é objetivo desta pesquisa *analisar o potencial da Modelagem Matemática na construção de conhecimento dos alunos revelado em suas produções sígnicas*. Para buscar respostas a tal inquietação, optou-se por organizar o relatório desta pesquisa no formato *multipaper*[1], estruturado na seguinte forma:

Figura 1.1 – Estrutura da pesquisa



Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Em sequência, nesta introdução, há uma base teórica sobre conceitos e teorias a respeito da MM fundamentadora das práticas aqui descritas. Em seções subsequentes, há um recorte da semiótica peirceana e parte do trabalho de Steinbring e de seu triângulo epistemológico, indicando as principais ideias utilizadas nesta pesquisa, bem como um apanhado de trabalhos cujo desenvolvimento ocorreu utilizando-se da bagagem teórica semiótica. Por fim, o capítulo inicial proporciona uma visão geral dos aportes teóricos a basilar o presente estudo.

O capítulo 2 corresponde ao primeiro artigo, o qual, a partir da teoria peirceana, se debruça-se sobre a produção sígnica dos alunos a fim de responder o questionamento: *o que as*

[1] Composto de múltiplos *papers* (artigos científicos).

produções sígnicas dos alunos sugerem, considerados os modos como os objetos matemáticos são expressos por eles ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática? O capítulo em sequência, referente ao segundo artigo, corresponde à pesquisa desenvolvida com os signos identificados na atividade de MM, na tentativa de *evidenciar as eventuais relações entre os objetos matemáticos suscitados pelos alunos e os signos por eles manifestos ao longo do desenvolvimento de atividade de modelagem matemática*, em uma observação por meio das lentes teóricas proporcionadas pelo trabalho de Steinbring.

Por fim, apresenta-se um breve compêndio das conclusões alçadas a partir do conjunto geral do trabalho, ou seja, dos resultados alcançados nos artigos 1 e 2 observados em conjunto e frente ao panorama proporcionado pela teoria adotada.

1.1 Da Modelagem Matemática

Conforme denota D'Ambrósio (1997), a matemática tem sido, ao longo dos tempos, uma estratégia para entender, manejar e conviver com a realidade, funcionando como estímulo aos desenvolvimentos individual e coletivo das culturas, bem como na sua sobrevivência e transcendência. Em uma visão complementar, D'Ambrósio (1997) conclui sobre a interdependência existente entre matemática e educação. Dada essa interdependência, seria necessário pensar em uma Educação Matemática cujos resultados permitissem o uso dos conhecimentos auferidos para solucionar questões advindas de sua prática cotidiana, em suas realidades. Para Blum e Niss (1991), uma Educação Matemática precisa provir os alunos com conhecimentos e habilidades matemáticas em duas dimensões: como disciplina em si e como ferramenta para abordar outros assuntos.

Fiorentini (2009) aponta a variedade de alternativas pedagógicas e correntes metodológicas originadas na pesquisa em Educação Matemática, suportando modos de ver e conceber a matemática em práticas de ensino. É possível apontar, como alternativa, a MM, originada a partir de práticas mais próximas à matemática aplicada no fim da década de 1970, no Brasil, com os trabalhos de Aristides Camargos Barreto (PUC – Rio de Janeiro, década de 1970) e Rodney Bassanezi (Unicamp – Campinas/SP) (ALMEIDA, 2019). Além disso, nessas primeiras incursões aplicadas, destaca-se também o trabalho de Biembengut e Hein (2019).

Os modelos matemáticos são prévios à MM localizada no âmbito educacional. Segundo Bassanezzi (2018), um modelo matemático se constitui em um conjunto de símbolos e relações matemáticas utilizado para representar um objeto em estudo, buscando expressar ideias de forma claras e sem ambiguidades, além de fornecer o acesso a ferramentas outras com fins a descobertas de soluções numéricas. No espaço da Educação Matemática, a MM utiliza-se dos modelos matemáticos, mas em um contexto no qual se utilizam tópicos matemáticos para se "aprender sobre o problema" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2019, p. 15). As possibilidades oriundas de tal intento originam, como apontam Almeida e Vertuan (2014), diferentes formas de trabalho, características e conceitualizações. Algumas dessas visões (divergentes, mas não contraditórias, frise-se), podem ser observadas no Quadro 1.1.

Quadro 1.1 – Algumas caracterizações da Modelagem Matemática

Autor	Concepções
ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2019	"A Modelagem Matemática constitui uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da matemática, um problema não essencialmente matemático." (p. 9)
BASSANEZZI, 2015	"A modelagem [matemática] no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado." (p. 38)
BIEMBENGUT; HEIN, 2019	"O método que utiliza a essência da modelagem [matemática] em cursos regulares, com programa, denominamos modelação matemática. A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem." (p. 18)
MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2019	"[A Modelagem Matemática é] No contexto da Educação Matemática, um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o 'fazer' Matemática em sala de aula, referindo à observação da realidade (do aluno ou do mundo) e, partindo de questionamentos, discussões e investigações, defronta-se com um problema que modifica ações na sala de aula, além da forma como se observa o mundo." (p. 75)
NISS; BLUM; GALBRAITH, 2007	"Modelagem matemática e aplicações na educação, por definição englobam elementos do domínio matemático e educacional. Como resultado, algumas noções comuns no campo têm diferentes matizes de significado daqueles com nomes semelhantes encontrados em outras partes da comunidade educacional. [...] Enquanto o subprocesso que leva de uma situação-problema do mundo real a um modelo matemático às vezes é chamado de modelagem matemática, tornou-se costume usar essa noção também para todo o processo que consiste em estruturar, gerar fatos e dados do mundo real, matematizar, trabalhar matematicamente e interpretar/validando (talvez várias vezes ao redor do loop) [...]"[1] (p. 8, 9-10, tradução nossa)

Fonte: Elaborado pelos autores, 2022.

Das diferentes concepções é possível delinear algumas características comuns, como a intenção de haver algum aprendizado (dado ser uma opção para uma Educação Matemática), a

[1] "Mathematical modelling and applications in education, by definition encompass elements from both the mathematical and educational domains. As a result some common notions in the field have different shades of meaning from those with similar names found elsewhere in the education community. [...] While the sub-process leading from a real world problem situation to a mathematical model is sometimes called mathematical modellings it has become customary to use that notion also for the entire process consisting of structuring, generating real world facts and data, mathematising, working mathematically and interpreting/validating (perhaps several times round the loop) [...]"

existência de um problema a ser modelado e a conexão de tópicos matemáticos às necessidades oriundas da construção desse modelo. Para este trabalho, os autores compartilham da visão de Almeida, Silva e Vertuan (2019) (Quadro 1.1), para quem as relações entre a situação inicial originada na realidade e os conceitos e procedimentos da Matemática servem para o acionamento e/ou produção e integração de conhecimentos, tanto matemáticos, como não matemáticos. Ainda para Almeida e Vertuan (2014, p. 3), “Considerar a modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática implica em utilizar nas aulas situações que desencadeiam investigações matemáticas”.

Se, a MM “[...] consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem natural”, como aponta Bassanezzi (2018, p. 24), como ela é utilizada em um ambiente de aprendizagem para o ensino de matemática? Em geral, desenvolvendo, junto aos alunos, com o professor em um papel de gestor, atividades de MM. Além disso, destacam os elementos constituintes de uma atividade de MM: a “situação-problema”, a “matemática” utilizada nas abordagens ao problema, o “processo investigativo” desenvolvido e, por fim, a “análise interpretativa” dos resultados obtidos.

Antes de delinear essas fases, é necessário compreender a ideia de problema nesse contexto. Blum e Niss (1991), caracterizam um problema como uma situação envolvendo questões desafiadoras intelectualmente para alguém não detentor de métodos, procedimentos ou algoritmos diretos para tal solução, relacionado de maneira direta com as pessoas envolvidas, não representando, talvez, para outras pessoas tal dificuldade. A compreensão de Almeida e Vertuan (2014, p. 3) vai ao encontro dessa visão, pois, para esses, problema é “[...] uma situação a qual o indivíduo não possui esquemas *a priori* para sua resolução e não há procedimentos específicos previamente conhecidos ou soluções já indicadas.”

Ainda no tocante aos problemas, é comum observar as terminologias “mundo real”, “realidade” e correlatos quando da seleção e escolha de situações problemáticas para uma atividade de MM, bem como a expressão “resolução de problemas”. Ainda em Blum e Niss (1991, p. 37-38, grifos dos autores, tradução nossa) é possível esclarecer esses pontos, separando-os em dois tipos:

> É característico de um problema matemático *aplicado* que a situação e as questões que a definem pertençam a algum segmento do mundo real e permitam o envolvimento de alguns conceitos matemáticos, métodos e resultados. Por *mundo real*, queremos dizer o ‘resto do mundo’ fora da matemática, ou seja, disciplinas ou disciplinas escolares ou universitárias diferentes da matemática, ou a vida cotidiana e o mundo ao nosso redor. Em contraste, com um problema de matemática *pura*, a situação definidora está inteiramente embutida em algum universo matemático. Isso

não impede que problemas puros surjam de problemas aplicados, mas assim que eles são retirados do contexto extra matemático gerador, eles não são mais aplicados.[1]

E resolução de problemas, para eles, consiste no processo todo de lidar com o problema na tentativa de resolvê-lo e, em especial, no tocante ao ensino da matemática, relacionando-o aos currículos de matemática.

Nos caminhos trilhados em prol da busca dessa resolução, diferentes fases ou etapas são propostas conforme o(s) autor(es):

- Bassanezi (2015): escolha do tema; coleta de dados; análise de dados e formulação de modelos; validação e, por fim, convergência e estabilidade;
- Biembengut e Hein (2019): exposição do tema, levantamento e seleção de questões, formulação de questão, resolução da questão, modelo e validação;
- Barbosa (2001): formulação do problema (elaboração da situação problema); simplificação; coleta de dados qualitativos e quantitativos e solução.

Figura 1.2 – Fases da Modelagem Matemática

Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2019, p. 15)

Conforme se observa na Figura 1.2, para Almeida, Silva e Vertuan (2019), em uma atividade de MM, de forma inter-relacionada e não obrigatoriamente em segmentos estanques e/ou fixos, denotam-se fases relacionados à “inteiração”, “matematização e resolução” e “interpretação dos resultados e validação” inter-relacionadas entre si, nesta ordem ou não. Para eles, essas fases possuem as seguintes características:

- *Inteiração*: representa o contato inicial com a situação-problema de interesse para estudo, com fins a “inteirar-se” de suas características e particularidades. Para tanto, desdobram-se coletas de dados qualitativos e quantitativos, de forma direta ou não, a partir das necessidades de compreensão necessárias ao

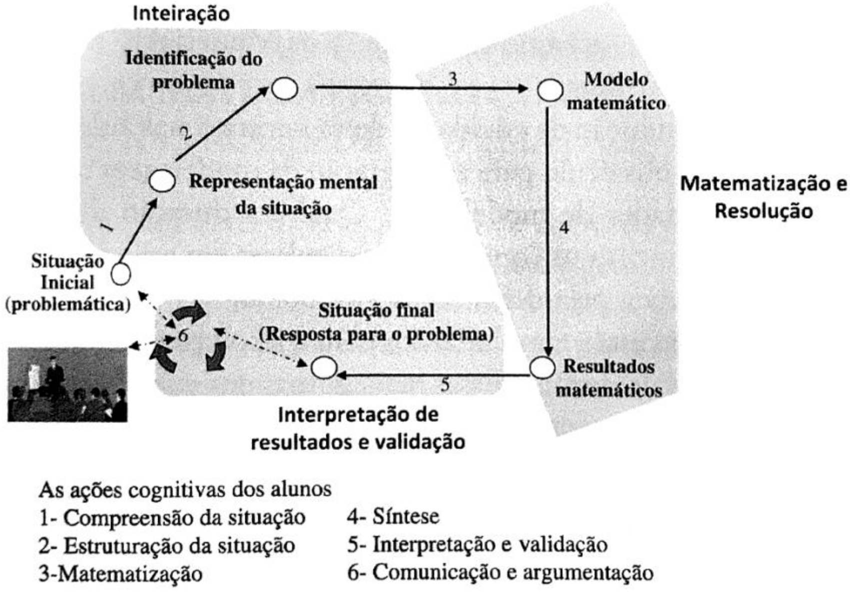
[1] “It is characteristic of an applied mathematical problem that the situation and the questions defining it belong to some segment of the real world and allow some mathematical concepts, methods and results to become involved. By real world we mean the ‘rest of the world’ outside mathematics, i.e. school or university subjects or disciplines different from mathematics, or everyday life and the world around us. In contrast, with a purely mathematical problem the defining situation is entirely embedded in some mathematical universe. This does not prevent pure problems from arising from applied ones, but as soon as they are lifted out of the extramathematical context which generated them they are no longer applied.”

entendimento do cenário inicial. A atividade de MM como um todo propiciará a descoberta de dados relativos à problemática, no entanto, para formular questionamentos, bem como desenvolvê-los, é preciso algum conhecimento introdutório das condições e propriedades. A inteiração não se limita ao início da abordagem, podendo emergir em qualquer ponto da atividade conforme sejam realizadas novas incursões;

- *Matematização*: corresponde à busca e elaboração de uma representação matemática correspondente às relações estabelecidas entre as características do problema e as técnicas e conceitos matemáticos aventados à representação dessas características. Na fase de inteiração, a identificação e estruturação da problemática ocorrem em linguagem natural e, na matematização, acontece o movimento em prol de transformar essa situação em linguagem matemática, utilizando-se de ferramentas, visualização e simbologia matemática;
- *Resolução*: consiste na elaboração de um modelo matemático para descrição e análise da situação, bem como auxílio às tentativas de resposta às questões originadas como problemática;
- *Interpretação de resultados e validação*: provê um espaço para interpretação e validação dos resultados alçados a partir do modelo construído na resolução. Este é um trabalho de todos os envolvidos no desenvolvimento da atividade e dedica seu olhar desde os procedimentos adotados para a resolução até a representação adotada para expressar a solução. Trata-se um instante no qual os alunos podem avaliar o próprio processo de construção de modelos e os contextos no qual são aplicáveis.

Estas fases caracterizam uma atividade de MM na forma expressa na Figura 1.3.

Figura 1.3 – Fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2019, p. 19)

Nas fases mencionadas, é possível perceber (Figura 1.3) as ações cognitivas desempenhadas pelos alunos no decorrer delas. Almeida e Silva (2012) defendem a MM como uma possibilidade para a inserção, em sala de aula, de atividades com potencial para desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínios e ações cognitivas nos alunos. Segundo elas, essas ações acontecem tanto de maneira implícita (nos procedimentos) como de forma explícita, ao desenvolver representações, em geral, simbólicas. Assim, da transição entre essas fases, partindo da situação inicial em caminho a uma situação final, originam-se diversas ações cognitivas, desde uma representação mental da solução, passando por julgamentos de valor das teorias e métodos adotados até a análise e justificação de suas escolhas.

Essas ações, apesar de subjetivas e pessoais, não ocorrem de forma isolada. Almeida e Dias (2004, p. 4), apontam a MM "[...] como uma atividade essencialmente cooperativa, onde a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm um papel importante na construção do conhecimento", bem como um forte estímulo para uma relação com a sociedade.

Nas atividades de MM, o professor, ao lado dos alunos, participaria dessas ações como um gestor do processo, auxiliando e direcionando, conforme necessário, com maior ou menor presença, os trabalhos relacionados às atividades. Essa alternativa de aumento gradual na autonomia do trabalho dos alunos pode ser observada na proposta de Almeida e Dias (2004) quanto à possibilidade gradativa de desenvolvimento das atividades de MM. Para as autoras, isso pode ocorrer com o uso de três momentos:

- *Primeiro momento*: com início em uma situação problema estabelecida e apresentada pelo docente, abordam-se situações para estudo da dedução, análise e utilização de um modelo matemático. Isso ocorreria a partir de formulação de hipóteses e a investigação do problema realizada em um trabalho conjunto do professor com os alunos;
- *Segundo momento*: a partir de uma sugestão do professor, uma situação problema conhecida e um conjunto de informações são apresentados aos alunos e, em grupos, formulam hipóteses para simplificação da situação, deduzem um modelo e o validam;
- *Terceiro momento*: com a turma organizada em grupos, os alunos são direcionados à pesquisa de uma temática de seu interesse e modelagem da problemática definida por eles, com o professor assessorando o processo.

Na gradação sugerida por Almeida e Dias (2004) há desde o professor propondo o assunto até os alunos escolhendo por si próprios. Isso traz à tona a questão do assunto da atividade de MM e o currículo escolar, ou seja, como o currículo escolar é ou deve ser abordado junto a essa alternativa. A literatura expõe diversas formas e abordagens quanto a esse aspecto: tem-se desde o currículo direcionando os assuntos, como em Biembengut e Hein (2019) até a visão de Meyer, Caldeira e Malheiros (2019), na qual a escolha do tema não advém de um conteúdo matemático específico, mas dos problemas e anseios dos participantes, com os conhecimentos matemáticos surgindo das necessidades surgidas no desenvolvimento dos modelos.

A despeito da escolha realizada pelo professor, é importante, como denotam Hermínio e Borba (2010), a participação dos alunos, junto ao professor, na escolha do tema ou assunto, pois isso auxiliaria na escolha de problemáticas de interesse dos discentes. Diniz (2016) vê um ponto de equilíbrio nessa opção da escolha coletiva, possibilitando a negociação, entre professor e alunos, de interesses, levando em conta, também, as limitações do cenário escolar.

A amplitude de possibilidades existentes na utilização da MM como alternativa pedagógica vê reflexo na extensão das pesquisas realizadas em tal campo. Kaiser e Sriraman (2006, p. 302, tradução nossa) confirmam essa posição: “A discussão internacional sobre modelagem [...] demonstra que não existe uma compreensão homogênea dela e de suas bases epistemológicas dentro da discussão internacional sobre modelagem."[1] No entanto, eles vislumbram similaridades entre as pesquisas e delineiam determinadas perspectivas para a MM dentro das pesquisas em Educação Matemática. Essas classificações originaram-se de suas pesquisas em publicações científicas, dirigindo seus olhares aos objetivos centrais dos trabalhos em relação à MM.

A pesquisa de Kaiser e Sriraman (2006) propõe e delineia as seguintes perspectivas na pesquisa em MM:

- *Realista ou aplicada*: dedicada a objetivos de ordem pragmática e/ou utilitária como a resolução e compreensão de problemas do mundo real (como exemplos da indústria e da ciência, por exemplo), bem como a promoção de competências da MM. Essa perspectiva conectar-se-ia ao pragmatismo de Pollak e teria bases no pragmatismo anglo-saxão e na matemática aplicada. Ela repousaria mais próxima ao trabalho de matemáticos aplicados, como uma atividade para resolver problemas autênticos;
- *Contextual*: relacionada a assuntos e contextos psicológicos, como a resolução de problemas de palavras, relacionando-se a abordagens anteriores do processamento de informações e sistemas, com os debates americanos sobre práticas escolares de resolução de problemas e experimentos psicológicos ao fundo. Para este cenário, os sistemas conceituais são vistos como construções humanas distribuídos em mídias representacionais, ademais o conhecimento vem da experiência com o abstrato e de "mundos de experiência" não estáticos;
- *Educacional*: em duas frentes: *didática* – na estruturação e promoção de processos de aprendizado; e *conceitual* – na introdução e desenvolvimento do conceito de modelagem. Trazem aspectos integrativos, como Blum, Niss e outros, além de uma abordagem científico-humanista, pautando-se em teorias didáticas e teorias de aprendizagem. Nesse aspecto, essa abordagem utilizaria as inter-relações dos elementos do mundo real com os conceitos da matemática para estruturar o ensino e a aprendizagem da matemática;
- *Sociocrítica*: com objetivos pedagógicos em uma compreensão crítica de mundo, a partir de perspectivas emancipatórias anteriores e com abordagens

[1] "The international discussion on modelling, [...] demonstrate that there does not exist a homogeneous understanding of modelling and its epistemological backgrounds within the international discussion on modelling.

apoiadas em uma sociologia política. Com uma dimensão sociocultural da matemática, ela conectar-se-ia com a etnomatemática e o papel social da matemática, a fim de desenvolver o pensamento crítico dos alunos;

- *Epistemológica ou teórica*: orientada ao desenvolvimento e promoção as teorias de MM, com laços com Freudenthal, Chevallard, Brousseau e uma epistemologia romana. Aqui, tanto tópicos matemáticos quanto extra-matemáticos são conectados com o próprio desenvolvimento da modelagem (de problemas reais) e da intra-modelagem (dentro da matemática em si); e
- *Cognitiva*: tratada por Kaiser e Srariman (2004) como meta-perspectiva por não ser uma abordagem normativa ligada aos objetivos escolares da modelagem, sua pesquisa analisa e procura compreender processos cognitivos durante a MM, além de promover o processo de pensamento matemático na forma de imagens mentais (ou físicas), enfatizando a MM como processo mental (abstração ou generalização), a partir de uma psicologia cognitiva.

A presente pesquisa, em particular, por intencionar análises sobre caminhos e formas expressados em uma produção sígnica[1] durante a MM, se considera enquadrada nesta última perspectiva, ou seja, na meta-perspectiva cognitivista. Ao questionar a respeito do papel desempenhado pelos signos matemáticos em relação aos objetos a que se referem e ao analisar como os signos podem indicar um domínio de conhecimento sobre os objetos de referência, os autores deste encaminham-se em prol do estudo dos próprios processos cognitivos desenvolvidos nos participantes de uma atividade de MM a fim de buscar indícios de aprendizagens em práticas de Modelagem Matemática a partir de uma análise semiótica das produções dos alunos.

1.2 Da Semiótica

Platão (428/427–348/347 a.C.), um filósofo grego, entre os séculos IV e III a.C., redigiu um diálogo entre Sócrates e dois interlocutores, em uma discussão sobre convencionalismo e naturalismo. O livro, intitulado Crátilo (ou Sobre a Correção dos Nomes) (PLATÃO, 2014), trouxe conceitos discutidos até hoje sobre linguagem e sua relação com o conhecimento (MONTENEGRO, 2007), questionando-a como acesso às coisas em si.

---

[1] As temáticas sígnicas encontram explanação na seção seguinte deste texto.

Tais questionamentos inauguraram uma área de estudos denominada semiótica (ou Teoria Geral dos Signos), com origem nas raízes gregas *semeîon* (signo) e *sêma* (sinal ou signo), posteriormente adotados na forma *Semio-* e nos radicais *sema(t)-* e *seman-* (NÖTH, 1998). Mas... O que é semiótica? Santaella (2017, p. 9, 19), em obra homônima à questão, proporciona uma definição abrangente: "Semiótica é a ciência dos signos. [...] é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido."

De acordo com o panorama denotado por D'Amore, Pinilla e Iori (2015), a amplitude do espectro de pesquisas referente à semiótica encontra registro na gama de filósofos cujo trabalho abordou, em algum momento, tal temática. Além do exposto no Crátilo, Platão trouxe conceitos em posição a nomes, referentes e ideias, indicando uma espécie de estrutura triádica. Em Aristóteles (384–322 a.C.), percebe-se o surgimento do termo *symbola* (símbolo) em sua obra *De interpretatione* para referenciar um conceito. Outras ideias ligadas à *semeîon* encontram-se na produção dos estoicos (séc. IV–III a.C.), dos epicuristas (séc. IV a.C.) e de Euclides (325–265 a.C.).

Os autores continuam com essa linha histórica com Agostinho de Hipona (Santo Agostinho) (354–430), em cujo trabalho, o signo é colocado como "algo que, além da impressão causada nos sentidos, traz algo a mais à mente, como consequência de si mesmo"[1] (SAINT AGUSTINE, II, 1, tradução nossa). A relação do signo com a área religiosa foi uma das questões filosóficas da era medieval, com trabalhos, principalmente, de Pedro Hispano (1205/1220–1277) e Guilherme de Ockham (1288–1349). Após esse período, nos séculos de VI a VII, o assunto encontrou novamente lugar nas produções de diversos filósofos, inclusive de Descartes (1596–1650) e de Immanuel Kant (1724–1804) (D'AMORE; PINILLA; IORI, 2015).

No período moderno, a semiótica dividiu-se em diversas teorias bastante singulares entre si, mas ao interesse dessa pesquisa, aborda-se aquela desenvolvida pelo filósofo e matemático Charles Sanders Peirce (1839–1914). Segundo Santaella (2012a), a partir de um estudo próprio denominado "Sobre uma nova lista de categorias", Peirce (1986, 2017, 2020) refletiu sobre como os fenômenos se apresentam à experiência e estabeleceu uma semiótica partindo de *distinções tricotômicas* ou *tripartidas* (tríades a partir de sua ideia de signo). Peirce

[1] "For a sign is a thing which, over and above the impression it makes on the senses, causes something else to come into the mind as a consequence of itself [...]"

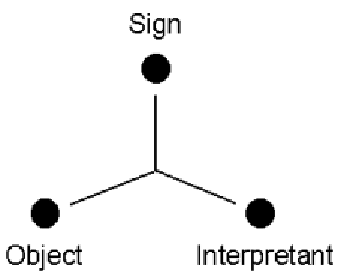
(2017) denominaria sua semiótica de, em sentido geral, lógica ou, também, doutrina dos signos, referindo-se a todo e qualquer signo utilizados por uma inteligência “científica”, ou seja, uma inteligência cujo conhecimento é capaz de advir da experiência. Conforme Santaella (2018), Peirce dedicaria sua vida a essa lógica na forma de teoria, geral, formal e abstrata para entendimento dos métodos de investigação das ciências.

Quanto à própria ideia de signo, em uma das muitas definições proporcionadas por aquele autor, é bastante clarificada na forma seguinte:

> Um signo, ou *representamen*[sic], é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas a um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei *fundamento* do *representâmen*. (PEIRCE, 2017, p. 46, grifos do autor)

Esse objeto, conforme explana Peirce (1986, 2017), pode ser algo apenas perceptível, imaginável ou, talvez, nem mesmo imaginável, pois o signo apenas representa o objeto, ou seja, pode apenas referir-se a ele, sem poderes para proporcionar familiaridade ou reconhecimento por si. A relação entre os três elementos é mais bem denotada na Figura 1.4.

Figura 1.4 – Signo peirceano



Fonte: Otte, 2006.

Santaella (1992, 2012a) agrega a essa definição de *representâmen*–objeto–interpretante ao denotar o caráter vicário do signo, identificando-o como um procurador do objeto, perfazendo o papel do objeto através de si e por si. A autora ainda destaca a função ontológica mediadora desse vicário entre o objeto e a mente, ou seja, o signo nunca seria totalmente adequado ao objeto, não se confunde com ele, nem o prescinde. Epstein (2004) entende o representâmen no plano da expressão; o objeto, no plano dos referentes; e o interpretante, no plano dos significados ou conteúdos.

De forma suscinta, Santaella (2018, p. 5) traz três agrupamentos delineados por Peirce quando do ponto de vista sob o qual se analisa o signo

> – em si mesmo, nas suas propriedades internas, ou seja, no seu poder para significar;

> – na sua referência à quilo que ele indica, se refere ou representa; e
>
> – nos tipos de efeitos que está apto a produzir nos seus receptores, isto é, nos tipos de interpretação que ele tem o potencial de despertar nos seus usuários.

A este texto interessa, em especial, o segundo grupo classificatório, sobre o qual repousar-se-á uma definição mais demorada de Peirce (2017, p. 52-53, grifos do autor):

> – Um *Ícone* é um signo que se refere ao Objeto que denota apenas em virtude de seus caracteres próprios, caracteres que ele igualmente possui quer um tal Objeto realmente exista ou não. [...] Qualquer coisa, seja uma qualidade, um existente individual ou uma lei, é ícone de qualquer coisa, na medida em que for semelhante a essa coisa e utilizado como seu signo.
>
> – Um *Índice* é um signo que se refere ao Objeto que denota em virtude de ser realmente afetado por esse Objeto. [...] Na medida em que o índice é afetado pelo Objeto, ele tem necessariamente alguma Qualidade em comum com o Objeto, e é com respeito a essas qualidades que ele se refere ao Objeto. [...]
>
> – Um *Símbolo* é um signo que se refere ao Objeto que denota em virtude de uma lei, normalmente uma associação de ideias gerais que opera no sentido de fazer com que o Símbolo seja interpretado como se referindo àquele Objeto.

Santaella (2012a, 2018) vincula essas três possibilidades às propriedades *qualidade*, *existência* ou *lei*, representando, indicando ou sugerindo. Conforme a autora,

- *ícones* utilizam-se de suas qualidades (na forma de um qualissigno) indicando seus objetos por meio da similaridade, estabelecendo isso de três possíveis formas:
  - *imagem*: semelhança no nível de aparência. Ex.: imagem de um animal;
  - *diagrama*: similaridade nas relações internas do signo e relações internas do objeto em representação. Ex.: um gráfico de inflação; ou
  - *metáfora*: assemelhando o significado do representante e do objeto. Ex.: "olhos de azeitona";
- *índices* têm seu fundamento em sua existência concreta. Assim, diverso de uma imagem de um gato remetendo, de forma icônica, a um gato, a foto de um determinado gato em particular seria um índice, um signo concreto remetendo a um objeto com o qual já estabeleceu algum tipo de relação (retratando-o);
- *símbolos*, de forma mais complexa, operam no sentido da lei sobre a qual se estabelece quando certas condicionantes são preenchidas. Um símbolo referencia todo um contexto ao qual se aplica em sua referência. No entanto, essa totalidade não é alcançável pela menta do receptor, pois esta somente acessará o objeto em representação dentro de suas capacidades e limites.

Além das classificações detalhadas construídas ao longo do desenvolvimento de suas teorias, Peirce (1986, 2017, 2020) procurou delinear a forma como esses signos são gerados, apropriados e novamente gerados, na forma de componentes de um processo contínuo *em-ser*. Pois, o signo é

> [...] qualquer coisa que conduz a alguma outra coisa (seu *interpretante*) a referir-se a um objeto ao qual ela mesma se refere (seu *objeto*), de modo idêntico, transformando-se o interpretante, por sua vez, em signo, e assim sucessivamente *ad infinitum*. Sem dúvida, uma consciência inteligente deve entrar nessa série. (PEIRCE, 2017, p. 74, grifos do autor)

Essa geração contínua conduz ao conceito de *semiose*: um processo infinito de ressignificação e geração de signos, propiciando fundamentos para análise da construção do conhecimento. Se, conforme dito anteriormente, o signo funciona como mediador entre objeto e interpretante, da mesma forma, o interpretante é mediador entre um signo e um outro signo futuro a partir do interpretante, ou seja, o interpretante também tem característica de signo (SANTAELLA, 1992).

Para Santaella (1992) toda ideia tem poder para produzir resultados, seja de ordem física ou psíquica. Assim, ela alia, como sinônimos a essa ideia ou propósito, difusão, crescimento, inteligência, mente, pensamento, generalidade, continuidade, infinitude ao conceito peirceano de semiose ou ação do signo. Para ela, a semiose é resultado de um propósito como tendência para um fim, em busca de um contato efetivo com a própria realidade. Além disso, para Santaella (2007, p. 9), "[...] a semiótica peirceana pode ser considerada, inicialmente, como uma teoria sígnica da cognição." Dessa maneira, a teoria pertinente à autogeração contínua dos signos e sua relação intrínseca com a mente (pois nessa se desenvolve o interpretante) coloca a própria semiose como caminho para um olhar ao desenvolvimento cognitivo do ser, de sua mente.

Sobre esse movimento, na mente humana, dos signos/interpretantes

> "[...] há um deslocamento incessante de um signo/interpretante para outro. Infinitos signos/interpretantes se reportam a um objeto, que se transforma no processo, uma vez que um signo está no lugar do objeto, ou seja, ele não é o próprio objeto. [...] Não se tem acesso direto ao real, uma vez que o fenômeno é uma ideia, é algo que está presente na mente humana. (DRIGO, 2007, p. 62)

Se a mente acessa o mundo real por meio de fenômenos vivenciados e continuados por meio de signos/interpretantes, parece justo quando Drigo (2007) afirma ser a semiose desencadeada quando de uma possível atualização da mente. Conforme ela, um signo começa a ser autogerado na mente após a instauração de um ponto crítico, de instabilidade, a partir do qual há uma multiplicidade de caminhos a percorrer. Essa instabilidade proporciona um movimento de signos/interpretantes em diferentes níveis de consciência, os quais, após um momento errático, se encaminham para um interpretante final. Percebe-se no trabalho de Drigo

(2007), desenvolvido a partir da ideia do *continuum* da semiose peirceana, o processo cognitivo como resultado dessas instabilidades e buscas de interpretante, no movimento de acesso da mente ao mundo real por meio de signos, de representação.

Peirce (1986, 2017, 2020) estrutura sua semiótica na forma de uma lógica de categorias, em uma semiótica de cunho geral. Steinbring (1998, 2005, 2006, 2007), no entanto, em seu papel de educador matemático, observa essas possibilidades semióticas, a partir da teoria daquele, em um contexto de ensino da matemática. Isso decorre do fato de o termo símbolo ser de uso também da matemática e por meio dos símbolos serem representados valores, medidas e outros elementos em referência a um mundo físico ou não, como no caso da matemática pura; mas, conforme Steinbring (2017), o conhecimento matemático não pode ser revelado simplesmente pela leitura de signos, símbolos e princípios matemáticos: eles têm de ser interpretados e isso acontece sob uma experiência e conhecimento implícitos, os quais, somados às atitudes e modos de usar esse conhecimento, são essenciais em uma cultura. Assim, "[...] o ensino e compreensão da matemática requer um ambiente cultural"[1] (STEINBRING, 2005, p. 17, tradução nossa).

Steinbring (2005) enfatiza o fato do ensino e aprendizagem da matemática estar relacionada a "construções matemáticas e interpretações", delineando o "aprender matemática" não como a implantação de um novo conhecimento na mente dos alunos, mas, a partir do já presente em sua bagagem, originar um conhecimento por meio da construção de novas relações. Ao estruturar sua ideia, ele alerta para o fato de um estudante, em processo de aprendizagem, não atentar, em totalidade e de imediato, para mesmos os sentidos e significações atribuídos pela comunidade matemática profissional. Isso porque cada aluno, em particular, é detentor de um contexto epistemológico e cultural prévio, no qual se insere, e isso reflete diretamente na forma como ocorre seu aprendizado.

A importância desse aspecto epistemológico é caracterizada por Steinbring (1998), tanto no ensino quanto na pesquisa, ao lembrar da necessidade de os professores serem capazes de avaliar as delimitações epistemológicas impostas pelos variados contextos sociais nos quais se inserem, bem como refletirem sobre como signos e símbolos matemáticos originam-se e são significados na interação social do ensino e aprendizagem da matemática.

Na abordagem desse aspecto epistemológico carregado na interpretação/emissão de signos durante o ensino e a aprendizagem de matemática, Steinbring (2006) estrutura a relação do signo com o objeto em duas linhas de compreensão, internamente relacionadas:

---

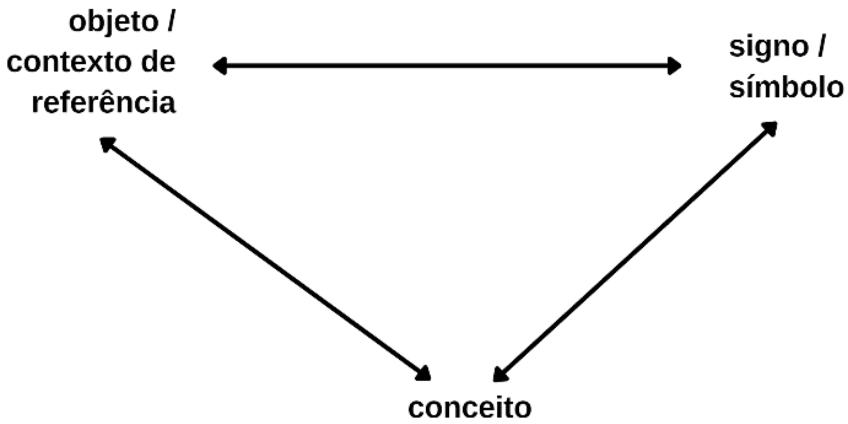
[1] "[...] the learning and understanding of mathematics requires a cultural environment."

- Uma de função semiótica, questionando sobre o papel desempenhado pelos signos matemáticos em relação aos objetos aos quais se referem; e
- Outra, de função epistemológica, na tentativa de compreensão sobre como os signos possibilitam uma apreensão do domínio de conhecimento sobre os objetos de referência.

Ou seja, ele reflete sobre o espaço cultural dos alunos, a partir do qual os signos são desenvolvidos e utilizados, no processo de aprendizagem da matemática, observando-o sob uma lente interpretativa, relacionada à semiótica e à compreensão do signo no papel de algo para outra coisa; e de uma epistemológica, na qual o conhecimento prévio, somado àquele em desenvolvimento, incorrem nas produções e interpretações sígnicas originadas no ambiente de aprendizagem.

Em uma associação dessas abordagens e de sua relação com o conceito em expressão/interpretação, Steinbring (1998, 2005, 2006) compõe uma estrutura triádica, denominada triângulo epistemológico (Figura 3.1), similar ao triângulo peirceano em forma, mas distinto daquele em origem e finalidade dado sua caracterização ocorrer em um contexto de pesquisa voltado à educação matemática.

Figura 1.5 – Triângulo epistemológico



Fonte: Steinbring, 2006.

O triângulo da Figura 1.5 estrutura a relação semiótica entre “signo/símbolo” e “objeto/contexto de referência”, considerando-a determinada por condições epistemológicas do conhecimento matemático. Steinbring (2006) ressalta o fato de seus três elementos constituintes originarem um sistema em equilíbrio e de suporte recíproco, passível de ser utilizado para modelar, a partir das relações e estruturas emergidas da interação do aluno com os objetos, a natureza invisível do conhecimento matemático. Além disso, ele utiliza-os na forma de sequência a fim de refletir sobre as interpretações realizadas pelo educando no processo de aprendizagem.

Para Veronez (2013), o triângulo da Figura 1.5 relaciona as conexões objeto/contexto de referência – signo/símbolo e o conceito suscitado nessa inter-relação, em um plano epistemológico dos indivíduos envolvidos. E, ainda segundo ela, os limites impostos por esse conhecimento impactam a conexão objeto/contexto de referência – signo/símbolo e, especialmente, a construção do conhecimento, devido às dificuldades na relação objeto/contexto de referência – signo/símbolo.

1.3 Interlocuções entre MM e Semiótica: alguns estudos

A pesquisa em MM tem-se utilizado das lentes teóricas proporcionadas pela teoria semiótica. Podemos identificar essa opção nos trabalhos de:

- Almeida (2010), cujo trabalho apresenta reflexões sobre possíveis aproximações entre modelos matemáticos e metáforas, considerando a importância da linguagem sígnica na conceitualização matemática e tem por conclusão a existência de aproximações entre modelos, modelagem e metáforas para a significação de objetos matemáticos;

- Almeida, Silva e Vertuan (2011), com uma aproximação entre semiótica peirceana e suas categorizações fenomenológicas e relações dos signos com a MM, entendida como alternativa pedagógica. A percepção de ações “primeiras”, “segundas” e “terceiras” nos alunos leva os autores a ver a atividade de MM como uma possibilidade para a geração e organização de signos;
- Almeida e Silva (2012), realizam uma investigação a respeito das relações entre as ações cognitivas evidenciadas em atividades de MM e modos de inferência. As autoras denotam a associação dos modos de inferência ativados em atividades de MM com as ações cognitivas dos alunos nas transições entre as fases da atividade;
- Veronez (2013), em tese de doutorado, reflete acerca dos signos utilizados e/ou produzidos pelos alunos durante suas ações cognitivas em atividades de MM, relacionados à situação, ao problema, aos objetos matemáticos e à resposta obtida como solução à problemática inicial. Trabalhando com a semiótica peirceana e com triângulos oriundos do trabalho de Steinbring, a autora conclui pela dinamicidade e complementaridade dos signos influenciando os encaminhamentos dados no desenvolvimento de atividades de MM, com os signos comunicando, mobilizando e criando conhecimentos matemáticos e outros;
- Almeida e Silva (2014) apresentam o caráter de representação existente nas atividades de MM ao relacionar as seguintes representações com a situação inicial, dita problemática: textos, tabelas, gráficos etc. E ao citarem, em uma situação final, as representações realizadas com o auxílio de um ferramental matemático oriundo da álgebra, dos gráficos e da geometria. Elas completam explicitando a capacidade dos diferentes procedimentos adotados durante a atividade viabilizarem, aos discente, a possibilidade de manipular diferentes formar de representar objetos matemáticos;
- Silva e Veronez (2014) destacam a utilização de representações na busca de soluções ao problema oriundo de uma situação inicial durante uma atividade de MM. Segundo elas, isso ocorre na forma de signos, no intento de comunicar algo durante as tentativas de acesso às ideias surgidas em pauta. E ainda denotam o

fato de a problemática dar início ao desencadeamento de ações cuja abordagem, durante o processo e requerer a adoção representativa de símbolos, expondo conceitos matemáticos e contextos, tanto oriundos da problemática inicial como originados no entendimento do panorama da situação e da solução originada como resposta às questões propostas. Tal posicionamento a respeito das representações encontra complemento, no aspecto sígnico, em Santaella (2020, p. 8), ao denotar: "[...] a) não há comunicação sem intercâmbio de algum tipo de conteúdo; b) tudo conteúdo se expressa em mensagens; c) toda mensagem se encarna em signos; d) não há intercâmbio de mensagens sem um canal de transporte";

- Silva, Borssoi e Almeida (2015) em uma análise semiótica de atividades de modelagem matemática mediadas pelo uso da tecnologia, inferem a produção de signos distintos para os movimentos relacionados com o objeto matemático;
- Almeida e Silva (2017), cuja pesquisa busca discutir a relação entre as ações dos alunos e a produção de signos em atividades de MM, observam o processo de semiose. As autoras concluem pela rede de signos gerada no processo seja tanto acionada pelo conhecimento presente como pelos novos oriundos do desenvolvimento;
- Veronez e Almeida (2017) observam o papel dos signos nos encaminhamentos dados pelos alunos em uma atividade de MM, a partir dos signos utilizados e/ou produzidos por eles. As autoras inferem da complementação, entre si, dos signos, em suas funções semiótica e epistemológica, bem como de sua sinalização acerca da mobilização e/ou produção de conhecimento;
- Mendes e Almeida (2020) investigam a produção de signos interpretantes no desenvolvimento de atividades de MM, a partir da semiótica peirceana. O trabalho aponta a evidência de signos interpretantes imediatos em atividades de aquecimento e interpretantes dinâmicos e finais nas de acompanhamento;
- Ramos e Almeida (2021) interessam-se pelas experiências dos alunos quando do desenvolvimento de atividades de MM em busca de descrevê-la em termos semióticos. A descrição oriunda desse questionamento leva as autoras a assegurarem, para a apropriação da MM pelos alunos, a necessidade de experiências relativas à identificação do processo *ser* MM enquanto possuem momentos de *fazer* MM, experiências essas interdependentes na constituição do

fenômeno MM nos aspectos fenomenológico e ontológico da teoria de Charles Sanders Peirce.

1.4 Aspectos metodológicos

Com o objetivo de refletir acerca da MM como alternativa pedagógica para a construção de conhecimento matemático e outros pelos educandos, a partir da análise de suas produções sígnicas, esta pesquisa desenvolveu-se em duas frentes, relatadas em sequência a este capítulo, na forma de dois artigos. No primeiro, tomando-se a estrutura triádica do signo peirceano, observou-se a maneira como os objetos matemáticos são expressos pelos alunos em uma atividade de MM, a partir de sua produção sígnica. No segundo, a fim de analisar as relações evidenciadas entre objetos matemáticos suscitados pelos alunos e signos manifestados por eles ao longo do desenvolvimento de uma atividade de MM, observaram-se esses signos por meio da semiótica peirceana e construindo triângulos semióticos para modelar, em sequência, os processos de emissão e interpretação dos signos no decorrer da atividade de MM.

As atividades de MM analisadas desenvolveram-se em 2021, com dois grupos de voluntários, na forma de Projetos de Ensino, à parte das aulas regulares. Ambos os grupos compostos por alunos provenientes de cursos de administração, contábeis e engenharia de produção em seu segundo semestre de curso superior em uma instituição de ensino superior na cidade de Campo Mourão/PR, Brasil. O grupo correspondente ao Artigo 1 teve sete participantes e, ao Artigo 2, seis.

Devido à pandemia da Covid-19, todos os encontros, com cerca de uma hora cada um, ocorreram por meio do aplicativo Google Meet (gratuito) na forma de videoconferência e as conversas e discussões utilizando-se do aplicativo Telegram (também sem custos adicionais). As imagens, sons e mensagens, bem como qualquer outro registro, foram realizados e utilizados com a devida autorização por meio de assinatura de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE.

O Quadro 1.2 e o Quadro 1.3, também presentes nos artigos, trazem um resumo das duas atividades de MM desenvolvidas.

Quadro 1.2 – Quadro resumo da Atividade I de MM desenvolvida

Temática

Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação – ICMS

Questão problema

Qual valor uma empresa poderia economizar, Pagando ICMS apenas uma vez ao ano?

Hipóteses

- É mais vantajoso para uma empresa pagar o ICMS anualmente
- É possível realizar o pagamento do ICMS uma única vez ao ano, em vez de mensalmente

Desenvolvimento de modelo matemático

- Investigação sobre o imposto e sua relação com as empresas
- Planilhas com dados

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		mês	vendas	ICMS (Capital)	taxa	período	valor ao término do ano (montante)
3		janeiro	R$ 350,00	R$ 63,00	0,50%	11	R$ 66,55

- Construção de modelo na forma de uma equação

Conceitos matemáticos e ferramentas mobilizados

Taxa de juros, capital, capitalização, montante, juros simples e compostos
Aplicativo de planilhas, Calculadora financeira

Modelo Desenvolvido

Modelo de retorno R proporcionado pela aplicação do valor de ICMS no mês n até o final do ano à taxa i

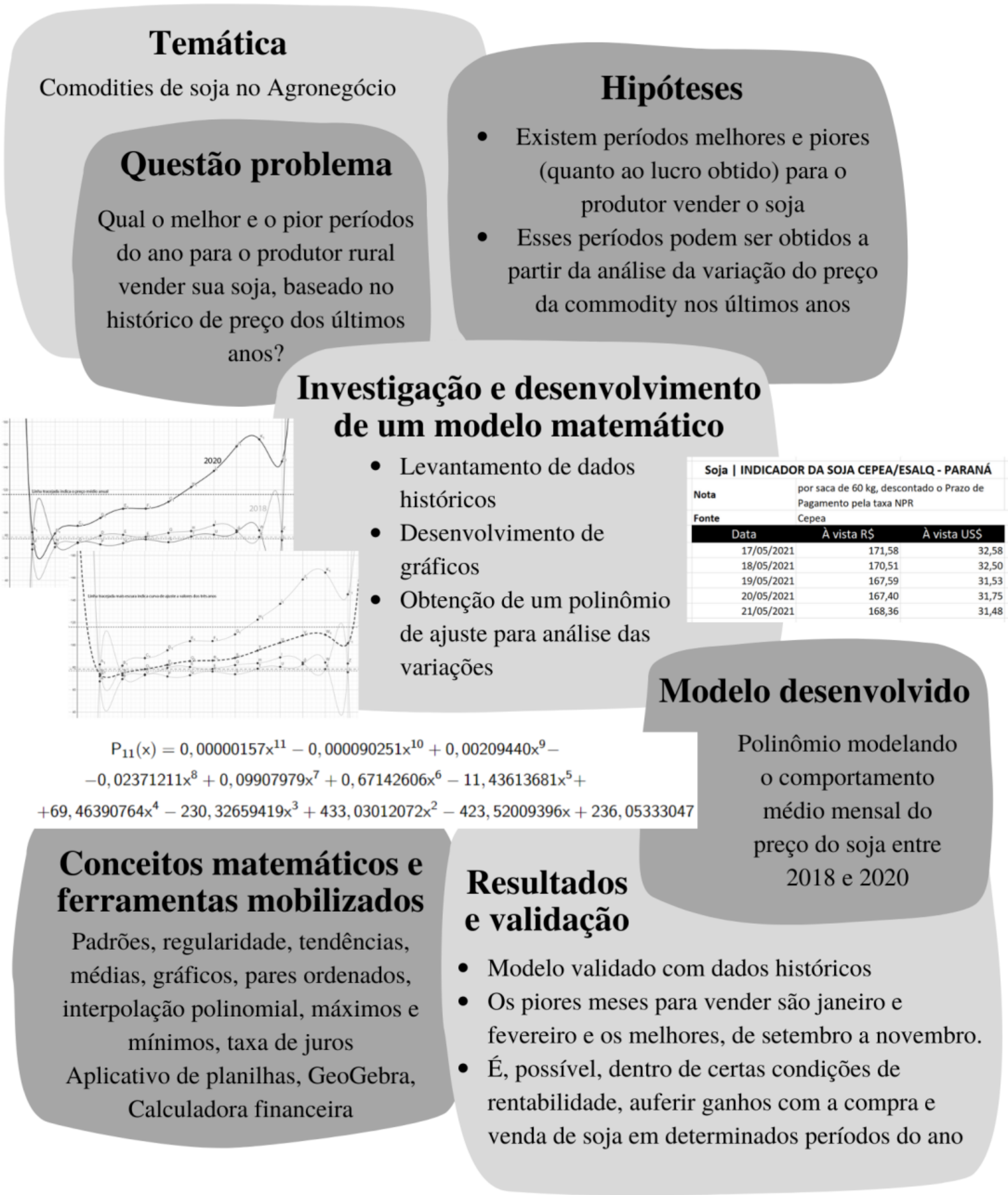
$$R_m = iCMS_m . \left((1+i)^{(12-m)} - 1 \right)$$

Resultados e validação

- Obtenção de modelo para a situação problemática inicial
- Valores obtidos com o modelo validados por meio de calculadora financeira
- Confirmação das hipóteses iniciais

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

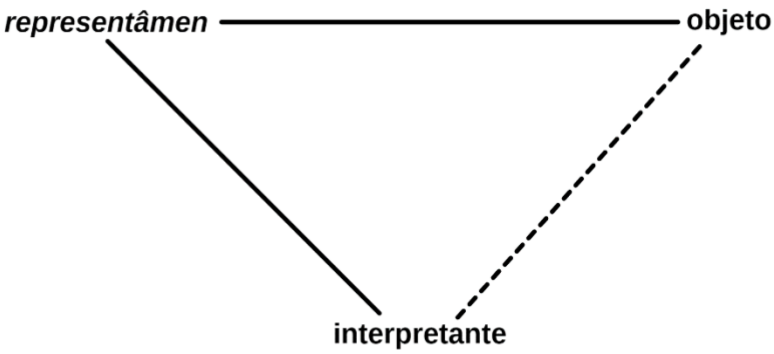
Quadro 1.3 – Quadro resumo da Atividade II de MM desenvolvida



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A produção sígnica (falas e comentários, tentativas de estruturação da problemática e do modelo, rascunhos, tabelas, gráficos etc.) foi observada sob a égide da semiótica peirceana, ou seja, delineando os signos na forma da tríade *representâmen*–objeto–interpretante e o elemento último desta, o interpretante, como origem de uma nova tríade, em um processo de semiose, conforme a teoria de Peirce (2020). De forma não contraditória ao arcabouço teórico desta pesquisa, como caractere da abordagem metodológica adotada, os autores assumem o fato de o interpretante originado desses *representâmens* (de caráter vicário) suscitarem o objeto ao qual se referem ou não, conforme critérios e conhecimentos internos ao intérprete, conforme denota a linha pontilhada na Figura 1.6.

Figura 1.6 – Triângulo semiótico peirceano



Fonte: Otte (2006, p. 22, adaptado).

As análises decorrentes desse processo surgiram, então, das tentativas de delinear as eventuais relações entre esses signos emitidos pelos alunos e as situações, problemáticas e, principalmente, objetos matemáticos aos quais se referem, sejam surgidos do andamento da atividade de MM, sejam pertencentes a seu arcabouço prévio. A base teórica para tais procedimentos foi proporcionada por Peirce (1986, 2017, 2020), cujos pontos principais compõem seção prévia deste capítulo, com o auxílio dos entendimentos de Santaella (1992; 2012a; 2012b; 2017; 2018), Nöth (1998, 2005), Epstein (2004) e Drigo (2007).

Além disso, para o segundo artigo, utilizou-se da construção de triângulos steinbringuianos, descritos em seção prévia deste capítulo, na forma proposta por por Veronez (2013). Tal procedimento, em consonância com a visão peirceana, determina estruturas sequenciais cujo escopo permite análises e buscas quanto a aspectos cognitivos desenvolvidos pelos participantes em uma atividade de MM quanto às produções sígnicas arroladas no decorrer do processo.

1.5 Referências

ALMEIDA, L. M. W. de. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, FE, Unicamp, v. 18, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 17, n. 22, set. 2004. ISBN 978-85-89082-23-5.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; A ação dos signos e o conhecimento dos alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 202 - 219, abr. 2017

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. (Org.). **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Moderna, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. 2. reimp. São Paulo: Contexto, 2019.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **REIEC**, Revista Eletrónica de Investigación em Educación em Ciencias, v. 6, n. 1, p. 1-10, 2011. ISSN 1850-6666.

ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação matemática. *In*: ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. (Org.). **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Moderna, 2014.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: **REUNIÃO ANUAL DA ANPED**, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BASSANEZI, R. C. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 4. ed. 1. reimp. São Paulo: Contexto, 2018.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem no ensino da matemática**. 5. ed. 5. reimp. São Paulo: Contexto, 2019.

BLUM, W., NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects -- state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, pp. 37-68, 1991.

D’AMBRÓSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1997.

D'AMORE, B.; PINILLA, M. I. F.; IORI, M. **Primeiros elementos de semiótica**: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DINIZ, L. do N. **Leitura, construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso das tecnologias de informação e comunicação**. Tese (Doutorado em Ciências da Educação). Universidade do Minho, Portugal, 2016.

DRIGO, M. O. **Comunicação e cognição**: semiose na mente humana. Porto Alegre, Sorocaba: Sulina, Eduniso, 2007.

EPSTEIN, I. **O signo**. 7. ed. 4. reimp. São Paulo: Ática, 2004.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil**. Zetetike, Campinas, SP, v. 3, n. 4, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. (Formação de professores).

HERMÍNIO, M. H. G. B.; BORBA, M. de C. A noção de interesse em projetos de modelagem matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 12, n. 1, p. 111-127, 2010.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, Vol. 38(3), p. 302-310, 2006.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática.** (Tese de doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis/SC. 2012.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MADRUGA, Z. E. de F. et al. **Cognição, semiótica e modelagem**: articulações possíveis. Contexto & Educação, Editora Unijuí, Ijuí – RS, ano 31, n. 100, p. 4-32, set.-dez. 2016.

MENDES, T. F.; ALMEIDA, L. M. W. de. Signos interpretantes em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 14, p. 1-24, jan./dez. 2020. ISSN 1982-7199.

MEYER, J, F, da C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MONTENEGRO, M. A. de P. **Linguagem e conhecimento no Crátilo de Platão**. Kriterion, 48 (116), dez. 2007.

NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. Introduction. *In:* BLUM, W. et al. (Ed.). **Modelling and applications in Mathematics Education**. New York, NY, USA: Springer, 2007. (New ICMI Study Series, 10).

NÖTH, W. **A semiótica no século XX**. 3. ed. São Paulo: Annablume, 2005. (E).

NÖTH, W. **Panorama da semiótica**: de Platão a Peirce. São Paulo: Annablume, 1998. (E).

OTTE, M. Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View. **Educational Studies in Mathematics**, 61(1-2), p. 11–38, 2006. DOI:10.1007/s10649-006-0082-6.

PEIRCE, C. S. **La ciencia de la semiotica**. Buenos Aires: Nueva Visión, 1986.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 4. ed. 3. reimp. São Paulo: Perspectiva, 2017.

PEIRCE, C. S. Tradução de excertos de escritos de C. S. Peirce. In: SANTAELLA, L. (Org.). **Charles Sanders Peirce**: excertos. São Paulo: Paulus, 2020.

PLATÃO. **Crátilo**. 1. ed. São Paulo: Paulus, 2014. (Trad. VIEIRA, C. de. O.).

RAMOS, D. C.; ALMEIDA, L. M. W. de. Interpretação semiótica em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1391-1415, dez. 2021.

SAINT AGUSTIN. **On Christian doctrine, in four books**. Grand Rapids, MI, USA: Christian Classics Ethereal Library, 2021.

SANTAELLA, L. **A assinatura das coisas**: Peirce e a literatura. Rio de Janeiro: Imago, 1992.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. 1. ed. 4. reimp. São Paulo: Cengage Learning, 2012a.

SANTAELLA, L. (Org.). **Charles Sanders Peirce**: excertos. São Paulo: Paulus, 2020.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. 1. ed. 34. reimp. São Paulo: Brasiliense, 2017.

SANTAELLA, L. **Percepção**: fenomenologia, ecologia, semiótica. 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012b.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**: publicidade, arte, mídia, vídeos, literatura, instituições. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

SILVA, K. A. P. da; BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. Uma análise semiótica de atividades de modelagem matemática mediadas pela tecnologia. **R. B. E. C. T.**, v. 8, n. 1, jan-abr./01. ISSN 1982-873X.

SILVA, K. A. P. da S.; VERONEZ, M. R. D. Um olhar semiótico sobre a Modelagem Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. (Org.). **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Moderna, 2014.

STEINBRING, H. Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers. **Journal of Mathematics Teacher Education 1**, 157–189 (1998).

STEINBRING, H. Epistemology of mathematical knowledge and teacher–learner interaction. **ZDM** Mathematics Education (2007) 39:95–106. DOI 10.1007/s11858-007-0017-4

STEINBRING, H. What makes a sign a mathematical sign. **Educational Studies in Mathematics** (2006) 61: 133–162. DOI: 10.1007/s10649-006-5892-z.

STEINBRING, H. **The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: an epistemological perspective**. New York, NY, USA: Springer Science+Business Media, 2005. (Mathematics education library).

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. (Tese de doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR. 2013.

VERONEZ, M. R. D. Modelagem matemática como alternativa pedagógica na educação básica. **X EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática**, p. 1013-1020, 2009.

VERONEZ, M. R. D.; ALMEIDA, L. M. W. de. Sobre o papel dos signos em atividades de MM. **REnCiMa**, v.8, n.3, p.142-157, 2017.

2 Modelagem Matemática e Semiose: produções sígnicas favorecendo (n)a construção de conhecimentos

2.1 Resumo

Dentre as possibilidades e alternativas utilizadas em espaços de aprendizagem de matemática existe a Modelagem Matemática (MM). De maneira geral, a MM proporciona um ambiente no qual seja possível mobilizar e construir conhecimento matemático, além de outros conhecimentos, por meio do estudo de fenômenos advindos da realidade. Este texto aborda uma atividade de MM desenvolvida por um grupo de estudantes do Ensino Superior de diferentes cursos com o objetivo de analisar suas produções sígnicas sob a ótica da semiótica de Charles Sanders Peirce, com o objetivo de identificar indícios de como a MM pode favorecer a construção de conhecimentos por meio da semiose (geração de signos, em processo contínuo). As dinâmicas foram observadas em uma abordagem qualitativa, utilizando-se da semiótica fpeirceana e também dos entendimentos de Isaac Epstein, Maria Ogécia Drigo, Lúcia Santaella e Winfried Nöth. Foi possível observar processos de [res]significação desde a escolha da temática sobre o imposto denominado ICMS, passando pelas incursões iniciais no tema até a obtenção de uma solução para a problemática inquirida. Percebeu-se um processo de evolução na complexidade dos signos produzidos ao longo da atividade de MM, proporcionado pelos processos de semiose, favorecendo a construção de conhecimentos matemáticos e outros devido à produção de sentidos, bem como ressignificações, proporcionadas pela estrutura da atividade de MM.
Palavras-chave: Educação matemática; Semiótica peirceana; Semiose.

2.2 Introdução

Como denota Machado (2001), a matemática é uma disciplina presente nos currículos escolares em todo o mundo. Entretanto, não se constituiu uma tarefa de solução imediata e fácil relacionar essa temática com a vida dos aprendizes, pois como aponta D’Ambrósio (1997, p. 31), “[...] é muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude de problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas.”

Dentre as buscas de opções para o ensino da matemática, um dos pontos a suscitar interesse é o do enquadramento dos tópicos ao cotidiano e atualidade dos próprios aprendizes, em especial aquela denominada como *modelagem matemática*, um dos focos de discussão dentro da Educação Matemática (KLÜBER, 2012). Almeida e Silva (2014) trazem a MM como alternativa pedagógica para abordagem de problemas, em geral, não matemáticos, utilizando-se de matemática. Isso acontece a partir da tentativa de solução de questões pertinentes à realidade, suscitando tópicos oportunos ao currículo desejado, assim como quaisquer outros conhecimentos numéricos e/ou algébricos cuja demanda seja necessária à compreensão e estruturação de possíveis elucidações à temática em estudo.

Nesse cenário de localizar a MM, Almeida e Dias (2004) a trazem como estratégia de ensino e aprendizagem; Almeida e Silva (2014), compilam relatos de práticas de MM na perspectiva da Educação Matemática; Almeida, Silva e Vertuan (2019) e Veronez (2009) dirigem um olhar à MM na educação básica; Bassanezzi (2015) discute aspectos teóricos e práticos do ensino-aprendizagem com MM; Meyer, Caldeira e Malheiros (2019) trazem discussões sobre a MM relacionada a diferentes perspectivas em Educação Matemática; entre outros.

Além dessas temáticas, a MM também pode favorecer um olhar para os processos de construção de conhecimentos matemáticos (e outros) decorrentes de uma atividade de MM. Mas, como proceder com tal investigação? O educador não deve se prender unicamente ao contexto originado em sua problemática se o desejo, como explorador, é de ampliar seus horizontes, buscar por ferramentas e maneiras de olhar para o assunto com lentes teóricas e/ou metodológicas provindas de outros segmentos científicos, se necessário. Uma oportunidade para tanto, na Educação Matemática, se apresenta na observação do objeto de pesquisa por meio da teoria semiótica, como já procederam, especificamente em relação à MM, Almeida e Silva (2017), Madruga *et al* (2016), Ramos e Almeida (2021), Veronez (2013) e Veronez e Almeida (2017).

Sendo a Semiótica um terreno amplo, no qual existem variadas vertentes, aludir-se-á, aqui, à produção de Peirce (1986, 2017, 2020), filósofo e matemático americano, observado, também, a partir dos trabalhos de Epstein (2014), Nöth (1998, 2005) e Santaella (1992, 2012a, 2012b, 2017, 2018, 2020). A semiótica peirceana integra o variado escopo do trabalho de Peirce e fundamenta-se numa compreensão triádica (relacionada a três elementos) do signo e suas relações. A partir dessa estrutura, o filósofo teceu sua ideia de semiose, abordada na obra de Drigo (2007) em sua relação com o conceito de construção cognitiva.

Findo estes breves apontamentos, uma questão persiste: a que se propõe a presente pesquisa? Ela objetiva resultados investigativos decorrentes da seguinte problemática: *o que as produções sígnicas dos alunos sugerem, considerados os modos como os objetos matemáticos* *são expressos por eles ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática*? Para tanto, ela está estrutura em seções teóricas, sobre a MM e sobre semiótica, seguidos por um espaço indicando os aspectos metodológicos adotados e, por fim, a análise de uma atividade de MM e considerações finais.

2.3 Da Modelagem Matemática

Da pesquisa em Educação Matemática originaram-se diferentes alternativas pedagógicas e correntes metodológicas que suportam modos de ver e conceber a matemática nas salas de aulas (FIORENTINI, 1995). Quanto à prática, seria possível pensar em uma educação matemática passível de uso no dia a dia de seus aprendizes, pois, como ressalta D'Ambrósio (1997, p. 7-8), a matemática é

> [...] uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural. [...] Vejo educação como uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo gerado por esses mesmos grupos culturais [famílias, tribos, sociedades, civilizações], com a finalidade de se manterem como tal e de avançarem nas necessidades de sobrevivência e transcendência. Consequentemente, matemática e educação são estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes.

Dessa forma, é propício pensar uma educação matemática proporcionadora de um ferramental à solução dos problemas pertinentes à vivência prática dos seres sociais, permitindo-lhes buscar soluções na forma de modelos matemáticos. É tal o propósito da MM, vista aqui na forma de alternativa pedagógica como proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2019), ou seja, "uma maneira de desenvolver atividades na aula de matemática" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 14). Alinhada a essa ideia, Veronez (2009, p. 1013) assevera a MM como "uma possibilidade de o aluno apreender conceitos matemáticos, desenvolver sua capacidade crítica e despertar sua criatividade, enquanto se envolve com situações reais".

Conforme Almeida (2019), apesar de haver há tempos profissionais dedicados a uma forma de ensino da matemática comumente denominada de *matemática aplicada*, a MM (na forma como aqui adotada) tem sua origem no Brasil ao fim da década de 1970, como oposição ao Movimento da Matemática Moderna, como uma prática do "fazer matemática" para "coisas da vida". Biembengut e Hein (2019) foram participantes dos primeiros momentos da MM no Brasil, ainda em seu caráter mais conectado à matemática aplicada e expõem uma abertura da educação matemática para MM em diversos países nas últimas três décadas. Além disso, ela cita o pioneirismo brasileiro do professor Aristides Camargos Barreto (PUC – Rio de Janeiro, década de 1970) e a consolidação e difusão da abordagem educacional por Rodney Bassanezi (Unicamp – Campinas/SP).

Enquanto um modelo matemático, segundo Bassanezi (2018), é "[...] um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado", a MM, em sua intenção educacional, se coloca para além desse aspecto teórico e propõe abordar elementos e problemas da vida cotidiana e social dos discentes, como forma a oportunizar a aquisição (e construção) de conhecimentos matemáticos, utilizando-se também da própria criatividade e o interesse pela prática de abordar questões reais com um olhar matemático, produzindo, eventualmente um modelo matemático. Nesse ínterim, Almeida e Vertuan (2014) apontam a existência de uma variedade de conceitualizações e caracterizações sobre a MM na literatura especializada.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2019, p. 9), "A Modelagem Matemática constitui uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da matemática, um problema não essencialmente matemático". Esse problema tem origem na realidade dos educandos, como denotam Meyer, Caldeira e Malheiros (2019, p. 75), para quem a MM é

> [...] um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o 'fazer' Matemática em sala de aula, referindo à observação da realidade (do aluno ou do mundo) e, partindo de questionamentos, discussões e investigações, defronta-se com um problema que modifica ações na sala de aula, além da forma como se observa o mundo.

Tal vínculo com a realidade de quem constrói uma solução na forma de modelo é percebido também na definição de Bassanezi (2015, p. 15), quando vê na MM um "[...] processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre a sua realidade, carregada de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador".

Almeida, Silva e Vertuan (2019, p. 12) caracterizam também a estrutura de uma atividade de MM:

> [...] de modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

No processo estabelecido desde essa situação inicial até a final em uma atividade de MM, diversos autores propõem fases ou etapas e, apesar de diferirem entre si em um aspecto ou outro, é possível identificar uma certa similaridade no seu desenvolvimento. Bassanezi (2015) propõe a seguinte sequência: escolha do tema; coleta de dados; análise de dados e formulação de modelos; validação e, por fim, convergência e estabilidade. Biembengut e Hein (2019), partem de uma exposição do tema, seguido de um levantamento e seleção de questões;

formulação de questão; resolução da questão; modelo e validação. Barbosa (2001) traz uma estrutura na forma: formulação do problema; simplificação; coleta de dados e solução. Para Almeida, Silva e Vertuan (2019), em uma atividade de MM são perceptíveis fases relacionadas à “inteiração”, “matematização e resolução” e “interpretação dos resultados e validação” inter-relacionadas entre si, nesta ordem ou não.

De maneira geral, dos diversos posicionamentos citados, inicialmente, é válido identificar a realidade social e cultural dos participantes, bem como seus interesses e expectativas. Em seguida, propor ou escolher uma problemática dentro da qual se pretende desenvolver um possível modelo matemático que pode se comportar como solução ou sugerir uma solução. Das investigações inerentes ao tema escolhido ocorrerá o reconhecimento da situação-problema em um processo de inteiração, coleta e estruturação de dados, permitindo o início de um processo de matematização em busca da resolução do problema na forma de um modelo matemático, ou por meio dele. Outro aspecto observado é uma análise e validação dos dados e modelos obtidos, de forma a agregar um caráter crítico à atividade como um todo.

Quanto à escolha do tema e seu vínculo com o currículo escolar, a problemática pode surgir por escolha dos alunos ou do professor. Para Diniz (2016), existe uma possibilidade de equilíbrio entre essas opções: “[...] o ideal é que o interesse por uma temática seja compartilhado coletivamente. [...] no sentido de negociar os interesses e as limitações decorrentes do cenário escolar.” Ademais, para Hermínio e Borba (2010), é positivo o aluno escolher o tema ou participar da escolha com o professor, pois passa a exercer um papel ativo, lidando com um tema de seu próprio interesse.

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2019), a escolha do tema deve ser da realidade social dos participantes, de seus problemas e anseios. Uma vez definida a questão, os estudos derivados de sua busca por solução determinam os conhecimentos matemáticos necessários a serem desenvolvidos e, portanto, aprendidos.

Além disso, no âmbito da escolha do tema, existe uma proposta de Almeida e Dias (2004) possibilitando uma inserção gradual dos alunos com as atividades de MM:

1. A partir de uma *situação-problema proposta pelo professor* são trabalhadas dedução, análise e utilização de modelos matemáticos, em um trabalho conjunto professor-alunos;
2. Em posterior, uma *situação-problema sugerida pelo professor* para os alunos, divididos em grupos, formularem hipóteses de simplificação e deduzirem e validarem modelos a partir de dados fornecidos;
3. Por fim, uma *situação-problema de escolha dos alunos*, para desenvolvimento em grupo, sob orientação do professor.

É possível perceber uma grande variedade de abordagens e possibilidades existentes na MM, em suas pesquisas e nas atividades desenvolvidas dentro desse cenário. Kaiser e Sriraman (2006) exprimem a inexistência de uma compreensão homogênea da modelagem e de seus panoramas epistemológicos, delineando várias perspectivas da MM: aplicada (ou realista), contextual, educacional (didático ou conceitual), sociocrítica e epistemológica. Este trabalho desenvolveu-se com a análise dos resultados voltada a uma metaperspectiva cognitiva, apontada por Kaiser e Sriraman (2006, p. 304) como aquela cujo objetivo de pesquisa é a “análise dos processos cognitivos que ocorrem durante os processos de modelagem”, observados aqui por meio da semiótica peirceana.

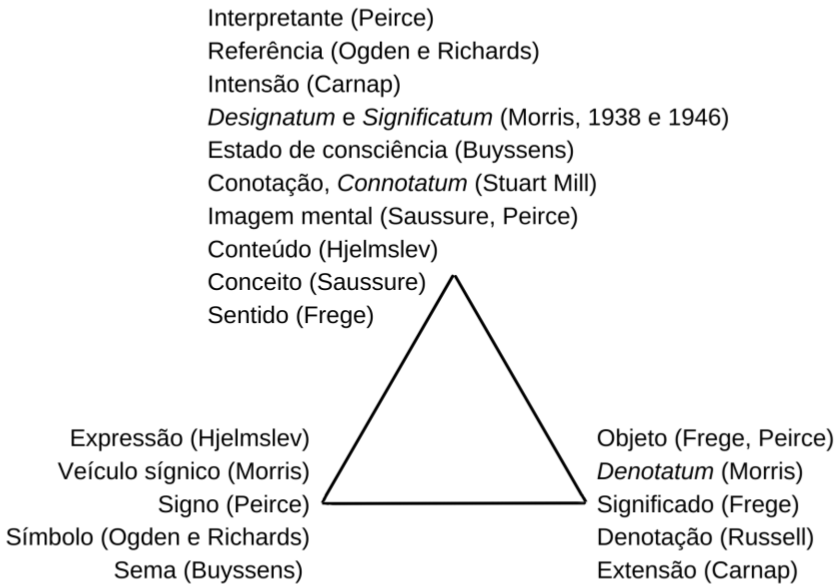
2.4 Da Semiótica

Entre os séculos IV e III a.C., o filósofo grego Platão (428/427–348/347 a.C.) registrou uma obra sobre linguagem na forma de um diálogo entre Sócrates e dois interlocutores, em um impasse entre convencionalismo e naturalismo, intitulada Crátilo (ou Sobre a Correção dos Nomes) (PLATÃO, 2014). Consoante Montenegro (2007), a obra expôs conceitos discutidos até o dia de hoje sobre a linguagem e sobre a sua capacidade de viabilizar conhecimento, questionando sua necessidade para acesso à realidade das coisas em si. A obra lançaria sementes da área de estudos chamada atualmente de semiótica (ou Teoria Geral dos Signos), cujo nome provém das raízes gregas *semeîon* (signo) e *sêma* (sinal ou signo), transliterados posteriormente na forma *Semio-* e nos radicais *sema(t)-* e *seman-*, utilizado na nomenclatura de temas correlacionados (NÖTH, 1998).

O período moderno da semiótica teve seu campo de estudos dividido em segmentos bem delineados por teorias bastante específicas, dentre as quais, destacando-se como interesse dessa pesquisa, a desenvolvida pelo filósofo e matemático Charles Sanders Peirce (1839–1914). Peirce (1986, 2017, 2020) organizou sua semiótica (ou lógica) a partir de *distinções tricotômicas* ou *tripartidas*, ou seja, tríades estruturadas sobre a ideia de signo. Mas o que seria o signo peirceano? Seria algo representando uma coisa para alguém e, por isso, também denominado de *representâmen*. Essa representação acontece por meio do fundamento do signo, referenciando um determinado *objeto* e criando, na mente receptora, um *interpretante* (PEIRCE, 1986, 2017). Epstein (2004) clarifica a relação sígnica peirceana ao localizar o *representâmen* no plano da *expressão*, o interpretante, no plano dos *significados* ou *conteúdos* e o *objeto*, no plano dos *referentes*.

Para Peirce (1986, 2017), a tríade sígnica parte do fundamento presente no *representâmen*, detentor, este, de um potencial de originar um interpretante na mente do interpretador, apontando ou não para o objeto para o qual está. No trabalho de outros semioticistas há variâncias nas denominações da estrutura triangular do signo (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Diferentes nomenclaturas para os elementos da tríade sígni**ca**



Fonte: Epstein (2004, Adaptado)

O arcabouço sobre o qual reside especificamente este estudo parte do posicionamento de Peirce (2017, p. 74, grifos do autor) sobre tais entes como componentes de um processo contínuo *em-ser*, pois, para ele, o signo é

> [...] qualquer coisa que conduz a alguma outra coisa (seu *interpretante*) a referir-se a um objeto ao qual ela mesma se refere (seu *objeto*), de modo idêntico, transformando-se o interpretante, por sua vez, em signo, e assim sucessivamente *ad infinitum*. Sem dúvida, uma consciência inteligente deve entrar nessa série.

Tal geração de novos signos, de forma contínua, na composição *representâmen*–objeto–interpretante conduz à ideia peirceana de *semiose*: o processo infinito de geração de signos por meio da ressignificação, fornecendo bases para a reflexão filosófica da própria construção do conhecimento. A trama da semiose ocorre porque o signo funciona como uma *mediação* entre o objeto representado e o interpretante produzido e, de forma similar, o interpretante é mediador entre o signo e um outro signo futuro, ou seja, o interpretante também tem característica de signo (SANTAELLA, 1992). A autora ainda destaca o *caráter vicário* do signo: o objeto é inacessível sem intermediação sígnica.

O desenrolar desse processo de semiose na mente humana e sua importância para a construção de novos saberes encontra vias mais bem definidas no aclaramento de Drigo (2007, p. 85-86):

> [...] a semiose se desencadeia quando da atualização da mente. Neste momento nos importa a mente humana, uma possível atualização da mente. O início da autogeração do signo coincide com a instauração de um ponto crítico ou um ponto instabilidade, a partir do qual caminhos bifurcantes ou multiramificados se delineam [...] Tal ponto de instabilidade desencadeia um movimento de signos/interpretantes que permanecem em níveis diferenciados de consciência [...] O movimento dos signos/interpretantes, após o ponto de instabilidade, pode ser um tanto errático, desordenado. [...] Com o caos, as qualidades de sentimentos se atualizam e permeiam o desvelar de interpretantes pela mente humana dos interpretantes dinâmicos rumo ao interpretante final.

Otte (2006, p. 12, tradução nossa) atenta para o fato de "todo nosso acesso cognitivo à realidade é relativo e mediado por signos, ao invés de ser direto e absoluto."[1] Além disso, para Santaella (2007, p. 9), "[...] a semiótica peirceana pode ser considerada, antes de mais nada, como uma teoria sígnica da cognição." Assim, a inter-relação entre a autogeração contínua dos signos e a mente sustenta a visão da semiose como via de interpretação para o desenvolvimento cognitivo.

2.5 Aspectos metodológicos

Uma pesquisa demanda, além das teorias sobre as quais se erigem as discussões e eventuais conclusões, a demarcação dos pressupostos teóricos e métodos adotados pelo pesquisador. Quanto ao primeiro, esta pesquisa qualitativa se desenvolveu sobre e com atividades de MM; quanto ao segundo, a observação e análise dos variados registros, incluindo-se material audiovisual, ocorreu utilizando-se da semiótica peirceana.

Nesse âmbito, por vezes, é necessário lidar e buscar interpretações de uma gama de processos e situações nos quais a precisão numérica da estatística e do cálculo, correntes na abordagem quantitativa, podem não ser suficientes à compreensão global do fato investigado. Bicudo (2011) remete à necessidade de consonância entre dimensões ontológicas e epistemológicas a fim de prover confiança à investigação, buscando compreender o investigado e seu solo, em uma construção do conhecimento no movimento de ser e conhecer. Tal processo dar-se-ia na forma da pesquisa qualitativa, na qual "(...) se está buscando a qualidade dos dados à espera de análise" (Bicudo, 2011, p. 14). Além disso, Flick (2009, p. 25) pontua

> [..] de modo diferente da pesquisa quantitativa, os métodos qualitativos consideram a comunicação do pesquisador em campo como parte explícita da produção de conhecimento, em vez de simplesmente encará-la como uma variável a interferir no

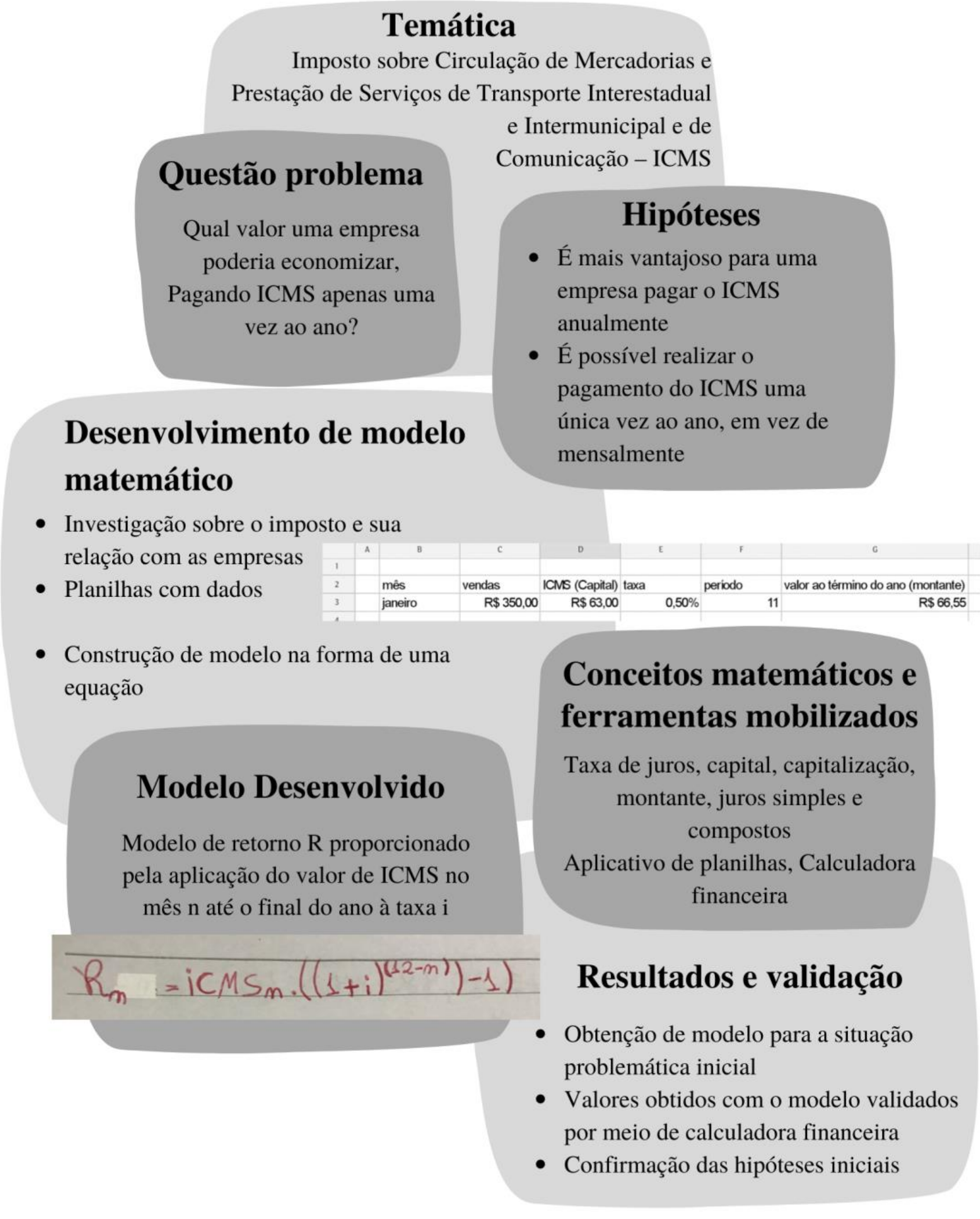
[1] "All our cognitive access to reality is relative and mediated by signs, rather than being direct and absolute."

> processo. A subjetividade do pesquisador, bem como daqueles que estão sendo estudados, tornam-se parte do processo de pesquisa.

O primeiro autor deste texto, como professor, à época, de uma instituição de ensino superior da cidade de Campo Mourão/PR, em 2021, convidou seus alunos do segundo semestre dos cursos de administração, contábeis e engenharia de produção a participarem de uma atividade de estudo fora da grade regular, angariando sete voluntários. No período de sua realização, o município em questão, bem como o restante do país, ainda permanecia com restrições sanitárias devido à pandemia da Covid-19, com aulas, em geral, realizadas de maneira remota por meio de aplicativos de videoconferência. Dessa forma, os encontros foram realizados de forma remota, em quatro reuniões, com duração de duas horas cada uma, utilizando-se do serviço de videoconferência Google Meet e do aplicativo de mensagens instantâneas Telegram, ambos sem custos de utilização para os participantes (seus custos limitaram-se à energia elétrica e internet para as conexões) e com a gravação de dados, imagem e áudio autorizada por eles. Apenas três participantes não faltaram a nenhum encontro e os relatos repousam principalmente sobre o observado com estes, com a preservação plena de suas identidades, sendo todos identificados com letras (Aluno A, Aluno B, ...) quando referenciados.

A fim de identificar os signos (e com quais objetos matemáticos eles podem/intentam se relacionar) produzidos pelos alunos, os dados provindos da atividade de MM foram observados à luz da semiótica de Peirce (1986, 2017, 2020), principalmente sob o enfoque proporcionado por Santaella (1992; 2012a; 2012b; 2017; 2018), para a qual "(...) a arquitetura filosófica peirceana, de que a semiótica é apenas uma parte, constitui-se numa vastíssima fundação para qualquer tipo de investigação ou pesquisa de qualquer espécie que seja" e, para isso, ou seja, compreender semioticamente, é necessário "abrir-se para o fenômeno e para o fundamento do signo" (SANTAELLA, 2018, p. XVII e 29). Signo tal, destarte, observado na tríade peirceana *representâmen*–objeto–interpretante. As análises decorrentes dessa abordagem deram origem a textos preliminares, cuja reunião em totalidade deu origem às discussões e conclusões aqui apresentadas. A estrutura global da atividade de MM se encontra estruturada no Quadro 2.1

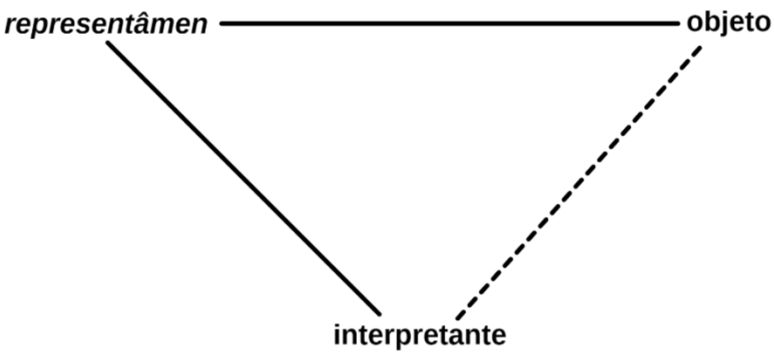
Quadro 2.1 – Quadro resumo da atividade de MM desenvolvida



Fonte: Elaborado pelos autores

É importante denotar também, a abordagem semiótica peirceana sobre a qual se assenta a pesquisa, estruturando os signos identificados na produção dos alunos na forma da tríade ***representâmen*–objeto–interpretante**. Esse interpretante (passível de entendimento em determinados contextos como significado ou imagem, mas não limitado a isso) gerado é a origem de uma nova tríade, no processo de semiose. Este estudo observa com atenção cada elemento dessa relação na qual o *representâmen*, dado seu caráter vicário, não origina, em totalidade, o objeto no interpretante (portanto a linha pontilhada), mas, conforme critérios e conhecimentos internos ao intérprete. Tal relação fica melhor explícita na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Triângulo semiótico peirceano



Fonte: Otte (2006, p. 22, Adaptado)

Os autores, a partir dos dados coletados empreenderam uma jornada em prol de construir triângulos semióticos, relacionando os *representâmens* emitidos aos objetos cujos alunos intentavam exprimir e/ou referenciar, bem como os eventuais interpretantes resultantes e possíveis de delineamento. Esses triângulos foram construídos conforme as diferentes fases da MM, bem como as relações entre elas, utilizadas pelos pesquisadores a fim de suscitar reflexões sobre o processo de construção do(s) saber(es) ocorrido durante uma atividade de MM.

Por fim, cabe lembrar o fato de todas as atividades terem sido, sob autorização formal e por escrito dos participantes, gravadas em vídeo, para posterior análise. Foram também utilizados suas produções e o histórico de mensagens trocadas entre eles em aplicativo gratuito de mensagens instantâneas. Como se procedeu detalhadamente a evolução da atividade, suas produções e comentários provenientes da análise dos dados dispõem-se na sequência.

2.6 A atividade: estrutura, diálogos, produções e análises

O início desta análise repousa sobre o ponto de partida de uma atividade de MM: o estabelecimento de um tema. Considerando-se a possiblidade de os próprios participantes realizarem a proposição de uma temática, como na proposta de Almeida e Dias (2004), e, a partir disso, o professor delinear eventuais caminhos matemáticos, o professor-pesquisador (primeiro autor deste relato) propôs a eles um momento de interlocução e discussão sobre eventuais problemas, situações e/ou curiosidades, a fim de buscar os primeiros passos de uma possível problematização.

Assim, identifique-se três grandes estágios interdependentes da atividade de MM realizada, todos considerados de importância para os autores devido à abordagem deste estudo e seu objeto: a definição do tema, os conhecimentos oriundos da compreensão primária das características do assunto, bem como a mobilização de conceitos matemáticos necessários a esse entendimento e, por fim, a construção de um modelo matemático oriundo das discussões ocorridas no decorrer dos encontros. Tal se faz necessário, adiante-se aqui como argumento, porque certas nuances do processo de semiose se observam em cada uma das fases e, sendo todas originadas da proposta de se realizar uma atividade de MM, todas denotam-se como de importância e passíveis de análise.

Em meio às proposições, a *temática*[1] de trabalho encontrou origem no seguinte conjunto de falas:

"Eu tenho uma dúvida. Eu estava... Estou procurando um emprego recentemente e encontrei algumas vagas que pedem para saber o ICMS. Eu queria saber como eu faço para calcular o ICMS." (Aluno A)

"Eu mesmo já ouvi essa palavra [ICMS], mas nunca fui me aprofundar para saber o que é." (Aluno B)

"Eu mesmo só descobri que existia o ICMS quando a minha mãe foi dar entrada para comprar o carro pelo PCD." (Aluno D)

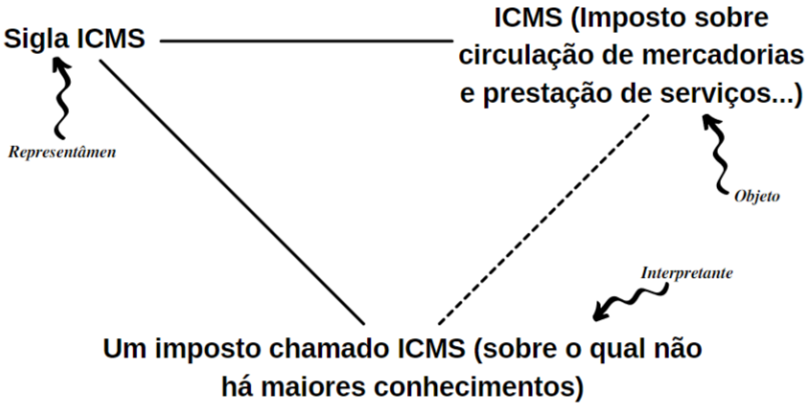
O apontamento poderia ser simplesmente respondido com uma expressão da forma: "ICMS é um imposto (...) e, para calcular, você pode proceder assim (...)". Entretanto, na MM, relembre-se, a ideia é construir conhecimento e, dessa maneira, é possível olhar para as colocações de forma sígnica. Nesse caso, pautando-se no entendimento semiótico de Peirce (1986, 2017), o ICMS *está para* (como sigla, palavra ou fala) o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação, cuja existência, fundamento e uso constituem-se como parte de sua estrutura. Contudo, quando os alunos têm contato com a sigla e relatam a ausência de conhecimentos sobre ele (alguns indicaram, inclusive, pleno e total desconhecimento da sigla), a relação sígnica

---

[1] ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação)

triangular persiste porque houve a geração de um interpretante, apesar de esse não apontar integralmente para o objeto para o qual ele está por convenção.

Figura 2.3 – Triângulo Peirceano referente ao contato com a sigla IMCS relatado pelos participantes

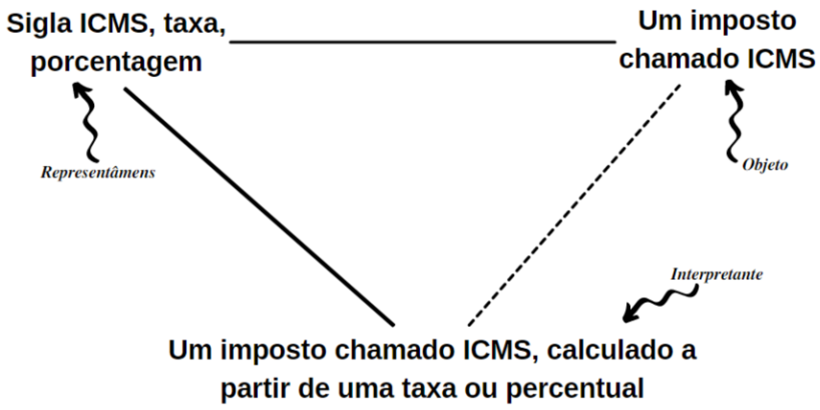


Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Esse episódio inicial, correspondente à escolha do tema integra a dinâmica da atividade de MM em ação e ilustra a definição de símbolo peirceano: “[símbolo] é o nome geral ou descrição que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e o caráter significado” (PEIRCE, 2017, p. 10). O interpretante gerado aponta para um “imposto denominado ICMS” na mente do receptor, no entanto, sem maior domínio sobre tal objeto, como representado na Figura 2.3. Essa potencialidade significativa do *representâmen* oriundo da temática proporciona um primeiro espaço para os participantes de uma atividade de MM avançarem em busca de novas (ou mais amplas) interpretações.

Cabe apontar o fato de os integrantes da atividade, pelo fato de participarem remotamente com o uso de computadores, se colocaram imediatamente e sem solicitação do professor à busca de informações na internet referentes ao imposto em questão e conversarem sobre tal. Isso denotou ser uma temática de interesse mútuo, pertinente ao pensamento expressado em Hermínio e Borba (2010), apontando, inclusive, suas dúvidas particulares, por vezes compartilhadas por mais de um deles, como: o que é, como é pago, para onde é direcionado, entre outras. Dentre os questionamentos registrados pelo professor em uma lista acessível a todos, os primeiros indícios de utilização de matemática apareceram com a necessidade de obter os valores do imposto sobre cada mercadoria e serviço, bem como sobre o cálculo de uma eventual multa por pagamento em atraso. A partir dessas indagações, o professor realizou outras mais, a fim de direcionar os trabalhos a eventuais conteúdos matemáticos. Em contexto, os alunos surgiram com palavras como "porcentagem", "tabela", "gráfico", "variação" e "cálculo".

Figura 2.4 – Triângulo Peirceano referente à percepção do imposto pelos participantes após as primeiras pesquisas



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

De maiores buscas e pesquisas, eles retornaram com novos conhecimentos teóricos, definições e questionamentos. Aqui repousa um fato significativo: passam a integrar as falas dos discentes expressões como "o valor do ICMS", "ICMS é uma taxa", "percentual de ICMS cobrado", entre outras. Há a construção de novas relações triádicas, ou seja, novos signos, cujo objeto ainda é o interpretante originado na Figura 2.3, no entanto, os *representâmen* utilizados são outros e o novo interpretante constituído aponta para objetos matemáticos, como valor, taxa e percentual, denotando um processo de semiose e resultando no triângulo semiótico presente na Figura 2.4.

A partir da Figura 2.4, é necessário denotar três aspectos quanto aos triângulos peirceanos delineados. Como Santaella (2012a, p. 65) aponta "[...] o processo de significação é sempre continuidade e crescimento. Para significar, um signo tem de se desenvolver em outro signo." A atividade de MM parece proporcionar um ambiente de novos significados e representação e tal posicionamento decorre da percepção de uso, pelos alunos, de novas maneiras de referenciar o imposto após suas recentes incursões na temática, erigindo não somente um novo signo (em sua estrutura triádica), mas alterando o próprio objeto originado no interpretante da Figura 2.3 ao ampliar sua compreensão a respeito dele. Denota-se esse movimento no objeto ao ser percebido agora como um imposto calculável a partir de uma taxa ou percentual.

Um segundo aspecto a ser pontuado é a possibilidade de questionamento quanto aos termos "porcentagem" e "taxa" serem, na verdade, interpretantes originados do *representâmen* "ICMS". No entanto, é justo perceber o uso de tais palavras pelos alunos para *referenciar* o imposto, ou seja, eles usam-nas "no lugar do objeto ICMS". Tem-se, assim, uma multiplicidade de *representâmens*, cujo conjunto, ao apontar para um mesmo objeto, proporcionarão, na mente desses participantes, a construção de um interpretante de maior complexidade, no qual, além de apontar para o objeto do signo, extrapolam seu interpretante anterior ao lhe associar novas características. O mesmo ocorre nos triângulos delineados em posterior nesta análise.

Esse questionamento do lugar de *representâmens* e interpretantes nos triângulos peirceanos construídos leva à terceira colocação. É necessário frisar a existência de limites ao expor o signo na forma de uma estrutura triangular em episódios discretos. Tal restrição é explicitada por Santaella (2012a, p. 20): "[…] em qualquer análise de um processo de signo-interpretante atual, nós necessariamente começamos sempre in *media res*[1] e só podemos traçar os elos da corrente tão minuciosa e extensivamente em qualquer direção, quanto eles forem capazes de satisfazer os propósitos que tenhamos, quando nos engajamos numa investigação ou numa interpretação particular." Assim, sendo o processo de significação ilimitado e contínuo, foram delimitadas instâncias nas quais se observou algum avanço na complexidade do interpretante presente na mente dos discentes (acessível tão somente por meio dos *representâmens* utilizados).

A ressignificação relatada não deve ser percebida como um fato de especificidade filosófica ou linguística: a MM proporciona novos interpretantes ao relacionar o mundo real e a matemática como produto das incursões exploratórias dos participantes e dessas conexões surgem não somente novas possibilidades representativas, mas a ânsia da compreensão dessas relações. Isso pode ser denotado na problematização da temática escolhida, pois os alunos empreenderam discussões livres entre eles a fim de entender nuances diversas relacionadas ao imposto em questão: correlações com o Índice de Desenvolvimento Humano, percentuais direcionados a municípios e estados, entre outros. Neste processo, variáveis matemáticas diversas começam a ganhar nomes, ou seja, passam a ser simbolizadas por uma nomenclatura: "Valor do produto", "Alíquota", "Taxa variável", "Percentual municipal" etc. Esses nomes não provêm de problemas prontos nos quais se deve determinar um valor exato como resposta, mas de novos conhecimentos oriundos do aprofundamento no tema. São, portanto, *representâmens* escolhidos por eles para apontar objetos numéricos encontrados no processo de MM.

[1] Latim: "no meio das coisas"

Um comentário a ser destacado é o do Aluno C: “Eu achei uma coisa aqui. Eu pesquisei assim: ‘O ICMS impacta o quê na sociedade brasileira?’ Aí, está escrito assim: ‘É o tributo mais prejudicial à indústria.’” Isso pôde direcionar os questionamentos do professor, a fim de conduzir o processo por caminhos nos quais determinados temas matemáticos poderiam ser desenvolvidos. Todos os voluntários em questão, apesar de cursarem diferentes cursos superiores, possuíam, em seu currículo, tópicos pertinentes à matemática financeira. Um comentário como tal propiciou ao professor espaço para questioná-los sobre o porquê da influência negativa do ICMS sobre a indústria e/ou sobre o comércio, a fim de instigar eventuais tópicos envolvendo finanças e cálculos relacionados. O Aluno C destacou, então, o fato do imposto pago ser um dinheiro cuja empresa poderia, talvez, acumular e gerar juros para um pagamento posterior. Em um processo conjunto com todos, a ideia perfez o delineamento da *problemática* e, portanto, do modelo a ser buscado: *qual valor uma empresa poderia economizar, na possibilidade de deixar de pagar o imposto mensamente e realizar quitação ao término do ano?*

Figura 2.5 – Esboços iniciais realizados em uma planilha compartilhada entre os participantes

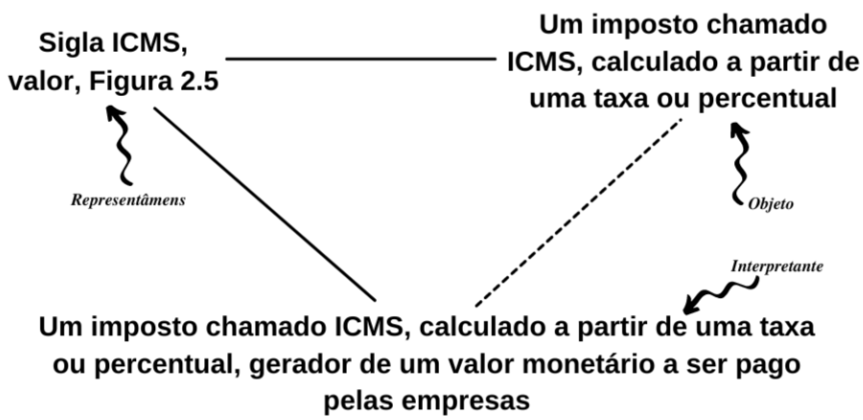
	A	B	C	D	E	F
1						
2	empresa:	R$ 350,00				
3	taxa:	0,50%				
4	icms:	18%		capital	ICMS	valor arrecadado por ano
5				R$ 350,00	R$ 63,00	R$ 756,00
6						
7					investimento	
8					R$ 0,32	-R$ 66,89

Fonte: Elaborado pelos participantes durante atividade de MM (2021).

A Figura 2.5 esboça alguns passos iniciais na compreensão da temática e como o modelo a ser buscado por eles não era específico para uma determinada empresa, arrolaram valores fictícios para tal. Além dos tópicos relacionados a percentuais, já desenvolvidos pelos participantes nas incursões iniciais, a problemática adotada aventou a busca por informações sobre juros simples e compostos, bem como tópicos de aplicativo de planilhas, escolhido para o desenvolvimento do modelo. Ressalte-se um importante detalhe: para lançar valores em uma planilha, é preciso identificá-los, em um processo de escolha e reconhecimento. Uma vez determinado esses valores, é típico nomeá-los e, uma vez mais, retornamos ao questionamento pertinente desde o Crátilo de Platão, sobre a forma de o realizar.

A nomenclatura dada aos valores, ou seja, nos nomes (como símbolos) nos passos iniciais, reflete percepções e signos na mentalidade dos discentes na fase de matematização da atividade de MM, como pode ser observado na Figura 2.5. Essa imagem da planilha poderia ser vista especificamente como um novo interpretante, no entanto, ela é um *representâmen* correspondente a parte de um entendimento de maior complexidade na mente dos participantes a respeito do imposto, ao perceberem-no como relacionado a valores monetários. Se tomada dessa forma e em conjunto com outros *representâmens* identificados, é possível construir um novo triângulo semiótico, originado da continuidade do processo de semiose relacionado à ampliação dos conhecimentos dos participantes quanto aos aspectos monetários relacionados ao imposto em estudo, conforme a Figura 2.6.

Figura 2.6 – Triângulo Peirceano referente à visão do ICMS como um valor a ser pago pelas empresas



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

É de interesse, em prosseguimento, compreender a forma pela qual as relações entre a linguagem nativa e os valores evolui em direção à construção de um modelo matemático, se há uma ressignificação dos nomes/símbolos utilizados em direção a um passo evolutivo de abstração, concernente tanto com o conhecimento matemático adquirido passo a passo como com o processo de semiose inerente ao encadeamento da atividade de MM. A busca começou seu processo de melhoria pela compreensão dos resultados da aplicação do valor exemplificado na Figura 2.5 ao términco do ano e, para tanto, o professor procedeu de maneira similar à maiêutica socrática, a partir da sugestão, por parte dos participantes, do uso de uma fórmula para o cálculo de juros compostos ($\text{Montante} = \text{Capital} \times (1 + \text{Taxa})^{\text{Período}}$):

“Qual era o capital?” (Professor)

“63,00.” (Aluno D)

“63,00. E esse capital ficará investido por quantos meses?” (Professor)

“11.” (Todos os alunos)

“E a que taxa?” (Professor)

“0,5%” (Aluno B)

É necessário denotar o fato de os participantes já conhecerem a fórmula[1] utilizada para o cálculo de juros compostos devido ao fato de todos já terem cursado a disciplina de matemática financeira, no entanto, necessitarem de auxílio para a identificação dos valores. Isso explicita a desconexão existente, por vezes, entre as fórmulas prontas em sala de aula e os problemas reais. O processo acima auxiliou os participantes a criar significado para as palavras constantes das fórmulas, criando signos ao remeter os *representâmens* (Capital, Taxa etc) a objetos (valores propostos) gerando interpretantes (oriundos de uma conexão simbólica) em suas mentes, possibilitando a recriação da planilha da Figura 2.7

Figura 2.7 – Reorganização de ideias realizada na planilha compartilhada

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		mês	vendas	ICMS (Capital)	taxa	período	valor ao término do ano (montante)
3		janeiro	R$ 350,00	R$ 63,00	0,50%	11	R$ 66,55
4							

Fonte: Elaborado pelos participantes durante atividade de MM (2021).

O processo foi estendido para os demais meses, até o término do ano, com montantes aleatórios de vendas e manutenção do percentual de ICMS e taxa, proporcionando o cálculo da diferença entre o pagamento mensal dos valores referentes aos impostos e à manutenção do valor aplicado com fins ao pagamento das cifras ao término do ano. Tais desenvolvimentos exauriram o espaço de tempo do terceiro encontro e exaltaram positivamente os acadêmicos quanto ao cálculo desenvolvido, no entanto, ainda não fora criado um modelo com valores substituíveis, em um espaço simbólico superior ao pertinente ao término desta tabela. Isso ocorreria na próxima e última reunião, na qual buscar-se-ia elevar ao máximo a abstração do processo.

A busca de um eventual modelo para obter o retorno gerado pelo pagamento anual do imposto ICMS em vez de mensal por um empresário (caso possível) levou os participantes a desenvolverem uma planilha em conjunto com valores fictícios, mês a mês, calculando o valor

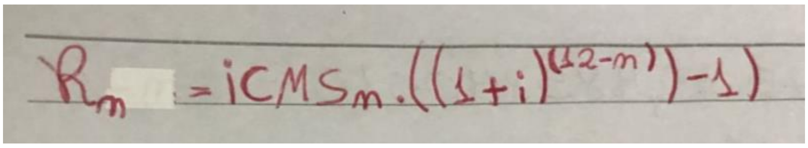
[1] A utilização de fórmulas neste ponto integra a fase de compreensão e estruturação dos dados, ainda não se constituindo em parte do modelo.

gerado pela aplicação do valor devido de ICMS no mês até o fim do ano. A partir de então, o professor questionou-os a respeito de como obtiveram esse valor e qual a relação entre as fórmulas de juros compostos utilizadas em cada linha da planilha com referência ao mês, ao percentual de imposto etc.

O professor passou então a indagar-lhes, a fim de proporcionar um ambiente no qual pudessem abstrair, aos poucos, a estrutura matemática simbólica subjacente à produção realizada. Para isso, direcionou perguntas como: “Como foi calculado o valor gerado para o mês de janeiro? Qual a diferença para o mês de fevereiro?” “Neste mês, se o valor fosse outro, como faríamos?” “Como eu poderia chamar este e aquele valor se eu não soubesse, por hora, exatamente quanto seriam?” E, dessa forma, os participantes discutiam entre si em busca de uma compreensão mais rica.

Passo a passo, os discentes começaram a expressar algum entendimento quanto à sistemática utilizada de forma numérica, nomeando valores e percebendo a relação do exponencial utilizado na expressão com o número do mês, tomando janeiro como 1 até dezembro como 12. Para tanto, realizaram anotações à parte, as quais foram compartilhadas com o professor por imagem e entre as quais traz-se a Figura 2.8, na qual é identificável o modelo para cálculo do retorno do valor de ICMS mensal aplicado até o final do ano correspondente.

Figura 2.8 – Modelo de retorno *R* proporcionado pela aplicação do valor de ICMS

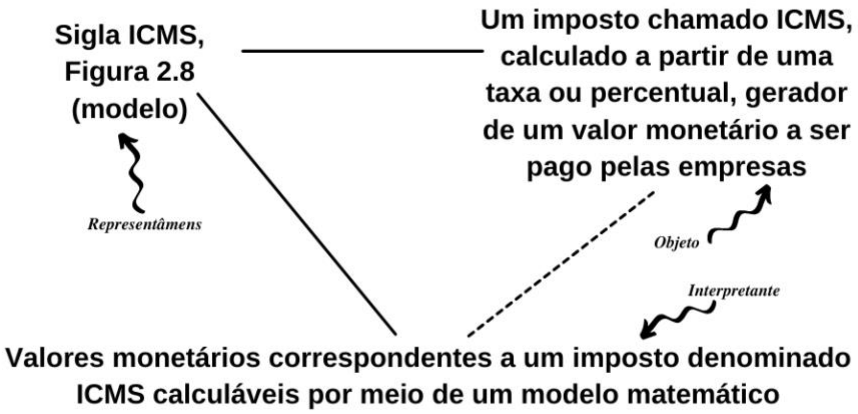


Fonte: Elaborado em conjunto pelos participantes durante atividade de MM (2021).

Após debaterem entre si e aceitarem a expressão acima, os participantes foram convidados a discutir a respeito da validade do modelo matemático obtido, em uma postura crítica. Além disso, procuraram validar a relação, realizando os cálculos por maneiras diversas, inclusive em calculadoras financeiras.

Observando o modelo obtido sob a ótica da semiótica peirceana, é claro percebê-lo como um signo completo: um símbolo apontando para o retorno *R* (valor obtido como rendimento da aplicação do valor do imposto) capaz de gerar um interpretante na mente dos participantes. Além disso, é possível delinear um novo triângulo semiótico relacionado à compreensão do imposto em estudo e sua relação com o modelo obtido, como na Figura 2.9.

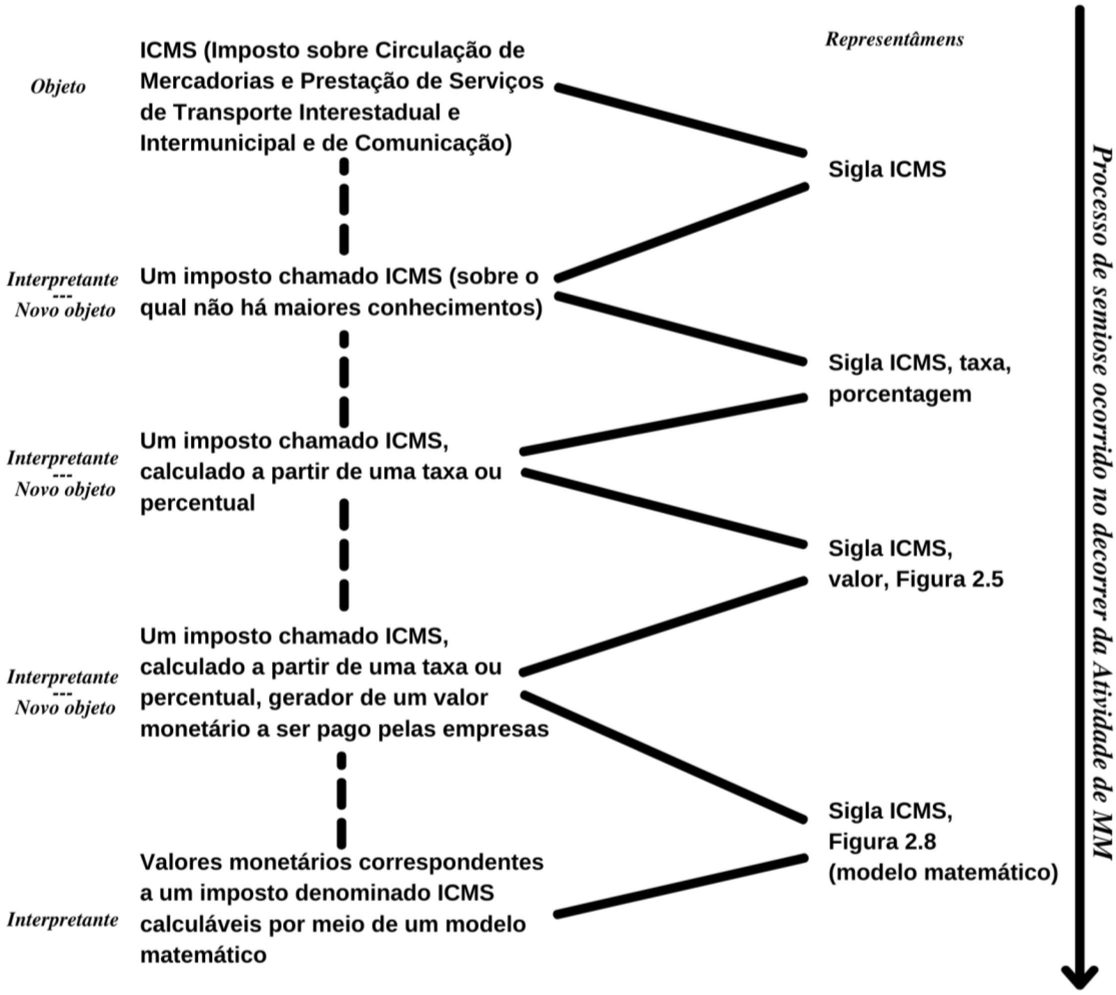
Figura 2.9 – Triângulo Peirceano referente à visão do ICMS como um valor a ser pago pelas empresas e calculável a partir de um modelo matemático



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Com base na ideia do filósofo (da semiose como uma geração contínua de signos), é plausível apontar essa produção persistente durante toda a atividade de MM, culminando na construção de um signo mais complexo na forma de um modelo. Entenda-se aqui o termo “complexo” como uma reunião de outros símbolos desenvolvidos no decorrer das reuniões, gerando um interpretante final, resultado da conjunção de múltiplos interpretantes oriundos de um processo contínuo de ressignificação. Dessa maneira, entende-se a capacidade de utilização dessa alternativa pedagógica para o ensino da matemática, pois, como se observa, ela proporciona a criação em conjunto (coletivamente) de conhecimento matemático a partir de e com elementos da vida real.

Figura 2.10 – Processo de semiose durante a atividade de MM



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A estrutura[1] presente na Figura 2.10 sintetiza o processo de semiose decorrido em torno do termo (ou sigla) ICMS e *representâmens* a ele relacionados. Em um primeiro momento, ICMS como *representâmen* gerou um interpretante apontando para um imposto, mas sobre o qual os participantes relataram pouco conhecimento. Verifique-se uma quebra do significante esperado por aquele cujo saber detém a noção da sigla como imposto: não se trata de um interpretante errôneo, mas moldado à bagagem cognitiva do intérprete. No entanto, ele não persiste nessa imagem, porque, ao se tornar objeto de reflexão do participante, ele compõe características do objeto e, ao expressar-se novamente, por meio deste mesmo representante, ele vem carregado de ideias novas, buscando, no receptor, a geração de conceitos como imposto

[1] Até o momento, a tríade peirceana tem sido apresentada neste texto com o *representâmen* e o objeto nos vértices superiores do triângulo, respectivamente, e o interpretante no inferior. No entanto, para melhor percepção visual do processo de semiose decorrido durante a atividade de MM, na Figura 2.10, os triângulos são apresentados com dois vértices à esquerda indicando o objeto e o interpretante, respectivamente, e o vértice à direita, o *representâmen*.

em taxa percentual. Na evolução dos signos durante o processo de semiose, observa-se uma evolução até o símbolo matemático na Figura 2.8, pois ICMS, no modelo construído não representa mais o imposto em si, mas o valor eventual a ser pago ou, no caso, a ser investido. O termo não aponta mais um único objeto imutável, mas um valor variável e substituível.

2.7 Considerações finais

A atividade cujo relato foi objeto deste texto teve princípio no interesse em nuances educacionais no âmbito da utilização da MM como alternativa pedagógica, procurando identificar indícios da construção de conhecimento matemático, bem como de outros, no âmbito das atividades de MM a partir dos signos originados nestas, em uma perspectiva passível de ser classificada como cognitiva, quando percebida dentro das classificações propostas por Kaiser e Srariman (2004). Para o intento, optou-se pelas lentes teóricas proporcionadas pela semiótica peirceana, com seu entendimento de signo como uma relação tríplice, bem como em sua ideia de semiose como um processo de autogeração contínua de novos signos, a fim observar as produções sígnicas dos alunos, considerando a maneira como os objetos matemáticos são expressos no decorrer de uma atividade de Modelagem Matemática.

O processo de semiose foi perceptível no decorrer de toda a atividade de MM, desde a escolha do tema, passando pelas incursões em demandas específicas, até a concepção de um modelo ao fim. Denotou-se a aquisição/construção de conhecimentos matemáticos alinhada a uma geração contínua de signos, entendendo esse processo sígnico como semiose, uma base para desenvolvimento cognitivo na concepção de Drigo (2007). As incursões realizadas em busca de compreender, estruturar e problematizar a temática revelou novos sentidos a um *representâmen* (a sigla ICMS) com diversos significados em potencial, mas ainda em processo de descobrimento, de forma coerente ao entendimento das potencialidades de um signo para Peirce (1986, 2017) e Santaella (1992, 2012a, 2012b, 2017, 2018, 2020).

O *representâmen* inicial associou-se a outros durante a atividade de MM, como expressado na construção de triângulos peirceanos, nos quais o objeto é cada vez mais complexo devido expansão conceitual dos interpretantes gerados. Esses novos sentidos expressaram uma ligação não somente com a matemática, mas com uma gama de conceitos multidisciplinares relacionados à vida do educando. Esse passeio semiótico leva até o símbolo matemático propriamente dito, como expresso na última imagem, em um percurso resultado de desenvolvimentos realizados pelos próprios discentes em ação (sob supervisão do professor) na atividade de MM, como já observado nas pesquisas de Almeida e Dias (2004), Almeida e Silva (2017) e Veronez (2009).

Os entendimentos resultantes da pesquisa posicionam, para os autores, a MM, desenvolvida como alternativa pedagógica na forma de atividade, como propiciadora de um espaço no qual os encaminhamentos, procedimentos e conceitos mobilizados são motivação e base para a compreensão, ressignificação e geração de signos, desde a situação inicial até a solução obtida à problemática. Ou seja, houve a expressão de indícios da construção de conhecimento matemático nos signos expressos e sua relação com os objetos matemáticos aos quais se referiam, dado o processo de semiose identificado. Caberia, talvez, o questionamento a respeito da relação entre essa produção sígnica (e sua comunicação) e a própria estrutura epistemológica em cujo arcabouço ela se originou. No tocante a tal ensejo, fica, destarte, a possibilidade de um novo estudo.

2.8 Referências

ALMEIDA, L. M. W. de. Prefácio. *In:* MEYER, J, F, da C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS; M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 17, n. 22, set. 2004.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. A ação dos signos e o conhecimento dos alunos em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 31, n. 57, p. 202-219, abr. 2017.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. 2. reimp. São Paulo: Contexto, 2019.

ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação matemática. *In:* ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: **REUNIÃO ANUAL DA ANPED**, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 4. ed. 1. reimp. São Paulo: Contexto, 2018.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa**: segundo a visão fenomenológica. São Paulo: Cortez, 2011.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem no ensino da matemática**. 5. ed. 5. reimp. São Paulo: Contexto, 2019.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1997.

DINIZ, L. do N. **Leitura, construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso das tecnologias de informação e comunicação**. Tese (Doutorado em Ciências da Educação). Universidade do Minho, Portugal, 2016.

DRIGO, M. O. **Comunicação e cognição**: semiose na mente humana. Porto Alegre, Sorocaba: Sulina, Eduniso, 2007.

EPSTEIN, I. **O signo**. 7. ed. 4. reimp. São Paulo: Ática, 2004.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 3, n. 4, 1995.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

HERMÍNIO, M. H. G. B.; BORBA, M. de C. A noção de interesse em projetos de modelagem matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 12, n. 1, p. 111-127, 2010.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, Vol. 38(3), p. 302-310, 2006.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da Modelagem Matemática na Educação Matemática**. (Tese de doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis/SC. 2012.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MADRUGA, Z. E. de F. *et al*. Cognição, semiótica e modelagem: articulações possíveis. **Contexto & Educação**, Editora Unijuí, Ijuí – RS, ano 31, n. 100, p. 4-32, set.-dez. 2016.

MEYER, J, F, da C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MONTENEGRO, M. A. de P. Linguagem e conhecimento no Crátilo de Platão. **Kriterion**, 48 (116), dez. 2007.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. do C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Unijuí, 2007.

NÖTH, W. **A semiótica no século XX**. 3. ed. São Paulo: Annablume, 2005. (E).

NÖTH, W**. Panorama da semiótica**: de Platão a Peirce. São Paulo: Annablume, 1998. (E).

OTTE, M. Mathematical Epistemology from a Peircean Semiotic Point of View. **Educational Studies in Mathematics**, 61(1-2), p. 11–38, 2006. DOI:10.1007/s10649-006-0082-6.

PEIRCE, C. S. **La ciencia de la semiotica**. Buenos Aires: Nueva Visión, 1986.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 4. ed. 3. reimp. São Paulo: Perspectiva, 2017.

PEIRCE, C. S. Tradução de excertos de escritos de C. S. Peirce. *In:* SANTAELLA, L. (Org.). **Charles Sanders Peirce**: excertos. São Paulo: Paulus, 2020.

PLATÃO. **Crátilo**. 1. ed. São Paulo: Paulus, 2014. (Trad. VIEIRA, C. de. O.).

RAMOS, D. C.; ALMEIDA, L. M. W. de. Interpretação semiótica em atividades de modelagem matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 35, n. 71, p. 1391-1415, dez. 2021.

ROCHA, M. L. da; AGUIAR, K. F. de. Pesquisa-Intervenção e a produção de novas análises. **Psicologia: Ciência e Profissão**, Conselho Federal de Psicologia, p. 64-73, 23 (4), 2003.

SANTAELLA, L. **A assinatura das coisas**: Peire e a literatura. Rio de Janeiro: Imago, 1992.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. 1. ed. 4. reimp. São Paulo: Cengage Learning, 2012a.

SANTAELLA, L. (Org.). **Charles Sanders Peirce**: excertos. São Paulo: Paulus, 2020.

SANTAELLA, L. **O que é semiótica**. 1. ed. 34. reimp. São Paulo: Brasiliense, 2017.

SANTAELLA, L. **Percepção**: fenomenologia, ecologia, semiótica. 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012b.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**: publicidade, arte, mídia, vídeos, literatura, instituições. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. (Tese de doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR. 2013.

VERONEZ, M. R. D. Modelagem matemática como alternativa pedagógica na educação básica. **X EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática**, p. 1013-1020, 2009.

VERONEZ, M. R. D.; ALMEIDA, L. M. W. de. Sobre o papel dos signos em atividades de MM. **REnCiMa**, v.8, n.3, p.142-157, 2017

3 Semiótica e epistemologia na produção sígnica oriunda de uma atividade de modelagem matemática

3.1 Resumo

Os educadores matemáticos possuem, hoje, à mão, diversas formas e maneiras em prol da tarefa de proporcionar um espaço de construção de conhecimento junto a seus alunos. Em meio a essas opções, esse estudo dirige seu olhar à Modelagem Matemática (MM), uma alternativa na qual, a partir de situações originadas no mundo real e/ou ambiente cultural dos participantes, procura-se, com o auxílio de um ferramental matemático, compreender, analisar e estruturar os dados obtidos, além de buscar um eventual modelo como solução. Este texto expõe os percursos desenvolvidos por um grupo de acadêmicos de cursos diversos em uma atividade de MM e analisa as produções sígnicas oriundas dessa prática a partir da trama semiótica peirceana (Charles Sanders Peirce) e de triângulos epistemológicos, na forma proposta por Heinz Steinbring, a fim refletir sobre quais relações podem ser evidenciadas entre os objetos matemáticos suscitados pelos alunos e os signos por eles manifestos. No decorrer da ação, foi observado o potencial de construção evolutiva de conhecimento no plano epistemológico, evidenciado pelo avanço na representação simbólica matemática, conforme os alunos progrediam na experiência educativa. A pesquisa teve por conclusão o fato de a MM possibilitar o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e outros nos participantes por meio das interações entre objetos reais e conceitos matemáticos, a partir da emissão, significação e reestruturação de signos em todo o decurso da atividade de MM.

Palavras-chave: Educação matemática; Semiótica peirceana; Epistemologia; Triângulos epistemológicos.

3.2 Introdução

Para um educador matemático, como assinalam Fiorentini e Lorenzato (2012), a matemática é concebida como meio/instrumento de importância à formação, tanto intelectual quanto social de crianças, jovens e adultos. Ainda segundo eles, a Educação Matemática, quando em pesquisa, tem, entre seus interesses, os processos pedagógicos relativos à apropriação/construção do saber matemático. Nesse espectro, é possível identificar trabalhos e atuações sobre um modo de ensinar (e/ou aprender) matemática denominado Modelagem

Matemática, principalmente a partir da década de 1980, no Brasil (ALMEIDA, VERTUAN, 2014).

Quanto à definição dessa prática, é possível veicular o entendimento de Almeida e Dias (2004) e Almeida e Silva (2014), para quem a MM seria uma *alternativa pedagógica* na qual, a partir da abordagem de problemas não matemáticos (em geral), utiliza-se de conceitos matemáticos para a compreensão e estruturação das eventuais soluções buscadas. Conforme Veronez (2013), a MM, enquanto atividade com discentes, parte de uma situação pertencente a um contexto exterior à matemática e procura buscar resposta a um questionamento oriundo dessa situação. Segundo a autora, na transição entre esses pontos surgem as oportunidades para o educador ensinar conceitos matemáticos e estabelecer relações entre a matemática e a situações estudada.

Nesse processo de compreensão e desenvolvimento de possíveis respostas aos problemas adotados, diversos aspectos podem ser destacados ao interesse da pesquisa educacional e um deles, interesse também deste trabalho, é aquele desenvolvido sob a ótica da semiótica, como nos trabalhos de Almeida e Dias (2004), Almeida e Silva (2012, 2017), Silva e Veronez (2014) e Veronez (2013). A semiótica, conforme Abbagnano (2021), é, de forma genérica, uma forma sistemática de reflexão sobre os signos, vista a partir do séc. XX como uma disciplina autônoma dos quadros acadêmicos.

Para esta pesquisa, a palavra signo tem o caráter e a estrutura delineados pelo trabalho do filósofo e matemático americano Charles Sanders Peirce (1839-1914). Na definição do autor, signo "[...] é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém" (PEIRCE, 2017, p. 46). A importância desse conceito é evidenciada por Steinbring (2006, p. 133, tradução nossa), para quem, "em geral, a importância dos signos para o pensamento humano é incontestável e fundamental. Sem signos, nenhum pensamento humano e nenhuma generalização mental existiriam."[1] Se a MM é uma alternativa pedagógica para ensino, aprendizagem e construção de conhecimentos e isso envolve o próprio pensar humano, é justo pensar nas eventuais relações entre os signos e a matemática e seus conceitos.

O educador matemático alemão Heinz Steinbring estendeu a possibilidade do olhar direcionado a esses signos quando da produção proveniente de atividades matemáticas e destacou dois papéis desempenhados por um *signo matemático*:

> (1) Uma função semiótica: o papel do signo matemático como 'algo que está para alguma outra coisa'.

[1] "In general, the importance of signs for human thinking is uncontested and fundamental. Without signs, no human thinking and no mental generalizations would exist."

> (2) Uma função epistemológica: o papel do signo matemático no quadro da constituição epistemológica do conhecimento matemático." (STEINBRING, 2006, p. 134, tradução nossa) [1]

Ou seja, o autor traz à tona o fato de os signos possuírem características relacionadas também ao caráter epistemológico dos entes originadores dessas representações. E, destaca que a formação de um conceito matemático se organiza a partir de relações entre "*símbolos com operações* e *situações de referência pretendidas*"[2] (STEINBRING, 2007, p. 100, grifos do autor, tradução nossa).

No panorama descrito, o objetivo central deste estudo é analisar as relações evidenciadas entre objetos matemáticos suscitados pelos alunos e signos manifestados por eles longo do desenvolvimento de uma atividade de MM. Em prévia aos aspectos metodológicos adotados, bem como da atividade em si e as análises decorrentes, segue uma breve ambientação a respeito dos pilares teóricos sobre os quais desenvolveu-se a pesquisa.

3.3 Da Modelagem Matemática

A modelagem como ferramental matemático profissional precede a MM em seu aspecto educacional e consiste em um processo de matematização de uma situação com fins a seu entendimento e eventual previsão na forma de um modelo matemático. Para Basanezzi (2018, p. 20):

> [...] Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. [...] A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas.

A MM enquanto possibilidade para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos possui desde aspectos mais próximos à matemática aplicada, como na visão de Biembengut e Hein (2019), até abordagens desvinculadas de um currículo fechado, em busca do aprendizado de tópicos matemáticos entendidos como "instrumentos necessários para se aprender sobre o problema" no posicionamento de Meyer, Caldeira e Malheiros (2019, p. 15). Independente da abordagem, a MM enquanto aspecto educacional atua no atendimento dos dois propósitos de uma educação matemática indicados por Blum e Niss (1991, p. 41, tradução nossa):

---

[1] "[...] the characterization of the role of mathematical signs requires the consideration of two functions: (1) A semiotic function: the role of the mathematical sign as 'something which stands for something else'. (2) An epistemological function: the role of the mathematical sign in the frame of the epistemological constitution of mathematical knowledge."

[2] "[...] symbols with operations and intended situations of reference".

> (a) prover os alunos com conhecimentos e habilidades sobre a matemática como uma disciplina em si;
>
> (b) prover os alunos com conhecimentos e habilidades sobre (um ou mais) outros assuntos, para os quais se supõe que a matemática tenha serviços efetivos ou potenciais a oferecer.[1]

A amplitude de possibilidades à execução do intento exposto anteriormente conduz a formas variadas de trabalho conforme o educador, bem como diferentes caracterizações e conceitualizações da MM, conforme observam Almeida e Vertuan (2014). Para o desenrolar deste trabalho, a MM é vista pela perspectiva de Almeida e Dias (2004) e Almeida e Silva (2014), para as quais trata-se de uma alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Para estas autoras, bem como para Almeida e Vertuan (2014) e Veronez (2013), as dinâmicas de aprendizagem em MM envolvem conceitos matemáticos na busca de uma solução para um problema não-matemático, existindo um conjunto de procedimentos e conceitos inter-relacionados no trajeto entre a situação inicial e a final.

Corrobora esse aspecto a caracterização de uma *atividade de MM* realizada por Almeida, Silva e Vertuan (2019, p. 12), ao descreverem-na em "[...] termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final." Além disso, esses autores identificam *fases* dessa atividade de MM. A primeira delas consiste na *inteiração*, na qual os participantes têm contato com a problemática e coletam dados, tanto qualitativos quanto quantitativos, buscam formular um problema e definir metas à sua solução. Após a identificação e estruturação da situação-problema, vêm as investidas em prol de trazer à linguagem matemática os dados e informações obtidos em linguagem natural, inclusive com a utilização de símbolos, em uma ordem crescente de *matematização*. Com fins a descrever e analisar a situação, bem como averiguar soluções às questões propostas, segue-se a *resolução*. Por fim, há o caráter crítico da MM, na fase de *interpretação dos resultados e validação*, na qual procede-se com a análise dos produtos oriundos da atividade e se inquire a respeito da validade dos resultados alcançados. É importante frisar o fato de essas fases serem interdependentes e não possuírem ordem e/ou delimitações fechadas, pois, a título de exemplo, a inteiração com novos dados a respeito da problemática pode ocorrer em todo o percurso da atividade.

---

[1] "(a) to provide students with knowledge and abilities concerning mathematics as a subject in itself; (b) to provide students with knowledge and abilities concerning (one or more) other subjects, to which mathematics is supposed to have actual or potential services to offer.

Quanto ao tema a ser trabalhado pelos discentes, dentro do qual se estabelecerá um questionamento ou necessidade a ser buscada uma solução, existe a possibilidade de escolha tanto por parte do professor, quanto do aluno. Hermínio e Borba (2010) atentam, no entanto, para a necessidade de a escolha do assunto estar em consonância com os gostos e anseios dos alunos. Uma opção bastante viável é a utilização de atividades de MM com a escolha da temática ocorrendo em um processo gradual de transição entre professor e alunos. Tal é a proposta de Almeida e Dias (2004), para as quais, em um primeiro momento, o professor propõe uma situação-problema e trabalha dedução, análise e utilização de modelos matemáticos; mais à frente, o professor sugere outra situação-problema, divide os educandos em grupos e estes formulam hipóteses de simplificação, deduzem e validam modelos a partir de dados fornecidos; e, por fim, os próprios alunos propõem sua situação-problema, desenvolvendo-o em grupos, com a orientação do professor.

3.4 Da Semiótica Peirceana e Triângulos Epistemológicos

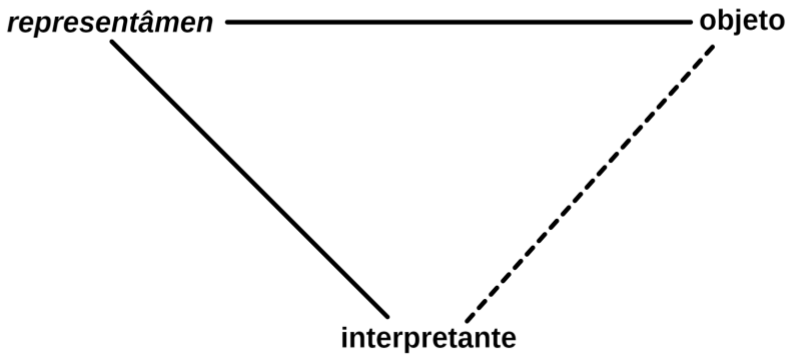
Conforme Nöth (1995), a semiótica (Teoria Geral dos Signos) é um assunto pertinente às indagações da humanidade desde o diálogo platônico *Crátilo*, no qual se perfaz uma discussão a respeito da origem dos nomes e sua denominação tem origem nas raízes gregas *semeîon* (signo) e *sêma* (sinal ou signo). A trajetória histórica da disciplina conta com filósofos, linguistas e pensadores, entre os quais destaca-se aqui Charles Sanders Peirce, cuja semiótica é de interesse às abordagens deste estudo.

Para Peirce (2019), um entendimento lógico da realidade poderia assentar-se em categorias universais de experiência e pensamento: qualidade, relação e representação. A presença de tríades na filosofia peirceana era uma constante e grande parte das estruturas desenvolvidas pelo matemático e filósofo apresentam semelhante característica. Denotar-se-á aqui sua contribuição especialmente no espectro de definição dos signos, para quem "um signo, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém" (PEIRCE, 2019, p. 46, grifo do autor). A ideia originada pelo *representâmen* no receptor do signo foi denominada *interpretante* e ele refere-se a um *objeto*.

O caráter amplo e ilimitado do signo peirceano toma forma pela possibilidade de o signo denotar objetos perceptíveis, imagináveis ou mesmo inimagináveis (de essência abstrata) (PEIRCE, 2019) e leva ao contexto afirmado por Santaella (2018, p. 12), para a qual "Pela qualidade, tudo pode ser signo, pela existência, tudo é signo, e pela lei, tudo deve ser signo. É por isso que tudo pode ser signo, sem deixar de ter suas outras propriedades."

Para organizar a amplitude de sua ideia, Peirce (1986, 2019) desenvolveu classificações diversas para os signos, conforme se relacionavam a partir deste ou daquele olhar; por exemplo, em referência a si mesmo, à sua indicação ou nos efeitos produzidos em seus receptores. Ao entendimento deste estudo, faz-se particularmente importante a sua ideia de um signo quando de sua relação com o significado intentado, ou seja, da teoria da interpretação. Nesse aspecto, um determinado sentido ou significado pode ser atribuído a um signo como lei, como definição ou a partir do uso e, nesse caso, o signo é referenciado como símbolo (Figura 3.1).

Figura 3.1 – Triângulo semiótico peirceano



Fonte: Otte (2006, p. 22, Adaptado)

A relevância dessa ideia tem lugar quando se refere a signos matemáticos (símbolos) cujo significado é atribuído por uma externalidade não prontamente ligada à sua forma ou relação direta como o objeto denotado. Essa lei de denotação significativa

> [...] é uma abstração, mas uma abstração que é operativa. Ela opera tão logo encontre um caso singular sobre o qual agir. A ação da lei é fazer com que o singular se conforme, se amolde à sua generalidade. É fazer com que, surgindo uma determinada situação, as coisas ocorram de acordo com aquilo que a lei prescreve (SANTAELLA, 2018, p. 13).

Silva e Veronez (2014) auxiliam na compreensão da possibilidade de abordar a MM sob um olhar semiótico ao destacarem o uso de representações (na busca de soluções ao problema oriundo de uma situação inicial) no intento de comunicar algo da parte de seu emissor, realizadas de forma sígnica (determinando tentativas de acessos a ideias). Estas seriam oriundas da realidade na qual a problemática se encontra até as adoções simbólicas (representativas) utilizadas para expor conceitos matemáticos provenientes da abordagem da situação e/ou geradas como modelo ao entendimento e solução das questões propostas.

Esse aspecto representacional nas atividades de MM também é denotado em Almeida e Silva (2014, p. 628), associando à situação inicial (problemática)

> [...] diversas representações, como: textos, tabelas, diferentes formas de gráficos etc. Já a situação final – modelo matemático – pode ser compreendida se considerarmos suas diferentes representações, como: a algébrica, a gráfica, a geométrica.
>
> Os diferentes procedimentos a que nos referimos fazem com que as atividades de modelagem matemática viabilizem, aos alunos, a manipulação de diferentes representações dos objetos matemáticos.

Heinz Steinbring traça uma conexão entre os pontos abordados anteriormente ao perceber o processo de ensino e aprendizagem da matemática como "[...] uma variedade de construções matemáticas e interpretações" (STEINBRING, 2005, p. 7, tradução nossa)[1] em busca da construção de um novo conhecimento. Ou seja, a partir das bases lógicas oriundas da semiótica peirceana, ele desenha uma nova configuração, também triádica (mais bem detalhada à frente), observando as dinâmicas sígnicas especificamente dentro do ensino e aprendizagem da matemática.

Steibring (2005) entende o aprender matemática como algo diverso de implantar um conhecimento totalmente novo na mente dos discentes, mas elevar o já existente por meio de novas relações. Tal ideia se desdobra em questionamentos sobre a própria produção sígnica dos alunos: os símbolos e signos utilizados pela comunidade matemática (acadêmica e/ou profissional) seriam resultado de todo um histórico dessa comunidade em torno da temática. Talvez tais símbolos e signos não representem, de imediato, àquele em processo de aprendizagem, "um significado" ou "o significado" atribuído por um matemático profissional ou acadêmico. Para ele, em cada estudante há um panorama epistemológico e cultural prévio e isso influencia seu aprendizado.

> O conhecimento matemático não é revelado pela mera leitura de signos, símbolos e princípios matemáticos. Eles têm de ser interpretados e essa interpretação requer experiência e conhecimento implícito: não se pode entender esses signos sem pressupostos. Esses conhecimentos implícitos, bem como as atitudes e maneiras de usar o conhecimento matemático, são essenciais em uma cultura. Portanto, o ensino e compreensão da matemática requer um ambiente cultural (STEINBRING, 2005, p. 17, tradução nossa)[2].

Se é necessário abordar o espaço cultural no qual os signos são desenvolvidos e utilizados pelos discentes ao aprenderem matemática, remete-se a questão a dois pontos: um interpretativo, relacionado à semiótica e à compreensão do signo como algo para alguma outra coisa; e um epistemológico, no qual as produções e interpretações sígnicas possuem relação

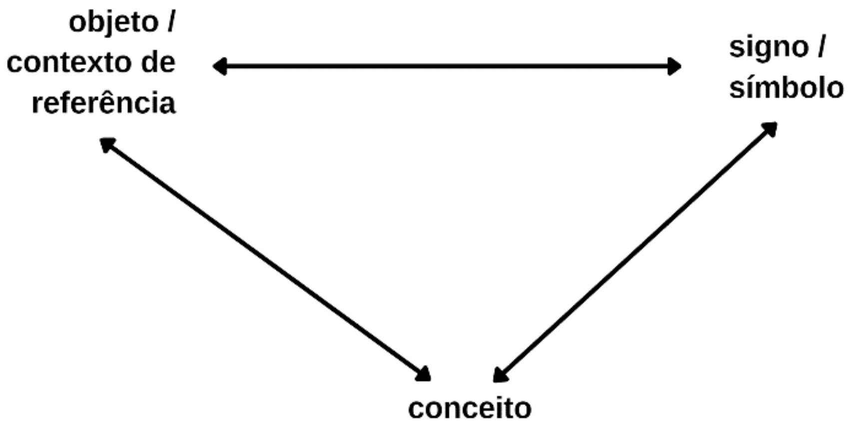
---

[1] "[...] the practice of teaching and learning mathematics is characterizaed by a variety of mathematical constructions and interpretations."

[2] "Mathematical knowledge cannot be revealed by a mere reading of mathematical signs, symbols, and principles. They have to be interpreted, and this interpretation requires experiences and implicit knowledge - one cannot understand these signs without any presuppositions. Such implicit knowledge, as well as atti-tudes and ways of using mathematical knowledge, are essential within a culture. Therefore, the learning and understanding of mathematics requires a cultural environment."

direta com o conhecimento prévio e em desenvolvimento dos educandos. Essa é a ideia de Steinbring (1998, 2005, 2006) ao propor seu triângulo epistemológico (Figura **3.2**), com fins a compreender a produção sígnica procedente de atividades de ensino de matemática, verificando o conceito matemático a ser transmitido e as bases de conhecimento sobre as quais se assenta essa manifestação.

Figura 3.2 – Triângulo epistemológico



FONTE: Steinbring (2006).

Para Steinbring (2006), esse triângulo epistemológico modela a mediação semiótica entre “signo/símbolo” e “objeto/contexto de referência”, determinada por condições epistemológicas do conhecimento matemático. Ademais, o autor ressalta o fato de os três pontos de referência formarem um sistema em equilíbrio e de suporte recíproco. De tal forma,

> [...] o triângulo epistemológico é usado para modelar a natureza (invisível) do conhecimento matemático por meios de representar relações e estruturas que o aluno constrói durante a interação. Além disso, pode-se traçar uma sequência de acordo de triângulos epistemológicos correspondentes a um processo de interação ou aprendizagem que tenta refletir o desenvolvimento das interpretações feitas pelo sujeito.[1] (STEINBRING, 2006, p. 136, tradução nossa)

De acordo com Veronez (2013), o triângulo Figura **3.2** considera as conexões objeto/contexto de referência – signo/símbolo e, a um mesmo tempo, o conceito suscitado nessa inter-relação, consideradas as condições epistemológicas dos conhecimentos do sujeito. A autora explicita o fato das limitações acerca desses conhecimentos impactarem:

a) A própria conexão objeto/contexto de referência – signo/símbolo; mas, em especial,

[1] “[...] the epistemological triangle is used for modeling the nature of the (invisible) mathematical knowledge by means of representing relations and structures the learner constructs during the interaction. Furthermore, one can draw up an according sequence of epistemological triangles corresponding to a process of interaction or learning which tries to reflect the development of the interpretations made by the subject.”

b) A construção do conhecimento, dada a dificuldade de conexão apresentada em a).

Outro importante aspecto destacado por Veronez (2013, p. 55) é o aspecto dinâmico da abordagem triangular construída por Steinbring (1998, 2005, 2006), pois "[...] nenhum dos elementos do triângulo é estável e fixo. À medida que o sujeito ativa seus conhecimentos, aspectos relativos as suas condições epistemológicas e comunicativas alteram os elementos desse triângulo, dando-lhe um caráter de dinamicidade."

A importância de um olhar epistemológico dentro de um contexto de ensino e aprendizagem da matemática e sua utilização para a pesquisa em MM encontra suporte em Steinbring (1998, p. 160, tradução nossa), pois

> [...] [Os professores] precisam do conhecimento epistemológico para que sejam capazes de avaliar as restrições epistemológicas do conhecimento matemático em diferentes contextos sociais de ensino, aprendizagem e comunicação matemática. [...] conhecimento epistemológico consiste em elementos de conhecimento no que se refere a estudos de caso de análises de episódios de ensino ou de entrevistas com alunos, e compreende ideias conceituais históricas filosóficas e epistemológicas.[1]

Ainda segundo o autor, isso se concentra na problemática de como signos e símbolos matemáticos adquirem significado durante os processos sociais de interatividade ocorridos no ensino e na aprendizagem.

3.5 Enfoques metodológicos

Este estudo tem caráter qualitativo, ou seja, a busca de compreensão dos fatos abordados não se detém a nuances numéricas, quantitativas e/ou probabilísticas: a apreciação dirigiu-se às características particulares de cada subprocesso. Analisar qualitativamente parte do conceito no qual "o qualitativo da pesquisa informa que se está buscando trabalhar com qualidades dos dados à espera da análise" (BICUDO, 2011, p. 14).

A atividade de MM foi desenvolvida no ano de 2021, na cidade de Campo Mourão, com acadêmicos voluntários pertencentes a uma instituição de ensino superior privado, na qual o primeiro autor deste texto era professor. Provenientes dos cursos de engenharia, administração e ciências contábeis, os participantes foram convidados a integrar o processo de forma extracurricular, em um projeto de ensino. Devido à situação sanitária na qual se encontrava a população brasileira e mundial decorrente dos efeitos da pandemia de Covid19, os seis

---

[1] "[...] need epistemological knowledge so they are able to assess the epistemological constraints of mathematical knowledge in different social settings of teaching, learning, and communicating mathematics. [...] the epistemological knowledge consists of exemplar knowledge elements as it refers to case studies of analyses of teaching episodes or of interviews with students, and comprises historical, philosophical, and epistemological conceptual ideas."

encontros, com cerca de uma hora cada um, ocorreram por videoconferência gravada utilizando-se do aplicativo Google Meet (gratuito) e as conversas e discussões auxiliadas pelo aplicativo de troca de mensagens Telegram (também sem custos adicionais). As imagens, sons e mensagens, bem como qualquer outra produção relacionada, foram registradas e utilizadas com a devida autorização por meio de assinatura de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE.

Além da ambientação acima, convém denotar outros pontos importantes à atividade de MM desenrolada. O convite auferiu o interesse de sete discentes, alguns com participação plena em todos os encontros e alguns com algumas ausências. Eles foram intitulados como Aluno A, Aluno B etc, com fins à preservação de suas identidades. A atividade foi desenvolvida a partir do entendimento de MM dos autores, ou seja, uma alternativa para o ensino-aprendizagem da matemática cujo objetivo final é a autogeração de conhecimento junto aos participantes, bem como o desenvolvimento da capacidade de utilização de ferramentas matemáticas para o trato de situações reais de forma crítica. Tal posicionamento desconecta-se da obrigatoriedade de um modelo matemático formal, como presente nas primeiras abordagens da MM, em um processo de separação da matemática aplicada. A atividade desenvolveu-se na estrutura delineada no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Quadro resumo da atividade de MM desenvolvida

Temática

Comodities de soja no Agronegócio

Questão problema

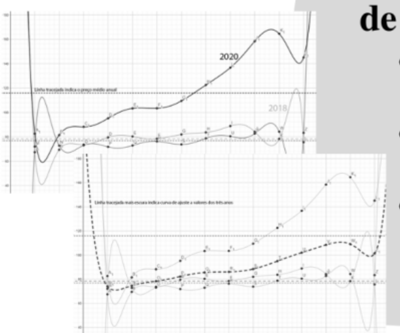
Qual o melhor e o pior períodos do ano para o produtor rural vender sua soja, baseado no histórico de preço dos últimos anos?

Hipóteses

- Existem períodos melhores e piores (quanto ao lucro obtido) para o produtor vender o soja
- Esses períodos podem ser obtidos a partir da análise da variação do preço da commodity nos últimos anos

Investigação e desenvolvimento de um modelo matemático

- Levantamento de dados históricos
- Desenvolvimento de gráficos
- Obtenção de um polinômio de ajuste para análise das variações



Soja | INDICADOR DA SOJA CEPEA/ESALQ - PARANÁ		
Nota	por saca de 60 kg, descontado o Prazo de Pagamento pela taxa NPR	
Fonte	Cepea	
Data	À vista R$	À vista US$
17/05/2021	171,58	32,58
18/05/2021	170,51	32,50
19/05/2021	167,59	31,53
20/05/2021	167,40	31,75
21/05/2021	168,36	31,48

$$P_{11}(x) = 0,00000157x^{11} - 0,000090251x^{10} + 0,00209440x^{9} - \\ -0,02371211x^{8} + 0,09907979x^{7} + 0,67142606x^{6} - 11,43613681x^{5} + \\ +69,46390764x^{4} - 230,32659419x^{3} + 433,03012072x^{2} - 423,52009396x + 236,05333047$$

Modelo desenvolvido

Polinômio modelando o comportamento médio mensal do preço do soja entre 2018 e 2020

Conceitos matemáticos e ferramentas mobilizados

Padrões, regularidade, tendências, médias, gráficos, pares ordenados, interpolação polinomial, máximos e mínimos, taxa de juros
Aplicativo de planilhas, GeoGebra, Calculadora financeira

Resultados e validação

- Modelo validado com dados históricos
- Os piores meses para vender são janeiro e fevereiro e os melhores, de setembro a novembro.
- É, possível, dentro de certas condições de rentabilidade, auferir ganhos com a compra e venda de soja em determinados períodos do ano

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Quando da análise semiótica e epistemológica, a pesquisa recorre tanto ao entendimento de signo, suas classificações e características na visão de Peirce (1986, 2017), bem como das interpretações oferecidas por Santaella (1992, 2012a, 2012b, 2017, 2018), e do conceito de triângulo epistemológico de Steinbring (1998, 2005, 2006). O delineamento desses triângulos steinbringuianos foi realizado consoante a maneira proposta por Veronez (2013), buscando a construção de estruturas[1] passíveis de análise e busca de compreensão dos aspectos de um eventual desenvolvimento cognitivo dos participantes em uma atividade de MM (no tocante às produções sígnicas).

Com base nesse arcabouço teórico, os autores, a partir do material coletado durante os encontros, procuraram delinear triângulos epistemológicos da atividade de MM, observando o signo emitido, o contexto no qual esse signo é expresso e o conceito ao qual ele faz alusão, a partir da percepção das inter-relações entre esses três elementos. De posse dos vários triângulos identificados, eles procuraram analisar o que poderia ser evidenciado a partir dessas maneiras (expressadas nos triângulos) de os alunos emitirem os signos e suas relações com os objetos matemáticos, identificando as variações possivelmente perceptíveis no decorrer da atividade de MM.

3.6 A atividade de MM, as estruturas originadas e alguma discussão

A apreciação e análise dos desenvolvimentos da atividade de MM ocorreu buscando destacar (nunca de forma hermética, frise-se) seus principais momentos, aproximando-se, um pouco, das fases de Almeida e Vertuan (2014), mas tomadas de maneira livre conforme o próprio desenrolar do processo com o grupo. A proposta de temática foi deixada a encargo dos participantes, seguindo a ideia de Meyer, Caldeira e Malheiros (2019), para os quais a problemática não vem como um aparato dimensionado ao currículo, mas origina-se da própria curiosidade dos alunos e o ferramental matemático a ser aprendido é aquele necessário à análise e solução da proposta.

Ao serem convidados a expor suas diligências e preocupações, os participantes tiveram um espaço de tempo para conversarem entre si, de forma a conhecerem-se e expressarem-se com maior liberdade. Após o diálogo, expuseram algumas possibilidades à adoção como temática. Duas contribuições destacam-se, sobre as quais as discussões se dividiram:

"Então, eu, atualmente, pago um consórcio. Não sei se encaixa, mas só que, assim, eu assinei o consórcio em 2018, pagando 350 [reais] por mês e, hoje, está 500 reais a parcela. Apesar de eu já ter sido contemplada, a parcela continua subindo." (Aluno A, Fala 01, doravante representado como A.01, para simplificação)

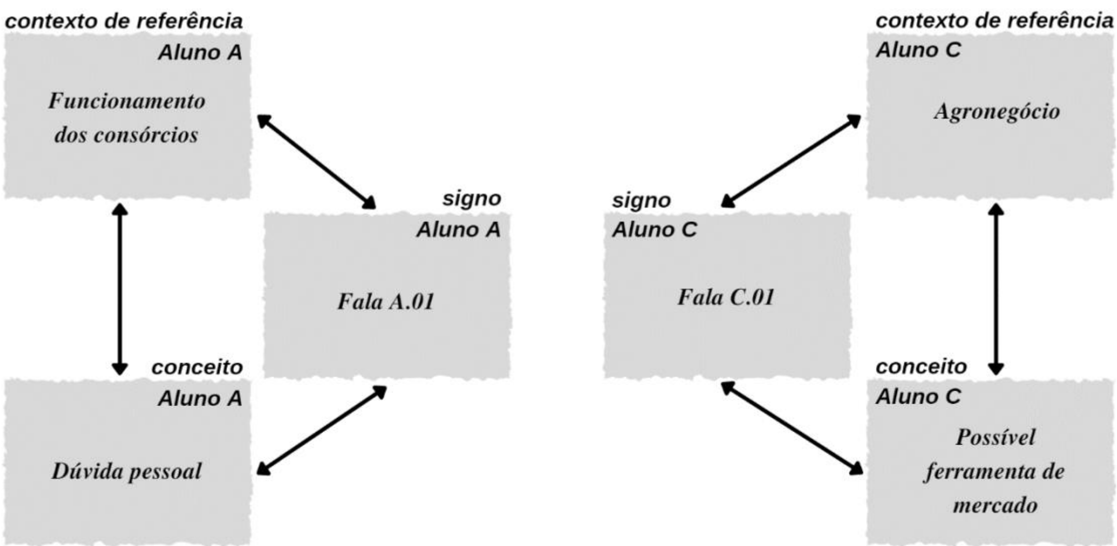
---

[1] Entendidas aqui em seu aspecto filosófico, ou seja, "Em sentido lógico, o mapa ou o plano de uma relação: assim, diz-se que duas relações têm a mesma estrutura quando o mesmo plano vale para ambas, ou seja, quando são análogas tanto quanto uma carta geográfica tem analogia com a região que representa." (ABBAGNANO, 2007, p. 376)

"Eu tenho outra ideia, mas eu não sei se seria tão difícil de fazer ou complexa... É que minha família mexe com soja, com essas coisas, agricultura... Por exemplo, tentar definir uma função ou... Uma função para tentar determinar qual o melhor período para, por exemplo, baseado no histórico de preços, sei lá, fosse o melhor período para o produtor vender a soja [...]" (C.01)

Percebe-se, já nas falas iniciais o apontamento, por parte dos alunos de questões oriundas de suas realidades: dúvidas acerca de um consórcio pago por um e uma situação relacionada à própria fonte de renda da família de outro. A problemática em C.01 trouxe à tona termos como bolsa de valores, *commodities*, gráficos, dados, entre outros e, apesar de alguns temerem uma complexidade exacerbada do tema, ele acabou por ser escolhido. Mesmo as sugestões não trazendo conceitos matemáticos prontos à pesquisa, é possível extrapolar o uso do triângulo epistemológico proposto por Steinbring (1998, 2005, 2006), utilizando-o como uma possibilidade para expressar esses interesses. Na Figura 3.3, é possível perceber a existência de um contexto de referência, mesmo da emissão de signos cujo objetivo conceitual não possui a intenção (ainda) de uma representação matemática.

Figura 3.3 – Extrapolação do uso do triângulo epistemológico para um conceito (ainda) não matemático



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

A situação deveria, então, consoante ao pensamento de Blum e Niss (1991, p. 38), ser "[...] simplificada, idealizada, estruturada, sujeita a condições e pressupostos apropriados, e para ser mais preciso para o 'solucionador do problema' de acordo com seus interesses"[1]. Assim, após alguma discussão, a segunda questão foi escolhida e problematizada na seguinte forma: *qual o melhor e o pior períodos do ano para o produtor rural vender sua soja, baseado no histórico de preço dos últimos anos?*

O processo de compreensão e estruturação ocorreu primeiramente por meio da busca de entendimento sobre a terminologia vinculada ao tema, bem como os valores da *commodity* escolhida. Os dados sobre a precificação da soja foram obtidos pelos próprios alunos no site[2] da CEPEA (Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada) / ESALQ (Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz), cujo banco de dados se estende desde 2006 e é disponibilizado de forma pública e aberta em arquivos no formato de planilha `xls` (Microsoft© Excel©), como na Figura **3.4**.

Figura 3.4 – Fragmento de planilha de dados obtida participantes no site da CEPEA/ESALQ e editada por eles

Soja | INDICADOR DA SOJA CEPEA/ESALQ - PARANÁ		
Nota	por saca de 60 kg, descontado o Prazo de Pagamento pela taxa NPR	
Fonte	Cepea	
Data	À vista R$	À vista US$
17/05/2021	171,58	32,58
18/05/2021	170,51	32,50
19/05/2021	167,59	31,53
20/05/2021	167,40	31,75
21/05/2021	168,36	31,48

Fonte: Elaborado pelos participantes (2021).

Como os valores foram obtidos no formato citado, os participantes ponderaram sobre a possibilidade de manipulação dos dados diretamente no aplicativo Microsoft© Excel©, em busca de um padrão a partir dos preços dos últimos três anos (2018-2020).

"O que vocês farão com esses dados?" (Professor, Fala 01, doravante representado como P.01, para simplificação)

"Algum tipo de gráfico?" (F.01)

[1] "[...] simplified, idealized, structured, subjected to appropriate conditions and assumptions, and to be made more precise by the 'problem solver' according to his/her interests."
[2] https://www.cepea.esalq.usp.br/br

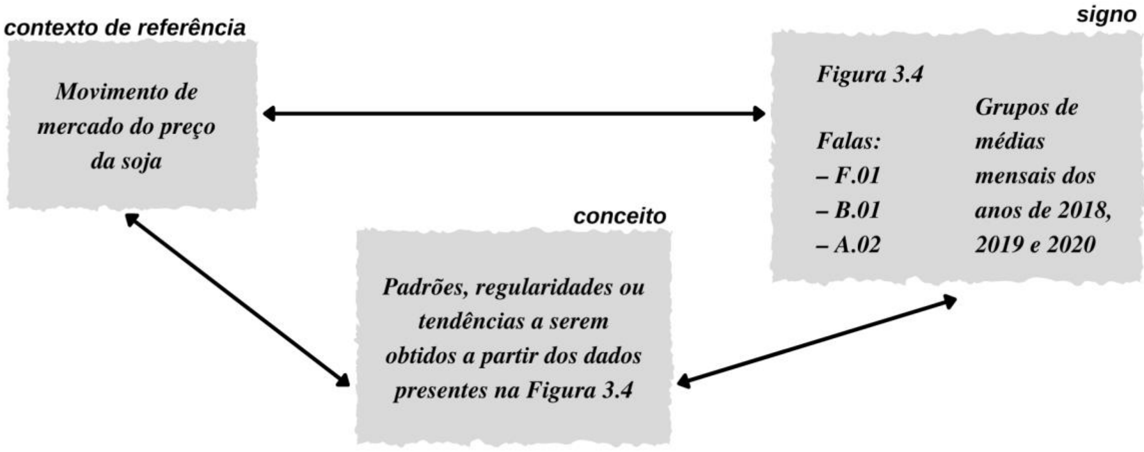
"E com esses dados, [...] o que vocês vão tentar entender ou perceber neles? (P.02)

"Qual época do ano que é melhor para vender..." (B.01)

"Eu pensei assim: que se a gente conseguisse fazer um gráfico por ano e sobrepor, um sobre o outro, e ver os padrões ali, onde eles se encaixam e se repetem no decorrer do ano." (A.02)

A partir das discussões ocorridas e dos dados obtidos, os alunos situaram-se inicialmente com a intenção de buscar algum padrão ou forma suscetível ao entendimento dos movimentos do preço da soja. Da abordagem a ser adotada, surgiu uma das primeiras decisões a serem tomadas pelo coletivo: como se trataria o volume de dados obtido. Isso devido ao fato de três anos de preços diários (dias úteis) corresponderem a 726 valores (242/ano). Com a ajuda do aplicativo de planilhas citado, além da média aritmética, os participantes analisaram mínimos, máximos e taxas de variação nos dados disponíveis. O grupo optou pela análise dos valores mensais, gerados por meio de médias aritméticas[1], perfilando três grupos de doze valores, correspondentes aos três anos escolhidos. Com esse panorama inaugural, seria possível delinear um primeiro triângulo epistemológico cujo conceito poderia servir de origem a produções e representações matemáticas de maior complexidade.

Figura 3.5 – Triângulo epistemológico do momento de compreensão e estruturação da problemática



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

[1] É importe denotar dois aspectos quanto à escolha da média aritmética simples: a) a opção derivou do próprio conhecimento prévio dos alunos e de seu arcabouço inicial sobre mercado e matemática financeira; b) apesar existirem na literatura pontuações contra o uso de médias, para a situação empreendida, no qual o interesse dos participantes reside muito mais sobre o comportamento da variação dos preços da comodity que sobre um valor em específico, a média aritmética pode ser usada sem desvantagem, como já ocorre em determinadas análises de mercado.

Esta primeira análise, na qual os aspectos semióticos e epistemológicos surgem como retrato de uma dimensão da atividade MM, apresenta signos na forma de números (basicamente, banco de dados) e falas indicando a inquietação do grupo quanto à possibilidade de identificação de algum tipo de padrão. Verifique-se a inexistência, por hora, de representações simbólicas de maior complexidade, em especial com referência a entes de caráter matemático. No entanto, é necessário apontar a vasta gama de ações desenvolvidas pelo grupo dentro do contexto de referência determinado pelo “movimento de mercado do preço de soja”. Os anseios pela determinação de algum eventual padrão ou regularidade desencadeou não somente a busca de dados de trabalho, mas tentativas de compreensão e organização pautadas tanto nas interlocuções quanto na escolha da forma de abordar os valores em grupos.

Como lhes surgira na forma de possibilidade inicial, os participantes geraram gráficos anuais dos valores mensais em busca de matematizar os dados já organizados e puderam perceber alguns padrões, como refletem nas falas:

“Olha, os melhores e os piores meses... Os melhores... Foi... Pelo que eu tinha visto, foi...” (C.02)

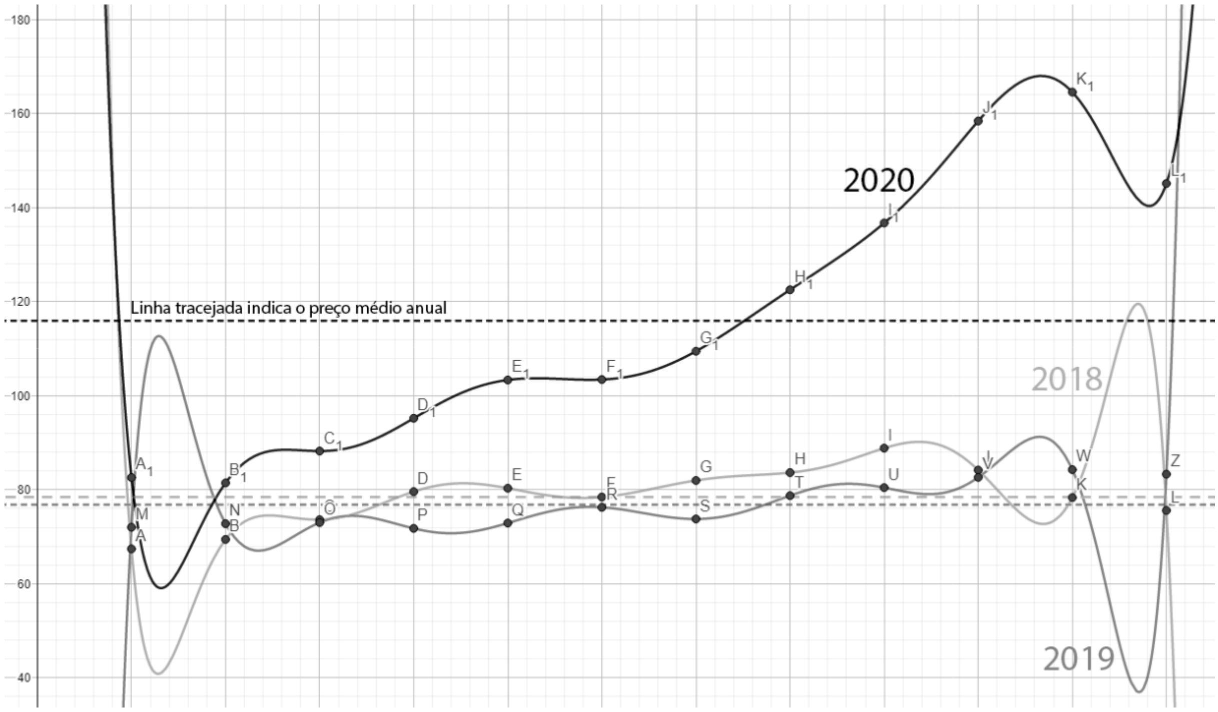
“Novembro.” (A.03)

“Isso! Novembro e setembro.” (C. 03)

“É... Em novembro, dispara... Em dezembro, já cai.” (G.01)

No entanto, apesar de denotar uma tendência, os próprios alunos perceberam a falta de um rigor matemático em seus gráficos obtidos por meio do aplicativo de planilha e buscaram ferramentas diferentes para visualizar graficamente os dados. Um dos acadêmicos de engenharia sugeriu a ideia de fazê-lo por meio do aplicativo de matemática dinâmica GeoGebra (gratuito, disponível em www.geogebra.org). Dessa forma, com o auxílio de tutoriais e interpretando os meses na forma do conjunto discreto x = [1 ... 12], transformaram as médias mensais em cada grupo anual em doze pares ordenados da forma (1, *média janeiro*), (2, *média fevereiro*) e assim por diante. Assim, obtiveram o gráfico seguinte, utilizando-se desses pontos e dos polinômios criados por meio de ajuste a esses pontos. É possível pensar em formas diferentes de ajuste, mas cabe o interesse de tal realização ser provinda das próprias incursões e decisões realizadas pelos participantes.

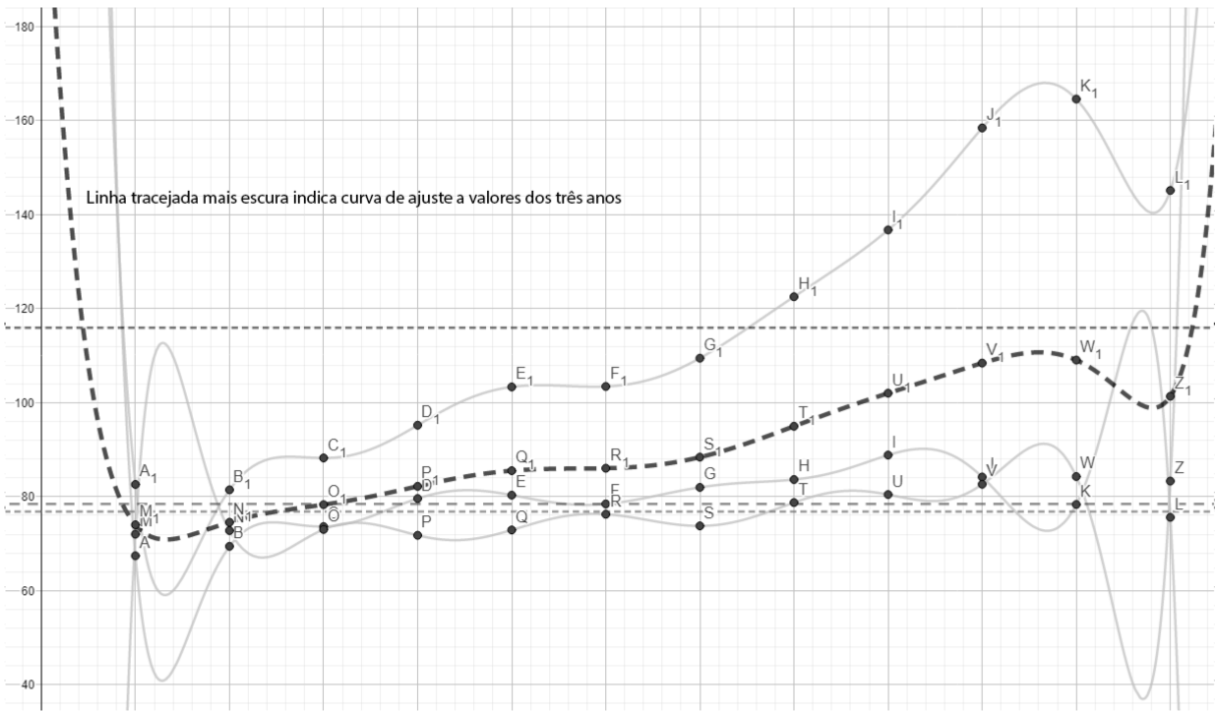
Figura 3.6 – Gráfico com preços médios mensais



Fonte: Elaborado pelos participantes (2021), com identificação das linhas acrescentada pelos autores (2022).

A partir de tais dados, procederam com uma curva de ajuste aos pontos dos três anos, considerando suas médias. Dessa maneira, por resultado, tem-se a representação a seguir.

Figura 3.7 – Curva de ajuste



Fonte: Elaborado pelos participantes (2021), com identificação das linhas acrescentada pelos autores (2022).

Tal curva foi obtida por meio de um polinômio de ajuste (a saber, $P_{11}(x) = 0,00000157x^{11} - 0,000090251x^{10} + 0,00209440x^9 - 0,02371211x^8 + 0,09907979x^7 + 0,67142606x^6 - 11,43613681x^5 + 69,46390764x^4 - 230,32659419x^3 + 433,03012072x^2 - 423,52009396x + 236,05333047$) e proporcionou uma visualização resultante dos dados dos três anos, possibilitando a eles definir os meses com valores mais baixos, em média: janeiro e fevereiro; bem como aqueles com valores mais altos, em média: setembro a novembro.

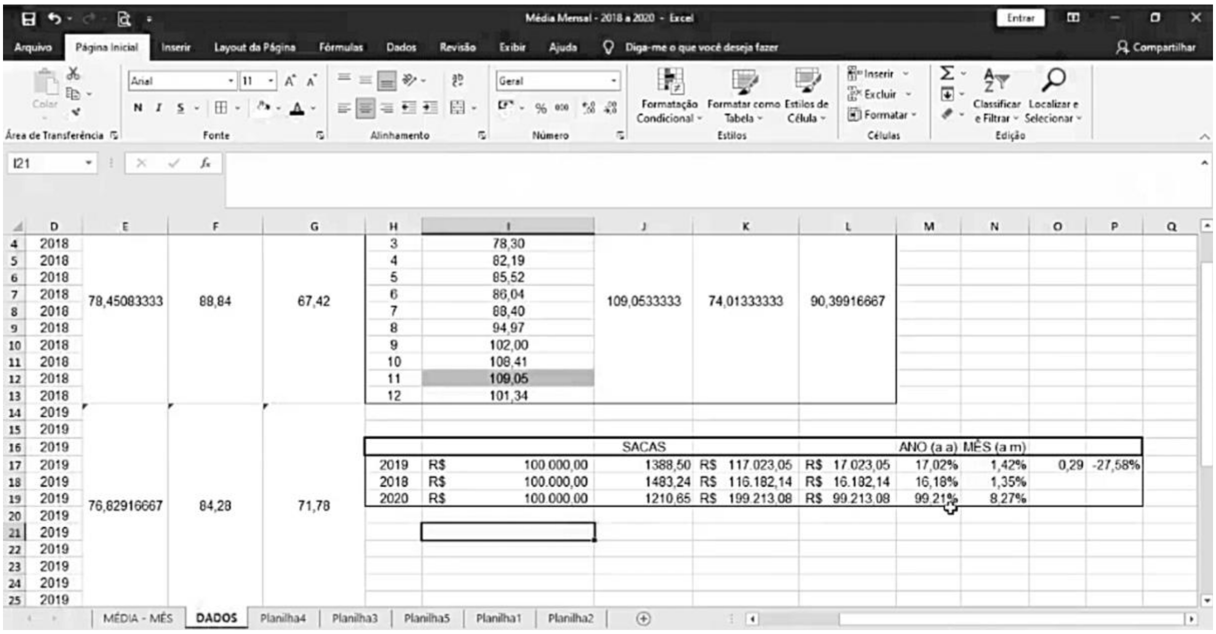
"Dá para perceber que os melhores meses são... [...] São de setembro a novembro. No caso, não é? [...] Agora, os piores está sendo sempre janeiro, fevereiro... Até maio, está sendo uma média meio baixa." (G.02)

Dessas conclusões, novos questionamentos surgiram em meio ao grupo, como, por exemplo:

"*Hein, e se fizéssemos mais ou menos assim, por exemplo: logo após a colheita, ao mês da colheita, ele vender, no preço em que está [...] e usar esse valor para aplicar até novembro, para ver se, na época que vende com maior valor na Bolsa, [...] vai compensar ele esperar até novembro para vender ou vender mesmo no valor baixo e aplicar [...]?" (A.04)*

A questão suscitou o interesse por um objetivo secundário e os participantes procuraram responder à questão indicada em A.04, considerando mínimos e máximos de cada ano para obtenção de taxas de juros sob as quais os valores poderiam ser aplicados (advindos de vendas em períodos de menor preço) a fim de obter valores proporcionais aos obtidos em épocas de maior valorização da *commodity*. Isso foi realizado em uma planilha compartilhada, como mostrado na Figura **3.8**.

Figura 3.8 – Planilha desenvolvida para obtenção de taxas de investimento

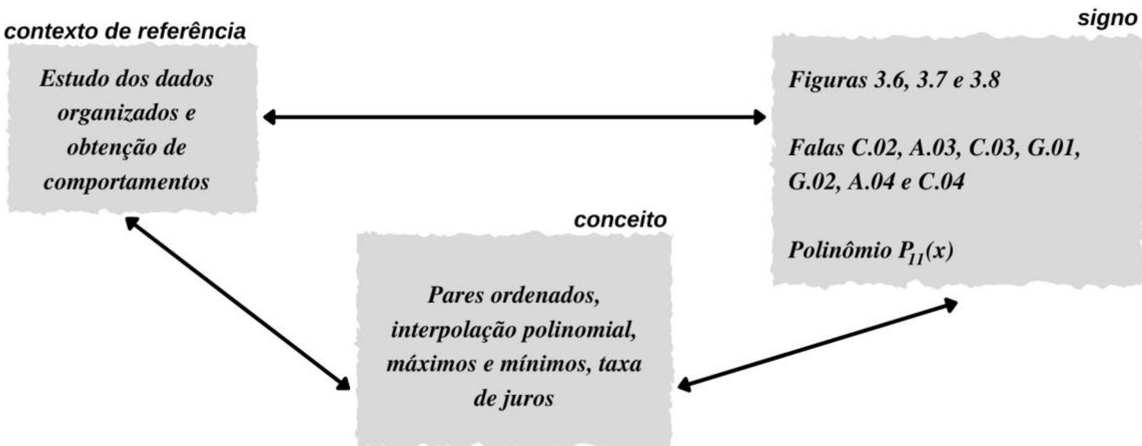


Fonte: Elaborado pelos participantes (2021).

“Aqui, professor, nós fizemos o comparativo, se ele comprasse na baixa, quantas sacas daria, daí vendesse no mês de maior retorno. Aí a gente viu que, em uma aplicação, considerando a compra dessa soja, teria que ter esse rendimento aqui [1,42%, 1,35% ou 8,27%a.m.].” (C.04)

Em seguimento à ideia principal do grupo é possível desenhar um novo triângulo epistemológico em busca da compreensão desse momento.

Figura 3.9 – Triângulo epistemológico do momento de matematização e obtenção de conclusões



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Esse segundo triângulo, em aspecto diverso do primeiro, apresenta conceitos matemáticos suscitados pelos signos (símbolos) emitidos pelos participantes no contexto de estudo dos dados. Conforme Peirce (2017, p. 74), “Um símbolo é um signo que perderia o caráter que o torna um signo se não houvesse um interpretante. Tal é o caso de qualquer elocução de discurso que significa aquilo que significa apenas por força de compreender-se que possui essa significação.” Aqui existem relações simbólicas estabelecidas sob um caráter de lei, de definição, cujo principal representante é o polinômio obtido.

O polinômio, se dado sem um contexto de expressão, figuraria como uma estrutura algébrica em si, sem conexão direta com qualquer aspecto da realidade. No entanto, não é o ocorrido aqui: o polinômio representa, para os participantes, o comportamento de um conjunto de dados, obtidos da e para a vida. Isso é consistente com o posicionamento de Steinbring (2006), para quem o conhecimento matemático deve extrapolar a mera leitura de sinais matemáticos, mas serem interpretados; interpretação essa dependente de experiências e conhecimentos implícitos. O desenvolver da atividade de MM propiciou aos participantes possibilidades de compreender e interpretar um polinômio matemático cujo interpretante (em uma visão da semiótica peirceana) aponta para o comportamento da *comodity* no decorrer do ano.

De posse de tais informações, resultados e considerações, os participantes foram convidados a avaliar os resultados gerados, bem como analisar a validade de suas produções. Para a curvatura dos dados de preço da soja, compararam se o movimento ocorrido no ano da realização da atividade era coerente com o obtido e concluíram positivamente devido a semelhança da curvatura de preços do corrente ano com o polinômio construído. Em relação às taxas e aplicações, manifestaram-se:

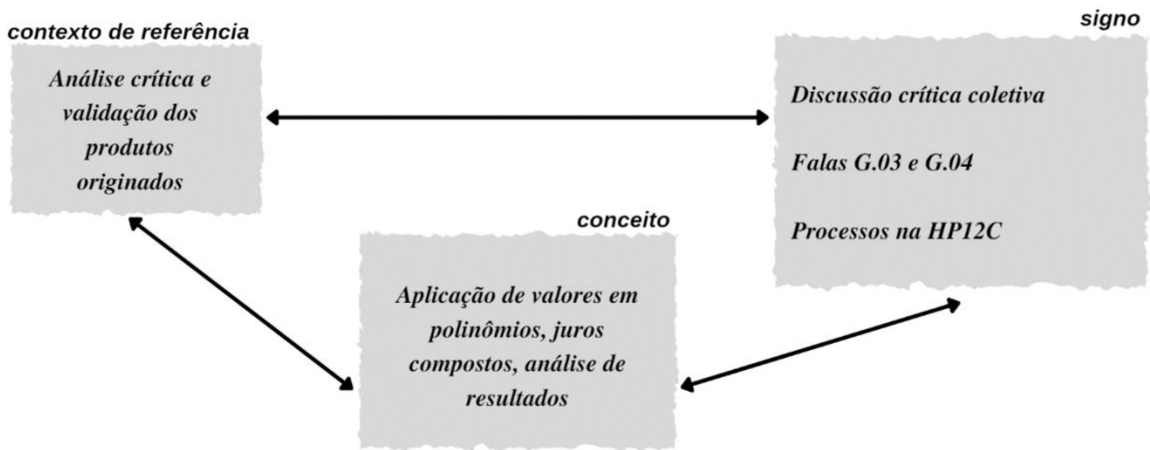
“Nós fizemos os cálculos, se ele [produtor] tivesse deixado na poupança ou LCA, Letra de Crédito Agrícola, que é das aplicações que o pessoal tem mais conhecimento [...] R$ 100.000,00 durante onze meses, período em que comprou a commodity *na baixa e vendeu na alta.” (G.03)*

Quando questionados sobre a maneira como buscaram validar esses cálculos financeiros, os participantes forneceram como retorno os valores obtidos por meio da calculadora financeira Hewlett© Packard© modelo 12C.

"Coloquei o montante, o número de períodos, daí coloquei a taxa, apertei o FV e deu o resultado." (G.04)

Com os cálculos realizados, analisaram a possibilidade de alcance dos valores propostos se houvessem taxas disponíveis no mercado coerentes com as taxas obtidas, mas verificaram o fato de nenhum investimento proporcionar tais percentuais de retorno. Além das averiguações quanto à validade dos cálculos, o grupo empreendeu uma longa discussão (suja transcrição não convém às dimensões do presente relato) sobre questões relacionadas aos dados e resultados obtidos, sobre mercado, agronegócio e aplicações, bem como sobre a própria jornada entre a obtenção dos preços e os produtos originados. Após este último momento, é coerente traçar um último triângulo epistemológico.

Figura 3.10 – Triângulo epistemológico do momento de validação e crítica dos resultados



Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Na Figura **3.10** é possível observar um novo panorama de contextos, signos e conceitos: todos relacionam-se, de alguma forma ao espectro da matemática. Quando da construção do primeiro triângulo epistemológico, todos os campos se relacionavam, indicavam ou representavam entes cuja natureza não continha especificidades numéricas em especial. Mas, com o decorrer da atividade de MM, os participantes, por sua maneira e caminhos, vêm, passo a passo, alterando essa paisagem, agregando conceitos matemáticos a representações oriundas de contextos sob seu entendimento. E o processo se enriquece até a estrutura última, na qual se expressam de forma sígnica conceituando aspectos matemáticos em um contexto de referência de resultados também matemáticos, no entanto, com origem em um ambiente real para eles.

3.7 Considerações finais

O presente relato trouxe os aspectos teóricos, metodológicos e resultados de uma atividade de MM, a qual autores se propuseram a analisar sob um olhar da semiótica peirceana. A trama semiótica serviu como espaço de observação com fins a verificar, a partir de aspectos epistemológicos, o processo de construção de conhecimento dentro da alternativa pedagógica adotada.

Os olhares dirigidos à produção sígnica de um grupo de participantes em uma atividade de MM trouxe a disposição dos aspectos episteme-semióticos em triângulos, como nos estudos do educador matemático Heinz Steinbring. Os autores puderam observar um processo rico em construção sígnica, de forma evolutiva, no qual dados provenientes da realidade dos alunos (e originados de sua inquirição) começam a se delinear na forma de representações simbólicas de caráter matemático. É importante destacar nesse processo o fato de esse aspecto matemático não ser proveniente da explanação ou exposição de conceitos por parte de um professor (no qual se centralizaria o currículo, em uma abordagem tradicionalista), mas da própria necessidade dos discentes em buscar ferramental para a análise do material em suas mãos.

A MM se mostra, a partir dessa análise, como uma maneira de favorecer a construção de conhecimento matemático (e outros) nos participantes por meio de seus próprios avanços. O segundo triângulo epistemológico existente na análise traz uma representação simbólica cuja origem e forma residem nas discussões, incursões e tentativas de busca de um padrão em dados obtidos no mercado. Os processos de interpretação desses valores, agrupamento, transformações e multiplicidades representativas expõe a riqueza da alternativa pedagógica. Eles não realizaram a atividade por questões de currículo, nota ou obrigação, mas pela própria curiosidade e interesse nas facetas da proposta.

Portanto, a partir do nível evolutivo do processo de representação simbólica observado nos triângulos construídos, os autores percebem a construção de conhecimentos matemáticos e outros durante o andamento da atividade a partir da observação da trama semiótica originada. A MM favorece, além da evolução representativa dos participantes, uma rota de expansão epistemológica, dado o passeio realizado por contextos variando de dados em linguagem nativa até representações simbólicas de caráter exclusivamente matemáticas.

É correto expressar a circunstância de um estudo como esse não esgotar, sequer minimamente, os aspectos semióticos ou epistemológicos oriundos da produção de uma MM, no entanto, auxilia na compreensão do processo cultural ocorrido por meio dela. Fica, a cargo de sugestão, a realização de outros processos de análise da trama semiótica presente na MM, a fim de avançar na compreensão das nuances epistêmicas da alternativa.

3.8 Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 6. ed. 6. tir. São Paulo: Martins Fontes, 2021.

ALMEIDA, L. M. W. de; BRITO, D. dos S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhes atribuir? **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 17, n. 22, set. 2004. ISBN 978-85-89082-23-5.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 202 - 219, abr. 2017. ISSN 1980-4415.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. 2. reimp. São Paulo: Contexto, 2019.

ALMEIDA, L. M. W. de; VERTUAN, R. E. Modelagem matemática na educação matemática. *In:* ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. (Org.). **Modelagem matemática em foco**. Rio de Janeiro: Moderna, 2014.

BASSANEZI, R. C. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 4. ed. 1. reimp. São Paulo: Contexto, 2018.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa**: segundo a visão fenomenológica. São Paulo: Cortez, 2011.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem no ensino da matemática**. 5. ed. 5. reimp. São Paulo: Contexto, 2019.

BLUM, W.; NISS, M. Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. **Educational Studies in Mathematics**, 22, p. 37-68, 1991. https://doi.org/10.1007/BF00302716.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. 1. reimp. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FUMERTON, R. **Epistemologia**. Petrópolis: Vozes, 2014.

HERMÍNIO, M. H. G. B.; BORBA, M. de C. A noção de interesse em projetos de modelagem matemática. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 12, n. 1, p. 111-127, 2010.

MEYER, J, F, da C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em educação matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. do C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Unijuí, 2007.

NÖTH, W. **Panorama da semiótica**: de Platão à Peirce. São Paulo: Annablume, 1995. (E).

PEIRCE, C. S. **La ciencia de la semiotica**. Buenos Aires: Nueva Visión, 1986.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 4. ed. 3. reimp. São Paulo: Perspectiva, 2017. 337 p. (Estudos, 46).

SANTAELLA, L. **A assinatura das coisas**: Peire e a literatura. Rio de Janeiro: Imago, 1992.

SANTAELLA, L. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. 1. ed. 4. reimp. São Paulo: Cengage Learning, 2012a.

SANTAELLA, L**. O que é semiótica**. 1. ed. 34. reimp. São Paulo: Brasiliense, 2017. 133 p.

SANTAELLA, L. **Percepção**: fenomenologia, ecologia, semiótica. 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012b.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**: publicidade, arte, mídia, vídeos, literatura, instituições. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2018.

SILVA, K. A. P. da; VERONEZ, M. R. D. Um olhar semiótico sobre a modelagem matemática. *In:* ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da. (Org.). **Modelagem** matemática em foco. Rio de Janeiro: Moderna, 2014.

STEINBRING, H. Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers. **Journal of Mathematics Teacher Education** 1, 157–189 (1998). https://doi.org/10.1023/A:1009984621792

STEINBRING, H. Epistemology of mathematical knowledge and teacher–learner interaction. ZDM **Mathematics Education** (2007) 39:95–106. DOI 10.1007/s11858-007-0017-4

STEINBRING, H. What makes a sign a mathematical sign. **Educational Studies in Mathematics** (2006) 61: 133–162. DOI: 10.1007/s10649-006-5892-z.

STEINBRING, H. **The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: an epistemological perspective**. New York, NY, USA: Springer Science+Business Media, 2005. (Mathematics education library).

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. (Tese de doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR. 2013.

4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CONJUNTO DA PESQUISA

4.1 Panorama preliminar

Esta pesquisa originou-se no seio dos questionamentos emergentes das práticas relacionadas à Modelagem Matemática (MM). Alguns posicionamentos iniciais foram tomados pelos autores e, a partir deles, a MM passou a ser considerada viável e eficiente ao ensino e aprendizagem de matemática. Tal apreciação impôs-se como força-motriz à investigação da problemática disposta. Além disso, a adoção da MM a partir de problemas[1] propostos diretamente pelos participantes, com a abordagem de conteúdos oriundos das necessidades surgidas na busca de resposta à indagação proposta, direcionaram a maneira como as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas pelos discentes.

O estudo se propunha, desde o princípio, a compreender aspectos epistemológicos e cognitivos relacionados à produção matemática (observada a partir de sua constituição sígnica) dos participantes em uma atividade de MM. A necessidade de rigor, não somente para a validade da pesquisa, mas também para a qualidade e fidedignidade dos dados e conclusões obtidas, demandou a escolha de lentes teóricas. Essas foram utilizadas como panorama à compreensão dos eventos, assim como métodos da prática de pesquisa e elaboração de desfechos na continuidade das observações.

De maneira geral, o enfoque utilizado para tal foi a semiótica, ou o estudo dos signos, restrita, aqui, à abordagem e estrutura proporcionada pelo filósofo Charles Sanders Peirce. Uma vez definida a maneira do olhar, aventaram-se questões a serem perquiridas: a) o que as produções sígnicas dos alunos sugerem a partir dos objetos matemáticos produzidos por eles em uma atividade de MM; b) que relações poderiam ser evidenciadas entre esses objetos matemáticos e os signos manifestados pelos participantes. A adoção de uma via semiótica para o intento não delimita ou fornece especificidades suficientes à busca, portanto, definiram-se duas abordagens inter-relacionadas, cuja carga de eventuais resultados afigurava-se como possível de conclusões lógicas pelos autores.

Assim, foram estabelecidas duas atividades de MM, cada uma com uma busca em particular no terreno da semiótica. Na primeira, os signos produzidos pelos alunos (seja na forma de expressões em língua nativa, seja como objetos matemáticos) foram observados na tentativa de perceber os caminhos lógicos proporcionados pela MM para a efetivação dos

---

[1] O professor, seguindo os pressupostos da MM, poderia propor o problema, deixar os alunos decidirem o que investigar ou decidir em conjunto com eles. Em nosso caso, optou-se por deixar à escolha deles.

processos de semiose, como descrita na filosofia peirceana. Na segunda, os signos produzidos sob a ótica de Peirce também compõem o interesse da pesquisa, no entanto, procurou-se um aprofundamento metodológico por meio de triângulos epistemológicos provenientes dos trabalhos do educador matemático Heinz Steinbring, nos quais o signo matemático apresenta tanto uma função semiótica quanto uma epistemológica.

4.2 Atividade I: desenvolvimento e conclusões obtidas

Na primeira atividade[1], quando os participantes foram convidados à interlocução livre, a fim de denotarem suas dúvidas e problemas de necessidade e/ou interesse, a sigla ICMS aparece, pela primeira vez nos trabalhos, na forma de um signo verbalizado. Das percepções originadas no professor-pesquisador, bem como da análise dos vídeos e das próprias conversas com os discentes, entende-se o "ICMS" como um signo, cujo objeto para o qual está no lugar, para a grande maioria do grupo, é um alvo de dúvidas. A partir dos conceitos semióticos adotados, os pesquisadores denotam o fato de, quando eles se utilizam do termo, parece haver uma conexão das letras citadas com algo relacionado a imposto ou lei, ou talvez menos referenciado ainda, como uma palavra já ouvida, mas cujo interpretante gerado por ela não remete ao objeto de hábito em cenário nacional: o Imposto sobre Operações relativas à Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços de Transporte Interestadual e Intermunicipal e de Comunicação.

Observou-se, portanto, um primeiro momento de semiose, ou geração de novos interpretantes, desvinculada, ainda, da MM: o *representamen* ICMS, em sua recepção pelos sujeitos em discussão, não originou o interpretante cujo objeto fosse o imposto ao qual se refere. No entanto, esse signo serviu como veículo para a tentativa de produção de um interpretante apontando para suas dúvidas nos colegas e no professor. Tal exposição é um prelúdio necessário à compreensão dos caminhos da semiose ocorrida durante a MM, pois toda a tentativa de compreensão dos aspectos cognitivos relacionados acabou por relacionar-se à sigla em questão.

Uma vez escolhido o ICMS como tema, o professor não regulamentou o uso das letras com o sentido regular, fornecendo-lhes explicações, mas orienta-os a pesquisar sobre o assunto, em uma espécie de imersão, realizada facilmente pelos participantes por meio da web. Após breves instantes, além da definição formal do imposto (ou seja, agora o signo remete a seu objeto habitual), eles o contemplam como um "percentual a ser calculado" e tem-se (não foi

[1] Detalhes técnicos encontram-se no artigo "Modelagem Matemática e Semiose: Produções Sígnicas Favorecendo (n)a Construção de Conhecimentos" presente neste compêndio.

apresentado qualquer conceito matemático pronto) um *representâmen* sendo utilizado para um conceito matemático (mesmo sem a compreensão do vínculo em totalidade). A eleição de uma temática, mesmo antes da delimitação do problema a ser investigado, e o convite à sua compreensão inicial (como parte da MM), originou *novos* interpretantes, inclusive matemáticos, implicando na possibilidade de ver a MM como um espaço para ressignificação desde os primeiros instantes.

Finalizado este primeiro momento, os alunos tiveram uma semana para maiores pesquisas e iniciar um eventual processo de problematização. Em seu retorno, nos seus diálogos, constata-se um outro evento de ordem sígnica: assim como o interpretante gerado pelo ICMS viu-se complementado e remodelado no encontro anterior, dessa vez, eles fazem uso de *representâmens* outros com fins a estabelecer relações com o objeto da discussão. Isso ocorre quando se utilizam dos termos "percentual", "alíquota" e "imposto" no lugar de ICMS. Ou seja, dessa vez, há *novos signos* em referência a um mesmo objeto, o imposto em questão.

A problematização ocorre a partir da leitura na web, por um dos discentes, sobre o imposto em questão ser danoso às empresas. A despeito da veracidade ou não do fato, isso despertou interesse geral e encaminhou-se, com o auxílio do professor, para os rumos da matemática financeira (MF). Em prévia a uma eventual tentativa de matematizar e compreender os valores cobrados e suas possibilidades às empresas, eles buscaram elementos básicos de MF.

Aqui cabe comentário a respeito de dois pontos cuja gênese reside nessa procura de entendimento sobre uma área da matemática, no caso a MF. Em primeiro lugar, o contato com novos termos e conceitos, originando uma bagagem de novos signos. Com esse fato, os participantes começam a tentar compreender o cálculo do ICMS e passam a relacionar palavras, cujo significado foi apropriado em linguagem nativa, com quantias numéricas, calculando, inclusive, novos valores. O conjunto estabelecido por esses dois momentos exibe uma semiose cujo processo, além do caráter de ressignificação, proporciona a *geração de interpretantes* numéricos: é o início da conexão entre matemática e realidade acarretada pela MM.

Por meio dessas novas pontes, decidiram-se por verificar a eventualidade de ganhos ocasionada por uma possibilidade de pagamento do imposto somente ao término do ano. Com a ajuda de um aplicativo de planilhas e conceitos de juros simples e compostos, desenvolveram uma fórmula para o cálculo desses rendimentos. A um leitor cuja bagagem matemática domine com facilidade tais aspectos, a atividade pode parecer por demais simplista, no entanto, ressalta-se o fato de o professor não ter veiculado, no transcorrer da atividade, nenhuma explicação sobre nenhum conceito matemático. Os alunos não demandaram explanações e percorreram esse caminho com o auxílio do docente somente no papel de gestor do processo. A MM despertou neles interesse suficiente para procederem por si sós.

Não se tratará aqui da forma como essa matematização e obtenção da fórmula ocorreram ou sobre o aspecto e uso da dela, mas das nuances da semiose aí presente. A equação construída pelos alunos possui letras (*R*, *i* e *n*, respectivamente, retorno, taxa e período), bem como a sigla ICMS. Mesmo detendo a significação exposta na oração anterior, as letras citadas bem como a sigla possuem, então, um caráter ainda não explorado no decorrer dos trabalhos: são variáveis numéricas. Se parece já haver validade do processo de MM no momento de conexão de conceitos matemáticos com o real, ao construírem um signo cujo objeto para o qual aponta não é algo fixo e imutável, mas um valor numérico variável (abstrato, mesmo oriundo de dados materiais), o participante passa a ter a construção de um símbolo matemático em seu aparato intelectual.

O caminho percorrido pelos participantes da atividade de MM levou-os a um processo de semiose no qual partiram de um signo (ICMS) cujo objeto era uma dúvida até a utilização desse mesmo *representâmen* em uma fórmula, apontando para um valor numérico variável. Esse decurso, com uma evolução sígnica erigida sobre conceitos buscados e construídos pelos alunos, pode ser compreendido como aprendizado matemático (mas não somente), desenvolvido ao trilhar pelas vias da MM. Ou seja, as diversas fases, necessidades, buscas de ferramentas e tentativas de construção de um modelo como solução final à problemática de início favoreceram momentos nos quais novos signos e novas relações foram geradas, originando novas construções cognitivas na mente dos participantes.

4.3 Atividade II: desenvolvimento e conclusões obtidas

Ao término da primeira atividade, o fato de a sigla ICMS funcionar como símbolo matemático relacionado a uma variável numérica não a exime da possibilidade de geração de um interpretante cujo destino mental seja a ideia de imposto. Tal função do signo em questão dar-se-ia, porventura, pelo contexto no qual é expresso e a identificação disso ocorreria por meio das possibilidades aventadas pela bagagem intelectual do emissor e/ou receptor dele. No caso do uso como signo matemático, Heinz Steinbring percebeu a dualidade dessa atuação: semioticamente, ao representar outra coisa; e epistemologicamente, em um quadro do conhecimento matemático relacionado ao símbolo. A partir disso, o autor olhou para a produção sígnica dos alunos utilizando-se de seu triângulo epistemológico (TE) estruturado como signo-conceito-contexto. Com interesse na compreensão dos aspectos cognitivos decorrentes dessa perspectiva desenvolveu-se a segunda MM.

Na MM II[1], os participantes foram invitados a dialogarem entre si sobre curiosidades e problemas presentes em seus contextos. Um dos alunos suscitou, devido à sua experiência familiar no campo, uma questão sobre *commodities* agrícolas, em especial a soja. Mesmo antes de qualquer movimento em direção a compreensões específicas e/ou a problematização da proposta, algumas expressões dos discentes, em língua nativa, podem ser enfocados, tomando-se os TEs de forma livre em sua estrutura. Assim, expressão verbal a respeito do grão agrícola funcionou como um *signo emitido* de maneira a *referenciar um conceito* de ferramenta de mercado no *contexto do agronegócio*, perfazendo uma triangularização no relacionamento destes elementos.

Mesmo antes de se aprofundarem na temática, uma dúvida alocou espaço em suas conversas: qual seria o melhor momento do ano para a comercialização da soja a partir dos preços observados em períodos últimos anteriores? Independentemente do nível de dificuldade da questão, ela foi aceita pelo professor, pois em qualquer problema advindo da realidade dos participantes *pode* haver contextos nos quais a matemática seria de utilidade e seu ferramental útil à análise crítica dos eventos. Assim, iniciaram buscas e leituras a fim de compreenderem melhor os conceitos relacionados ao mercado financeiro agrícola.

Como se propuseram a obter comportamentos a partir de dados históricos, os participantes lograram planilhas de acesso aberto com dados diários do preço da soja em um repositório de assegurada qualidade (CEPEA/ESALQ)[2], dos quais utilizaram três anos de informações. Mesmo com a limitação escolhida, teriam de lidar com 726 valores. Da necessidade de ações e melhores abordagens para o problema, despontaram falas múltiplas e trocas de ideias de forma verbal, até a concepção de médias aritméticas mensais, agrupadas por ano, com fins à construção e análise de gráficos.

Perceba-se aqui o primeiro momento de constituição de um legítimo TE: em um *contexto* no qual precisavam compreender o movimento do preço da commodity em um mercado financeiro (Brasil), identificam-se expressões várias modeladas em diferentes formas de *signo*: falas e discussões, planilha de dados com histórico de preços e valores obtidos por meio de média. A tríade estaria incompleta se não apontasse a um ou mais conceitos no(s) qual(is) se unem esses signos em um determinado contexto. Na situação, esse *conceito* é a busca

---

[1] Detalhes técnicos encontram-se no artigo “Semiótica e Epistemologia na Produção Sígnica Oriunda de uma Atividade de Modelagem Matemática” presente neste compêndio.

[2] Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada / Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiróz

de uma eventual regularidade no comportamento dos valores levantados. Ou seja, esses *representâmens* não são emitidos de forma desconectada, seja com a realidade deles, seja com a temática na qual se desenrola a MM. Os signos emitidos possuem uma faceta semiótica, quando atuam em substituição a preços passados e valores decorrentes, mas também um aspecto epistemológico, do qual se alvitram conceitos mais simples de matemática (como a média utilizadas e a menção à gráficos), mas também a percepção de constructos em formação sobre a conexão entre as possibilidades numéricas e a compreensão do real. No entanto, isto é apenas o início.

Como prosseguimento às demandas autoestipuladas, o grupo procurou meios à representação das médias obtidas. Como elas foram calculadas em um aplicativo de planilhas, realizaram os gráficos neste mesmo ambiente, mas consideraram-nos insuficientes às análises. A partir da sugestão de um membro do grupo e utilizando-se de tutoriais diversos, conseguiram construir os gráficos no aplicativo matemático gratuito GeoGebra. Para tanto, interpretaram os períodos como pontos discretos no eixo x e os preços médios foram localizados no eixo y. Dessa maneira, puderam representar as curvas correspondentes aos três anos em um mesmo plano.

O processo descrito anteriormente traz em si, uma riqueza de elementos ao expor a transposição de dados originados por um meio e em uma forma (médias em formato numérico) para uma representação gráfica na qual os valores tiveram de ser interpretados como pontos em eixos a fim de originar curvas para um estudo posterior. Em termos de semiótica, observa-se a existência de um signo constituído pela tabela de preços médios mensais de três anos, na forma do registro escrito em língua nativa (meses) e valores numéricos (médias). Uma vez insatisfeitos com o produto gráfico originado no aplicativo de planilhas, os discentes tiveram de retornar ao objeto de interesse (preços médios) e reinterpretá-los a fim de obter um novo *representamen*. Isso ocorreu em duas camadas: primeiramente, a adoção de pontos do eixo x e valores reais do eixo y, ou seja, esse foram manipulados como signos no lugar de seus objetos originais; e, em segundo lugar, esses entes proporcionaram o desenho de uma representação gráfica, em um signo de signos.

Esse processo ganha ainda uma terceira camada no momento no qual os participantes procuraram meios para originar uma curva de ajuste àquelas já obtidas. A linha referente a um polinômio de ajuste gerado por meio de um comando no aplicativo GeoGebra consiste em um signo um tanto diverso em relação aos anteriores, porque, mesmo em lugar de outra coisa (o comportamento médio anual dos preços da soja), ele ainda possui interpretantes a serem originados por meio da análise crítica a ser realizada pelos discentes. Trata-se, dessa maneira de um signo com interpretantes ainda em estado potencial. Quando se observa esse complexo sob a ótica dos TE, percebe-se a obtenção das curvas como um signo elaborado em um contexto de entendimento do movimento da *commodity* da soja, ao qual se associam as conversas de grupo, também em caráter sígnico, para o entendimento das nuances de variação contidas no conjunto. E, para isso, moveram inúmeros conceitos e objetos de ordem matemática: funções, pares ordenados, máximos e mínimos, entre outros.

Assim, é possível concluir pela atividade de MM como um ambiente no qual diversos *signos* são mobilizado em busca de um modelo como solução à problemática inicial, de forma interconexa com dois expoentes: um *contexto*, dentro do qual foram acionados ou desenvolvidos e relacionado diretamente ao arcabouço sociocultural dos discentes; e um *conceito*, ao qual busca referenciar, de início, em linguagem natural, e, em posterior, com o andamento da atividade, pouco a pouco utilizam-se de conceitos matemáticos aprendidos ou desenvolvidos. Os triângulos epistemológicos traçados denotam, sequencialmente, um aprendizado de conceitos matemáticos e outros a partir de uma teia semiótica.

4.4 Interlocução última

O delineamento realizado neste capítulo não difere dos desfechos parciais alçados nos dois artigos nos quais são descritos com detalhes os encaminhamentos comentados. No entanto, este estudo se propôs a compreender os processos cognitivos e epistemológicos pertinentes a essa alternativa de ensino e aprendizagem de matemática. Portanto, nestas considerações, o olhar repousa com maior acurácia às sugestões proporcionadas pelas produções sígnicas dos participantes, com fins a entender as relações suscitadas entre esses signos e os objetos matemáticos. Conforme denota-se no desenrolar antecedente, a MM proporciona um ambiente rico no qual as múltiplas fases e demandas permitem e ocasionam a emissão, interpretação e ressignificação contínua de signos vários, sejam emitidos com o auxílio de matemática ou não.

Tanto na atividade I quanto na atividade II, desde o início dos trabalhos, quando os alunos foram convidados a dialogar entre si e aventar situações problemáticas, há a emissão de signos: ora relacionados a um imposto pouco conhecido, ora relacionado a um consórcio em pagamento ou à atividade econômica de uma família. Em qualquer um dos dois casos, por meio de signos emitidos em língua nativa, os participantes buscam trazer à tona dúvidas relacionadas a questões oriundas de suas realidades e isso ocorre devido à própria estrutura oportunizada pela atividade de MM.

No primeiro artigo, os triângulos semióticos construídos permitiram observar um avanço gradual da complexidade dos interpretantes ao referirem-se aos objetos em pauta. No segundo, de maneira muito similar, também se observou uma expansão da complexidade dos signos emitidos ao transitarem por diferentes contextos, buscando expressar/relacionar diferentes conceitos. É possível atentar, dessa forma, o fato desses avanços percebidos nas emissões sígnicas e nos seus inter-relacionamentos, seja no triângulo semiótico, seja no epistemológico, ser oriundo da estrutura de uma atividade de MM.

A atividade de MM, observada a partir da observação dessas graduações em prol de abordagens semióticas e epistemológicas mais complexas, permite ao participante, evolução cognitiva. Isso porque ele parte de um olhar voltado diretamente à sua realidade e inicialmente passível de expressão, ao menos para ele, somente por vias de sua língua nativa em direção a uma matematização de panoramas e objetos dessa realidade. Observa-se, em ambos os artigos, a presença de elementos e interpretações mais relacionadas matemática a cada fase avançada.

Outro detalhe importante é o fato desse avançar de fases ser possibilitado pelos passos graduais dos próprios participantes. O aluno não parte de uma questão fechada à qual é possível atribuir uma resposta passível de ser considerada tão somente certa ou errada. Ele parte de uma instabilidade oriunda de seu universo epistemológico e busca, obtendo, agregando e/ou construindo saberes matemáticos com a intencionalidade de auxiliá-lo na resolução de uma questão posta. Isso foi possível evidenciar, em ambas as atividades, a partir dos signos emitidos.

Os autores observaram o alcance do objetivo primário da MM: uma alternativa viável para o ensino e aprendizagem matemática a partir dos aprendizados matemáticos e outros originados da teia semiótica desarrolhada no ínterim do processo. Notoriamente, tanto na atividade I, quanto na II, inúmeros conteúdos foram suscitados e desenvolvidos pelos participantes na compreensão, representação e interpretação de problemas pertinentes às suas realidades. Acrescente-se, em particular, os processos semióticos aqui descritos. Foram lidos semioticamente, mas não tem origem aí ou resumem-se a isso: são frutos da maneira como a MM funciona. Ao tocar a realidade da qual os discentes são integrantes, a atividade provoca necessidades de interlocução e representação, tanto entre os participantes quanto entre eles e o professor. Essa produção sígnica, quando observada de perto, denota processos de semiose, de ressignificação, seja por desconstrução de ideias anteriores, seja por evolução ao agregar sentidos outros. Além disso, os contextos de acesso, compreensão, matematização, análise etc, perfazem momentos distintos nos quais a emissão de signos vai desde interpretantes conectados ao objeto de referência por meios diretos até aqueles cujo interpretante é originado em um processo de crítica.

É importante denotar a limitação dessa pesquisa e a necessidade de continuidade no processo de compreensão dessas nuances cognitivas e semióticas presentes na MM, observando-as sob as lentes da semiótica ou outra estrutura teórica.