UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

IDEIAS DE FUNÇÃO E PROBLEMAS MISTOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Karina Dezilio

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
PRPGEM

Campo Mourão,

2022

PRPGEM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

IDEIAS DE FUNÇÃO E PROBLEMAS MISTOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Karina Dezilio

Orientadora:
Dra. Veridiana Rezende

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Junho de 2022

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e
Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP
e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dezilio, Karina
Ideias de função e problemas mistos: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental / Karina Dezilio. -- Campo Mourão-PR,2022.
196 f.: il.

Orientador: Veridiana Rezende.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) -- Universidade Estadual do Paraná, 2022.

1. Matemática-estudo e ensino. 2. Estrutura Multiplicativa. 3. Problemas Mistos. I - Rezende, Veridiana (orient). II - Título.

Karina Dezilio

IDEIAS DE FUNÇÃO E PROBLEMAS MISTOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Comissão Examinadora:

Dra. Veridiana Rezende – Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR

Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira – Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste

Dr. João Alberto da Silva – Membro da Banca
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Resultado: APROVADA

Campo Mourão
Junho de 2022

Dedico o presente trabalho a Deus.

À minha família.

Ao meu namorado, Daniel.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado sabedoria, tranquilidade, saúde e força, principalmente nos momentos mais difíceis;

Aos meus pais, Deolivar Dezilio e Maria Eunice de Oliveira Dezilio, pelas orações, carinho, compreensão e por sempre me motivarem nos estudos;

Ao meu namorado, Daniel Corandin Bughi, que sempre esteve comigo me ouvindo, apoiando, aconselhando e incentivando, sempre com muito carinho. Agradeço por compreender os momentos em que estive ausente, me dedicando aos estudos. Os momentos de desabafo, descontração e reflexão tidos com você foram essenciais para a conclusão desta pesquisa. A você, meu amor, o meu muito obrigada!

À minha querida orientadora, Professora Doutora Veridiana Rezende, pela dedicação, paciência, confiança e ensinamentos, auxiliando-me durante todo o desenvolvimento desta dissertação. A você, o meu muito obrigada!

Aos professores da banca examinadora, João Alberto da Silva e Clélia Maria Ignatius Nogueira, pelas correções e sugestões. Suas contribuições, desde o exame de qualificação, foram fundamentais para este trabalho;

Aos membros do GEPeDiMa, pelos vários momentos de aprendizagens por meio das discussões teóricas e pelas contribuições dadas a esta pesquisa;

A todos os professores do PRPGEM que, de alguma forma, contribuíram para esta pesquisa por meio das disciplinas;

Aos meus amigos, Suzana, Ana Carolina, Isane, Carla e João Marcos pelo apoio, incentivo e torcida para a realização desta pesquisa;

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta minha trajetória, o meu muito obrigada!

RESUMO

A presente pesquisa tem como principal objetivo analisar ideias de função mobilizadas por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos do tipo proporção simples e composição de medidas. Esta pesquisa é estruturada a partir da teoria dos Campos Conceituais no que se refere à elaboração do instrumento de pesquisa e análises dos dados produzidos, cujo olhar voltou-se para os esquemas e invariantes operatórios manifestados pelos estudantes. Para o seu desenvolvimento, foram elaborados 4 problemas mistos da classe de *proporção simples e composição de medidas*. Os problemas foram implementados com 13 estudantes de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, em uma escola do campo situada na região Noroeste do Paraná. Ao resolverem os problemas, os estudantes estavam organizados em grupos. A análise dos dados ocorreu a partir de gravações em áudio dos diálogos dos grupos, de suas produções escritas e por meio de anotações da pesquisadora realizadas no diário de bordo. As análises mostram que as ideias de *correspondência*, *dependência*, *regularidade, variável*, *proporcionalidade* e *modelação da função afim* foram identificadas por todos os grupos, e a ideia de *generalização* foi manifestada em dois grupos, mostrando que é possível propor situações envolvendo ideias de função afim desde os Anos Iniciais. Foi possível também observar que a utilização de tabelas em problemas de mesma classe influenciam em sua compreensão e, consequentemente, nas ideias mobilizadas. Foi identificada a presença de três *teoremas em ação*, sendo dois verdadeiros e um falso, associados à modelação da função afim.

Palavras-chave: Educação Matemática; Teoria dos Campos Conceituais; Problemas Mistos; Estrutura Aditiva; Estrutura Multiplicativa; Anos Iniciais.

ABSTRACT

The main aim of this research is to analyze function ideas mobilized by 5th year students when solving mixed problems of the simple proportion and composition of measures type. This research is structured on the theory of Conceptual Fields with regard to the elaboration of the research instrument and analysis of the data produced, whose view focused on the schemes and operative invariants manifested by the students. For its development, 4 mixed problems of the class of *simple proportion and composition of measures were elaborated*. The problems were implemented with a group of 13 students from the 5th year of Elementary School, in a rural school located in the Northwest region of Paraná. When solving the problems, the students were organized into groups. Data analysis took place from audio recordings of the groups' dialogues, their written productions and through the researcher's notes made in the teacher's diary. The analysis show that the ideas of *correspondence*, *dependence*, *regularity*, *variable*, *proportionality* and *modeling of the affine function* were identified in all groups, and the idea of generalization was manifested in two groups, showing that it is possible to propose situations involving ideas of function affine since the Early Years. It was also possible to observe that the use of tables in problems of the same class influences the understanding of the problems and, consequently, the ideas mobilized. The presence of three *theorems in action* was identified, being two true and one false, associated with the modeling of the affine function.

Keywords: Mathematics Education; Conceptual Fields Theory; Mixed Problems; Additive Structure; Multiplicative Structure; Initial Years.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
DI	Deficiência Intelectual
E.F	Ensino Fundamental
E.F.M	Ensino Fundamental e Médio
GEPeDiMa	Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PIC	Programa de Iniciação Científica
PPP	Projeto Político Pedagógico
PRPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
SEED	Secretaria de Estado da Educação
SESA/PR	Secretaria de Estado da Saúde do Paraná
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
TALE	Termo de Assentimento Livre e Esclarecido
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TCUD	Termo de Compromisso de Utilização de Dados
Unespar	Universidade Estadual do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O interesse em desenvolver esta pesquisa de mestrado em Educação Matemática voltada para os Anos Iniciais é decorrente de minha[1] trajetória acadêmica e profissional. Na introdução deste texto, apresento algumas etapas de minha formação acadêmica, minha experiência docente e as justificativas com respaldo teórico para o desenvolvimento desta investigação.

Meus estudos acadêmicos iniciaram no ano de 2011, ao ingressar no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná – Unespar. Durante a graduação, tive a oportunidade de participar de diversos projetos, dentre eles, do Programa de Iniciação Científica – PIC, no período de 2014 a 2015. No PIC, desenvolvemos pesquisas relacionadas a estudos sobre o uso de alguns materiais didáticos que fazem parte do Laboratório de Matemática. Minha participação no PIC proporcionou as primeiras experiências de pesquisa, a participação em eventos científicos da área de Educação Matemática, e a produção, publicação e apresentação de artigos em Anais de Eventos. Também publicamos um livro intitulado *Manual Didático Para o Uso dos Materiais do Laboratório de Matemática do Programa Brasil Profissionalizado*, com o objetivo de oferecer subsídios práticos, teóricos e metodológicos a professores da Educação Básica, no que se refere ao uso de materiais que compõem o Laboratório de Matemática presente em algumas escolas técnicas e profissionalizantes, pois, na época do desenvolvimento da pesquisa, constatamos que em sua grande maioria, os docentes não utilizavam os materiais didáticos desse laboratório porque não sabiam utilizá-los.

Outro projeto que contribuiu para a minha formação, especialmente profissional, enquanto docente, foi o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID –, do qual eu participei por quatro anos, e que me proporcionou experiências do cotidiano escolar em turmas do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio. Além disso, possibilitou o estudo de diversos textos e estratégias de ensino, tais como Resolução de Problema, Modelagem Matemática e Investigação Matemática. As experiências práticas em sala de aula, juntamente com os estudos teóricos, também resultaram em publicações de resumos e artigos em Anais de eventos e capítulos de livros.

[1] Parte desta introdução é escrita na primeira pessoa, pois representam a experiências e motivação pessoal da estudante de mestrado, proponente desta pesquisa.

Após receber o título de Licenciada em Matemática, realizei três especializações, relativas à Educação Matemática, Educação Especial e Educação do Campo, respectivamente. Ao término da licenciatura, ministrei aulas pelo Processo Seletivo Simplificado do Paraná, realizado pela Secretaria de Estado da Educação – SEED (PSS/SEED), com contratação temporária e por meio do qual ministro aulas do Ensino Fundamental II ao Ensino Médio até os dias atuais, no período matutino.

No ano de 2019 iniciei minha segunda Graduação, em Pedagogia, habilitando-me no ano de 2020 para atuar como docente dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Em 2020, assumi um concurso da Prefeitura Municipal, onde leciono até os dias atuais como professora do 4º ano do Ensino Fundamental I, no período vespertino.

O ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM, da Universidade Estadual do Paraná – Unespar, ocorreu no ano de 2020, e me oportunizou participar do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática – GEPeDiMa, que tem como uma das líderes a orientadora desta pesquisa. Atualmente, o interesse principal do GEPeDiMa é o estabelecimento de classes de situações que dão sentido ao conceito de função afim, e a análise de conhecimentos de estudantes de diferentes níveis de ensino ao resolverem tais situações.

Com o ingresso no PRPGEM, no GEPeDiMa, e começando minha experiência docente com estudantes do Ensino Fundamental I, os estudos, leituras e discussões realizadas despertaram em mim o interesse por analisar *ideias de função* manifestadas por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), desde os Anos Iniciais são indicados os estudos de regularidade, generalização de padrões, propriedades da igualdade e proporcionalidade, porém, de forma implícita, sem o envolvimento de letras para representá-las (BRASIL, 2018). Tais noções dão base para que no decorrer do processo escolar o conceito de função seja desenvolvido pelos estudantes, conceito este que deve ser formalizado no 9º ano do Ensino Fundamental.

Para compreender o processo da construção de um conceito, é necessário identificar as ideias que fazem parte de sua essência. No caso das funções, autores como Tinoco (2002) e Nogueira (2014) consideram as ideias de *variável, dependência, regularidade e generalização* como essenciais para a compreensão do conceito de função. Já Campiteli e Campiteli (2006) citam, além das ideias mencionadas, as ideias de *proporcionalidade* e *correspondência*.

Em relação à proporcionalidade, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 295) a indica como habilidade a ser desenvolvida, especialmente no 5º ano: "(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros". Além disso, na BNCC (BRASIL, 2018, p. 270) é indicado que "[...] a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)".

Assim, considerando que a pesquisa está sendo desenvolvida com estudantes dos Anos Iniciais, com o respaldo de diversos autores (CARAÇA, 1951; TINOCO, 2002; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006; PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020), e de acordo com o GEPeDiMa, do qual participamos, assumimos que, para a compreensão do conceito de qualquer tipo de função, seja função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular etc., é necessário compreender as ideias que vêm sendo denominadas de *ideias-base* de função: *variável*, *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *generalização* (PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014). Dentre estas ideias, incluímos a ideia de *proporcionalidade*, que está associada à noção intuitiva de função nos Anos Iniciais indicada pela BNCC (BRASIL, 2018), o que corrobora com Campiteli e Campiteli (2006), ao mencionarem a ideia de proporcionalidade como sendo uma das ideias essenciais para a compreensão do conceito de função.

O conceito de função não é um conceito simples de ser compreendido, uma vez que a sua construção ocorreu de forma lenta na história, "[...] sendo necessários mais de 20 séculos de experiências, descobertas e disparidades para que este conceito fosse formalizado tal como atualmente é concebido pela comunidade de matemáticos" (CALADO; REZENDE, *no prelo*, p.2).

Vergnaud (2009b) defende que a compreensão de um conceito pelo sujeito ocorre durante o processo escolar, em decorrência das diferentes situações vivenciadas. Em se tratando de diferentes situações, Vergnaud (2009b) estabeleceu dois campos conceituais bem definidos – o das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas –, para os quais apresenta classes de situações distintas que demandam dos estudantes esquemas (organização da atividade) diferentes para a sua resolução.

Além dos problemas aditivos e multiplicativos, Vergnaud (2009b) define os problemas mistos, que exigem em suas soluções ao menos uma operação do campo conceitual aditivo (adição ou subtração), e ao menos uma operação do campo conceitual multiplicativo (multiplicação ou divisão).

Estudos (MIRANDA, 2019; CALADO, 2020; CALADO; REZENDE; NOGUEIRA, 2020; RODRIGUES, 2021) realizados por integrantes do GEPeDiMa vêm mostrando que os problemas mistos podem ser associados ao conceito de função afim, e que tais problemas podem ser classificados a partir de uma combinação de classes dos campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Miranda (2019), em sua pesquisa de mestrado, identificou nove (9) classes de problemas mistos associados à função afim. A classe com mais situações-problema identificadas em seus estudos foi a de *proporção simples e composição de medidas*. Esta classe também foi a mais identificada nos livros didáticos de Matemática da coleção Ápis de Dante (2017), do Ensino Fundamental I (RODRIGUES; REZENDE, 2021), coleção esta adotada na escola em que estudam os colaboradores desta pesquisa.

Nesse sentido, com base em duas pesquisas de mestrado realizadas no âmbito do GEPeDiMa, de Miranda (2019) e Rodrigues (2021), assumimos que algumas classes de problemas mistos podem ser associadas à função afim, ou seja, tais problemas mistos podem ser modelados da forma $f(x) = ax + b$.

Ainda, ao resolverem problemas mistos da classe *proporção simples e composição de medidas*, temos por hipótese que estudantes do 5º ano dos Anos Iniciais manifestam ideias de função, tais como correspondência, variável, dependência, regularidade, generalização, proporcionalidade e ideia da modelação da função afim, relativas à expressão $y = ax + b$, guardada a linguagem Matemática esperada para os Anos Iniciais, sem formalidade algébrica, conforme prevê a BNCC (BRASIL, 2018).

Levando em consideração que ideias de função estão presentes no currículo desde os Anos Iniciais (BRASIL, 2018); que o conceito de função não é simples de ser compreendido pelos estudantes (CALADO, REZENDE, *no prelo*; ROSSINI, 2006; SILVA, 2008; PAVAN, 2010; BERNARDINO *et al.*, 2019; REZENDE, NOGUEIRA, CALADO, 2020); que os problemas mistos da classe *proporção simples e composição de medidas* permitem ser modelados na forma $f(x) = ax + b$, e guardada a linguagem Matemática esperada para os Anos Iniciais, sem formalidade algébrica, podem ser resolvidos por estudantes dos Anos Iniciais; e que Vergnaud (2009) defende que um conceito é compreendido pelo estudante ao longo do processo escolar, em decorrência das diferentes situações vivenciadas, estabelecemos o problema de pesquisa: *que ideias de função são mobilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas mistos do tipo de proporção simples e composição de medidas?*

A questão de pesquisa nos direcionou para o objetivo geral:

- Identificar ideias de função mobilizadas por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos do tipo proporção simples e composição de medidas.

Sendo os seguintes os objetivos específicos:

— *Analisar os esquemas apresentados pelos estudantes ao resolverem os problemas mistos*;

— *Identificar teoremas em ação relacionados à modelação da função afim do tipo* $f(x) = ax + b$ *mobilizados nos esquemas dos estudantes*.

Esta pesquisa, de natureza qualitativa, foi desenvolvida no segundo semestre de 2021 com treze estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental em um colégio do campo situado em um distrito pertencente à cidade de Moreira Sales. Para a produção dos dados, foram elaborados quatro problemas mistos, da classe *proporção simples e composição de medidas,* cujas variáveis didáticas foram cuidadosamente selecionadas, e estão apresentadas no Capítulo 3. Os problemas foram resolvidos pelos estudantes em grupos (duplas e trio), em horário convencional de sala de aula. Para as análises, foram considerados os diálogos entre os estudantes, que foram gravados em áudio, a produção escrita dos estudantes e o diário de bordo da pesquisadora. Em relação aos procedimentos utilizados nas análises dos dados, utilizamos como respaldo as pesquisas de Vergnaud (1996b; 2009b).

Quanto à estrutura, esta dissertação está dividida em quatro capítulos, mais a introdução e as considerações finais. A seguir, apresentamos a descrição de cada capítulo.

O Capítulo 1, intitulado *Estudos Preliminares para o Desenvolvimento da Pesquisa*, é dividido em cinco seções, a saber: 1.1 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Conceito de Função; 1.2 Aspectos Históricos do Conceito de Função: Um Breve Estudo; 1.3 Ideias Essenciais para a Construção do Conceito de Função nos Anos Inicias; 1.4 Ideias de Função Afim Atreladas ao Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais; e 1.5 Pesquisas Respaldadas na Teoria dos Campos Conceituais Relacionadas a Ideias de Função nos Anos Iniciais.

No Capítulo 2, intitulado *Aporte teórico*, apresentamos também cinco seções, sendo elas: 2.1 A Teoria dos Campos Conceituais; 2.2 Principais Elementos da Teoria dos Campos Conceituais; 2.3 As Estruturas Aditivas; 2.4 As Estruturas Multiplicativas; 2.5 Problemas Mistos; 2.5.1 A Classe de Proporção Simples e Composição de Medidas; e 2.6 Variáveis Didáticas.

O Capítulo 3, intitulado *Procedimentos Metodológicos*, aborda outras cinco seções, conforme segue: 3.1 Caracterização do Ambiente Escola; 3.2 A Educação do Campo; 3.3 Sujeitos Participantes da Pesquisa; 3.4 Elaboração do Instrumento de Pesquisa; 3.5 Estudo Piloto para a Pesquisa; e 3.5.1 Critérios Adotados para as Análises dos Dados.

No Capítulo 4, intitulado, *Análise e Discussão dos Dados*, apresentamos as análises e discussões dos dados produzidos pelos estudantes dos seis grupos, referentes aos quatro problemas propostos.

Por fim, apresentamos as considerações finais da pesquisa, as referências e os apêndices.

1 ESTUDOS PRELIMINARES PARA O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos indicações do pensamento funcional presentes na BNCC para os Anos Iniciais; algumas das principais passagens históricas relacionadas ao surgimento do conceito de função; e as principais ideias de função envolvidas na classe de problema *proporção simples e composição de medidas*, contempladas no instrumento de pesquisa desta dissertação. Trazemos também algumas ideias de função afim atreladas ao pensamento algébrico nos Anos Iniciais e, por fim, apresentamos pesquisas com respaldo na teoria dos Campos Conceituais que abordam o conceito de função nos Anos Iniciais. Finalizamos este capítulo justificando a pertinência do desenvolvimento da presente pesquisa.

1.1 A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Conceito de Função

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC – é um documento normativo, de âmbito federal, estadual e municipal, que visa orientar as práticas profissionais quanto aos conteúdos, avaliações e aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver em cada ano de ensino, de forma progressiva. É um documento que abrange os conteúdos da Educação Infantil ao Ensino Médio, contemplando assim toda a Educação Básica (BRASIL, 2018).

A BNCC é estruturada de forma a esclarecer como as aprendizagens estão organizadas em toda a Educação Básica, sendo que em cada etapa de escolaridade são explicados os códigos alfanuméricos criados para identificar tais aprendizagens. Em sua estrutura, a BNCC também explica as competências que devem ser desenvolvidas em cada ano de escolaridade (BRASIL, 2018).

Com foco no Ensino Fundamental, a BNCC menciona que essa etapa é a mais longa da Educação Básica, uma vez que tem duração de nove anos, atendendo estudantes entre 6 e 14 anos de idade. Devido a tal faixa etária, muitos desafios são impostos, uma vez que os estudantes passam, no decorrer desse período, por uma série de mudanças relacionadas a aspectos físicos, sociais, afetivos, emocionais, cognitivos, entre outros. Pensando em todos esses aspectos, a BNCC aborda a dificuldade de elaboração de currículo para essa etapa de ensino. Nesse sentido, as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de

Nove Anos (Resolução CNE/CEB nº 7/2010)[2] orientam a elaboração de currículos levando em consideração essas mudanças que marcam as vidas dos estudantes, de modo a superar as rupturas que ocorrem entre a passagem de um ano ao outro e entre a transição dos Anos Iniciais para os Anos Finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018).

Quanto às orientações do campo da Matemática no Ensino Fundamental, a BNCC afirma que:

> [...] essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações [...] (BRASIL, 2018, p. 265).

Além disso, a BNCC também orienta que seja realizado o desenvolvimento do letramento matemático no Ensino Fundamental, o qual se define como "[...] as competências e habilidades de racionar, representar, comunicar e argumentar de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos" (BRASIL, 2018, p. 266).

No mesmo documento são apresentadas oito competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental; dentre elas, é trazida pela competência de número seis a seguinte instrução:

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático- utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2018, p. 267).

Podemos verificar que a BNCC orienta quanto ao uso de situações-problema nas aulas de Matemática, pois essa é uma das competências que os estudantes têm que se apropriar

[2]BRASIL. Conselho Nacional de Educação; Câmara de Educação Básica. Resolução nº 7, de 14 de dezembro de 2010. Fixa Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos. Diário Oficial da União, Brasília, 15 de dezembro de 2010, Seção 1, p. 34. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb007_10.pdf >. Acesso em: 03 jun. 2021.

durante a sua permanência na escola. Além disso, essa competência defende que os estudantes apresentem em suas respostas diferentes registros e linguagem (BRASIL, 2018).

Na disciplina de Matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas correlacionadas que orientam quanto à formulação do desenvolvimento das habilidades que devem ser adquiridas durante o Ensino Fundamental, sendo elas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística.

A unidade temática Álgebra tem por finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, fazendo uso de letras e outros símbolos em situações e estruturas matemáticas; nos Anos Iniciais, contudo, não se propõe o uso de letras ou símbolos para expressar o pensamento algébrico, por mais simples que este possa ser e, ainda, que:

> [...] a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: "Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?" (BRASIL, 2018, p. 270).

Também é indicado na BNCC que em todas as unidades temáticas, no campo das habilidades e nos objetos de conhecimento, que as noções matemáticas sejam retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a ano. Também é disposto neste documento que a leitura dessas habilidades não pode ser analisada de forma fragmentada, uma vez que,

> [...] A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores (BRASIL, 2018, p. 276).

É importante destacar que esse mesmo documento pretende que estudante não só desenvolva habilidades de interpretar e resolver problemas, mas também que reflita e questione sobre possíveis situações quando os dados do problema são alterados. Além disso, a BNCC também orienta que o estudante seja capaz de formular problemas em outros contextos:

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: "resolver e elaborar problemas envolvendo...". Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam

> e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos (BRASIL, 2018, p. 277).

Para o Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a BNCC orienta que “[...] no que diz respeito ao cálculo, é necessário acrescentar, à realização dos algoritmos das operações, a habilidade de efetuar cálculos mentalmente, fazer estimativas, usar calculadora e, ainda, para decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento de cálculo” (BRASIL, 2018, p. 276).

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 276) orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está diretamente relacionada à “[...] apreensão de significados dos objetos matemáticos”. Devido a esse fato, o documento indica fazer uso de recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábaco, jogos, livros, entre outros, no entanto, sem deixar de apresentar as suas aplicações, pois “[...] esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018, p. 276)”. Ainda, a BNCC também afirma que “[...] os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 276).

Com o intuito de identificar *ideias de função* contidas na BNCC nos Anos Iniciais, apresentam-se, no Quadro 1, todos os objetos de conhecimento da unidade temática Álgebra, de todos os anos do Ensino Fundamental I, e algumas habilidades focadas nas ideias de função. A unidade temática Álgebra foi escolhida devido às ideias de função estarem nela inseridas.

Quadro 1 – Algumas ideias-base do conceito de função identificada nos Anos Iniciais na BNCC

ANO/ UNIDADE TEMÁTICA	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
1º ano Álgebra	Padrões figurais e numéricos: investigação de regularidades ou padrões em sequências. Sequências recursivas: observação de regras usadas utilizadas em seriações numéricas (mais 1, mais 2, menos 1, menos 2, por exemplo).	(EF01MA03) Estimar e comparar quantidades de objetos de dois conjuntos (em torno de 20 elementos), por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois) para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”. (EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

2º ano Álgebra	Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas. Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência.	(EF02MA03) Comparar quantidades de objetos de dois conjuntos, por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois, entre outros), para indicar "tem mais", "tem menos" ou "tem a mesma quantidade", indicando, quando for o caso, quantos a mais e quantos a menos. (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.
3º ano Álgebra	Identificação e descrição de regularidades em sequências numéricas recursivas. Relação de igualdade.	(EF03MA10) Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes. (EF03MA11) Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
4º ano Álgebra	Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural. Sequência numérica recursiva formada por números que deixam o mesmo resto ao ser divididos por um mesmo número natural diferente de zero. Propriedades da igualdade.	(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural. (EF04MA12) Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades. (EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
5º ano Álgebra	Propriedades da igualdade e noção de equivalência. Grandezas diretamente proporcionais. Problemas envolvendo a partição de um todo em duas	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência. (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para

	partes proporcionais.	associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018).

Podemos observar no Quadro 1 que as ideias de regularidade, correspondência, sequências e padrões estão inseridas desde o 1º ano do Ensino Fundamental I. Equivalência, igualdade e grandezas diretamente proporcionais são destinadas ao 5º ano. Todas essas ideias se fazem presentes para a construção do conceito de função, e é possível verificar que essas ideias vêm sendo propostas pela BNCC em cada ano de ensino.

Para além das informações do Quadro 1, a BNCC propõe como habilidade resolver e elaborar problemas utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros para os Anos Iniciais, e o conceito de relação, igualdade, associação e comparação, que também são termos utilizados em outras habilidades na unidade temática de álgebra para todos os anos desta etapa de ensino. Em nossa pesquisa, mostramos que estas ideias e conceitos estão associados ao conceito de função.

Levando em consideração todas as orientações e habilidades indicadas pela BNCC para os Anos Iniciais, especialmente a habilidade (EF05MA12) do 5º ano; que as ideias de regularidade, generalizações de padrões, propriedades de igualdade devem ser trabalhadas com estudantes desse nível; que noções intuitivas de função podem ser exploradas por meio de situações-problema envolvendo proporcionalidade direta entre duas grandezas (BRASIL, 2018); que estudantes do 5º ano devem resolver problemas de adição e de multiplicação; e que problemas mistos são propostos em livros didáticos dos Anos Iniciais (DANTE, 2017; RODRIGUES; REZENDE, 2021), elaboramos o instrumento desta pesquisa, com base nessas informações, para investigarmos se os estudantes dos Anos Inicias mobilizam essas ideias ao resolverem os problemas que envolvem ideias de *correspondência, dependência, regularidade, variável, generalização, proporcionalidade* e ideias intuitivas associadas à expressão $y = ax + b$.

Abarcadas as ideias de função descritas na BNCC para os Anos Iniciais, apresentamos brevemente na próxima seção os aspectos históricos do conceito de função.

1.2 Aspectos Históricos do Conceito de Função: Um Breve Estudo

Discutir o surgimento e o desenvolvimento de um conceito matemático é uma tarefa complexa e que exige cautela por parte dos pesquisadores. No caso específico do conceito de função, algumas de suas ideias, tais como correspondência, dependência, variável e regularidade, podem ser notadas desde os escritos de povos antigos, sendo a generalização a última ideia notada nos registros históricos da construção do conceito de função (CALADO; REZENDE, *no prelo*).

O conceito de função surgiu em meio à necessidade que o homem tem de entender e explicar os fenômenos de dependência e variação existentes em sua realidade (CARAÇA, 1951). Nogueira (2014), corroborando com as ideias de Caraça (1951), indica que tal conceito emergiu a partir da busca incessante de cientistas e filósofos por tentar explicar os fenômenos de causas naturais, a chamada "causa-efeito", a exemplo da vaporização da água, citada por Nogueira (2014) como um fenômeno em que ocorre a dependência entre variáveis.

Há vários estudos que indicam a origem do conceito de função com base em alguns marcos históricos de povos antigos. Os estudos de Zuffi (2016) e Youschkevitch (1976), por exemplo, mencionam alguns conceitos de função identificados em cálculos babilônicos desde cerca de 2000 a.C. Botelho e Rezende (2007) mencionam que a noção de pensamento funcional se originou por volta 600 a.C., quando Tales de Mileto tentava dar explicações lógicas aos fenômenos naturais na Grécia antiga, uma vez que até então tais explicações eram baseadas nas vontades dos deuses.

Chaves e Carvalho (2004) relatam que já eram constituídas ideias de função desde o início das civilizações antigas, quando as pessoas associaram os dedos às quantidades, e quando buscaram outros elementos para representar as quantidades maiores do que os dedos das mãos, pois eles já não eram mais suficientes para tais representações. Para Ponte (1990) e Ubiratan D'Ambrosio (2006), o conceito individualizado de função como objeto de estudo matemático só começou a se formalizar a partir do século XVII.

Youschkevitch (1976) cita três fases principais do desenvolvimento da noção de função, sendo elas: a Antiguidade, quando as noções de variáveis ainda não eram apresentadas nos estudos de dependências entre duas quantidades; a Idade Média, quando as noções de funções eram descritas de forma geométrica e mecânica, porém as descrições verbais ou gráficas ainda prevaleciam; e, a Idade Moderna, século XVII, época em que se destacam as contribuições de vários estudiosos, como Galileu Galilei, Descartes, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Lagrange, Cauchy e Dirichlet, culminando com a definição do conceito de função.

O astrônomo, físico e engenheiro florentino Galileu Galilei (1564-1642) deu a sua contribuição ao conceito de função ao utilizar o quantitativo em suas representações gráficas. Já o filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596-1650) utilizou equações em x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis; entretanto, foi por meio dos estudos do matemático, físico e astrônomo inglês Isaac Newton (1643-1727) e do filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que surgiram as contribuições efetivas para esse conceito (ZUFFI, 2016). Newton, em sua teoria sobre "fluentes", termo este utilizado por ele para descrever suas ideias sobre função, abordava ideias relacionadas à noção de curva e às "taxas de mudanças" de quantidades variáveis (CARAÇA, 1951). Na década de 1670 foi utilizado pela primeira vez o termo "função", por Leibniz, para se referir a quantidades dependentes (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006).

Algumas definições de funções foram surgindo ao longo da história. A partir da definição proposta por Bernoulli (1667-1748), de que a função de uma quantidade variável é uma quantidade que de alguma forma é composta por essa variável e quantidade constante (SIERPINSKA, 1992), surgiram outras definições, como por exemplo, a definição proposta pelo matemático e físico suíço Leonhard Euler (1707-1783), discípulo de Johamn Bernoulli, que substituiu, em 1748, o termo "quantidade" por "expressão analítica". Foi Euler também quem introduziu a notação $f(x)$:

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica, composta de alguma maneira desta mesma quantidade e números ou quantidades constantes. Assim, qualquer expressão analítica a qual, além da variável z, contém também quantidades constantes, é uma função de z. Por exemplo: $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b/aa - zz$; czetc; são funções de z (LABEY, 1977[3] *apud* SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Outra definição para o conceito de função é dada pelo matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813):

> Chama-se função de uma, ou várias quantidades, toda expressão de cálculo na qual estas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que se veem como valores dados e invariáveis, de modo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções considera-se somente as quantidades que se consideram variáveis, sem

[3] My translation from: **Introduction à B'Analyse Infinitésimale**, traduite Du au français par J. B. Labey, 1977, Paris.

consideração às constantes que podem estar aí misturadas (SIERPINSKA, 1992, p. 45).

Para o matemático francês Augustin Cauchy (1789-1857), a definição de função foi descrita da seguinte forma: são chamadas de funções de uma ou mais grandezas variáveis as grandezas que aparecem no cálculo como resultados de operações realizadas em uma ou mais quantidades constantes ou variáveis (SIERPINKA, 1992).

Durante a transição do século XVIII para o século XIX surgiu outra definição de função, a saber, como sendo correspondência entre variáveis dependentes e independentes, reconhecida como $y = f(x)$ (D'AMBROSIO, 2006). Tal definição foi estabelecida pelo matemático alemão Johamn Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), o qual apresentou, em 1837, a definição geral de função que foi aceita até meados do século XX: "[...] se uma variável y está relacionada a uma variável x de forma que, ao atribuir um valor numérico qualquer a x, há uma regra segundo a qual um único valor de y é determinado, então diz-se que y é uma função da variável independente x" (BOYER, 1968, p. 452 *tradução nossa*)[4].

A partir do século XX, momento em que se inicia o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, tendo como precursor o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918), a noção de função passa a incluir as correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, sendo eles numéricos ou não (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006).

Dentre as informações históricas apresentadas em relação ao surgimento do conceito de função, apresentamos a definição atual deste conceito, a qual se assemelha à definição dada por Dirichlet: sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos numéricos, diz se que y é função de x, representada matematicamente por $y = f(x)$, se entre as duas variáveis, existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. Ao qual, x é denominado de variável independente e y de variável dependente (CARAÇA, 1951).

Mesmo tendo a definição do conceito de função bem estabelecida, as ideias de "função" e "expressão analítica" [5] vêm sendo confundidas na linguagem e na escrita dos matemáticos, conforme aponta Caraça (1951). A função se refere à relação da variação de quantidades, é uma correspondência entre dois conjuntos numéricos, que utiliza-se de variáveis para que seus elementos sejam representados, por exemplo: seja x um valor

[4] Trecho original: "*If a variable y is so related to a variable x that whenever a numerical value is assigned to x, there is a rule according to which a unique value of y is determined, then y is Said to be a function of the independent variable x*" (BOYER, 1968, p. 452).

[5] Expressão analítica "[...] é apenas um modo de estabelecer a correspondência das duas variáveis (CARAÇA, 1951, p. 131).

qualquer pertencente ao conjunto numérico A, e y outro valor qualquer pertencente ao conjunto numérico B, x representa uma variável do conjunto A que se relaciona com y que representa outra variável do conjunto B, e se houver uma correspondência de x em y, ou seja, $x \rightarrow y$, isso significa que y é função de x, representado matematicamente como sendo $y\ (x)$ (CARAÇA, 1951). Já em uma função tida como uma expressão analítica, conforme Jean Bernoulli defendia no início do século XVIII, não é evidenciada a dependência entre duas variáveis, ou seja, a partir de um conjunto de operações só é possível fazer corresponder a cada valor de x um único valor b de y (CARAÇA, 1951).

De modo geral, podemos observar que a construção do conceito de função não ocorreu de forma rápida e precisa: foi necessário contar com as contribuições de vários estudiosos ao longo da história, o que impôs diversas modificações, para chegarmos à definição de função como a temos na atualidade. Segundo Calado e Rezende (*no prelo*), foram necessários "[...] mais de 20 séculos de experiências, descobertas e disparidades para que este conceito fosse formalizado tal como atualmente é concebido pela comunidade de matemáticos" (CALADO; REZENDE, *no prelo*, p.2).

Com isso, podemos deduzir que esse conceito não é simples de ser compreendido pelos estudantes, uma vez que foram séculos de estudos para que ele fosse formalizado. As pesquisas de Calado e Rezende (*no prelo*), Rossini (2006), Silva (2008), Pavan (2010), Bernardino (2019), Rezende, Nogueira e Calado (2020) já demonstram que o estudo desse conceito é complexo e causa dificuldades nos estudantes; porém esse conceito é considerado por Caraça (1951) fundamental na Matemática, daí a importância de serem trabalhadas ideias de função desde os Anos Iniciais para que, ao chegarem ao 9º ano, momento em que este conceito é formalizado, os estudantes tenham maiores conhecimentos para compreendê-lo.

Tendo apresentado algumas passagens históricas do conceito de função, apresentamos na seção seguinte as ideias essenciais para a construção deste conceito, sendo elas: as ideias-base - *variável*, *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *generalização* – e a proporcionalidade, que serviram de base para a elaboração do instrumento desta pesquisa.

1.3 Ideias Essenciais para a Construção do Conceito de Função nos Anos Iniciais

Diversos autores (CARAÇA, 1951; TINOCO, 2002; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006; PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020), defendem que, para compreender o conceito de qualquer tipo de função (afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, entre outras), é necessário compreender as *ideias-base* de função: *variável*, *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *generalização*.

Sendo assim, assumimos nessa pesquisa que, para a construção do conceito de função, é necessário analisar a manifestação das ideias-base de *variável*, *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *generalização e* a ideia de *proporcionalidade*, pois isso é previsto pela BNCC (BRASIL, 2018) desde os Anos Iniciais.

Com base em Pavan (2010), consideramos que as ideias-base de função devem ser estudadas desde os Anos Iniciais[6], assim como a ideia de proporcionalidade (BRASIL, 2018). A resolução de problemas pode ser utilizada para explorar a noção intuitiva de função envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas. “[...] No entanto, nessa fase, não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam” (BRASIL, 2018, p. 270), ou seja, as ideias necessárias para a construção do conceito de função, em especial da função afim, podem ser propostas aos estudantes desde os Anos Iniciais. Porém, a formalização do conceito de função ocorre no 9º ano do Ensino Fundamental, e é retomada com aprofundamento no Ensino Médio.

A *variável* é um dos elementos mais importantes na construção da noção de função. Para a sua identificação, é comumente usada uma letra para a sua representação. No entanto, esta ideia causa dificuldades na compreensão da noção de função pelos estudantes (CARAÇA, 1951; TINOCO, 2002; 2011). Talvez isso ocorra pelo fato de os estudantes não assimilarem o papel que uma variável exerce em uma função, ou pelo fato de eles confundirem, ou não conhecerem, a diferença entre uma variável e uma incógnita. Essa dificuldade ainda pode existir, conforme apontado por Nogueira (2014), pelo fato de uma variável representar um número arbitrário e não um número específico.

Queiroz (2008) menciona que a variável pode representar diferentes papéis de acordo com a situação dada. Essas diferentes situações podem envolver gráficos, tabelas, problemas verbais ou expressões analíticas. Segundo o mesmo autor, para a compreensão de função é de fundamental importância perceber a correspondência entre as variáveis, e que, ao se alterar uma variável, se note a mudança da outra. Isso significa dizer que esse reconhecimento se dá pela capacidade de encontrar o valor de uma das variáveis quando se tem o conhecimento do valor da outra. Essas diferentes situações podem envolver gráficos, tabelas, problemas verbais ou expressões analíticas.

---

[6] Consideramos “Anos Iniciais” como sendo os anos iniciais do Ensino Fundamental I - 1º ao 5º ano.

A *correspondência* também é outro elemento primordial para a compreensão do conceito de função. É possível identificar o uso de correspondência biunívoca desde as civilizações antigas, antes mesmo de serem formalizadas as representações dos números, quando relacionavam o conjunto de pedras com o conjunto de ovelhas. Nesse sentido, Caraça (1951), em sua obra, enfatiza a importância que a ideia de correspondência tem para a Matemática.

Para Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 31) a correspondência "[...] é um dos aspectos essenciais da Matemática e uma das primeiras formas de pensamento matemático a se manifestar, como por exemplo, na comparação da quantidade de objetos de duas coleções". Em uma contagem realizada pela criança, a pesquisa cita que a correspondência é feita "[...] pelo apontamento do dedo (ou olhar) a cada um dos objetos a serem contados, ao mesmo tempo em que recita a sequência de palavras-número, um, dois, três, e assim sucessivamente, até esgotar os objetos da coleção" (p. 31).

A *dependência*, segundo Tinoco (2002), é a relação entre grandezas variáveis, na qual uma grandeza depende da outra. Em uma relação funcional, a variável dependente é uma grandeza que será determinada mediante a variação de outra grandeza, a variável independente, ou seja, temos uma das grandezas dependendo da outra. Caraça (1951) e Nogueira (2014) apresentam que a dependência entre grandezas variáveis torna o conceito de função o mais importante da Matemática, devido à sua dinamicidade. Ainda, "[...] sem a noção de dependência entre grandezas variáveis, seria impossível representar mesmo que apenas graficamente o movimento de algum objeto. Por essa razão, exemplos utilizando 'espaço de frenagem' de veículos sejam tão utilizados na introdução desse conceito" (NOGUEIRA, 2014, p. 40).

Segundo Rezende, Nogueira e Calado (2020, p. 32), "[...] a relação de dependência das variáveis é o que faz a função ser aplicada, movimentada e retratada com certas regularidades". Para as pesquisadoras, o estudante pode observar a variável correspondente a um determinado valor na função aplicada, e que, ao alterar essa variável, poderá descobrir que o valor correspondente na função também se altera. Isso evidencia que existe uma dependência entre as variáveis e que, no caso, o valor final da função dependerá da variável utilizada.

Em relação às situações a serem trabalhadas em sala de aula, Pavan (2010) menciona a importância de propor aos estudantes problemas com duas variáveis, em que é preciso determinar o valor de uma variável para descobrir o valor da outra, para fortalecer a ideia de função como relação de dependência entre duas variáveis. A autora traz como exemplo o fato de "[...] o preço que se tem de pagar por certa mercadoria é feito de acordo com a quantidade de mercadoria que se compra. Assim, o preço depende da quantidade (peso), logo o preço é função da quantidade" (PAVAN, 2010, p. 26).

Reconhecer a *regularidade* em uma situação funcional é, para Tinoco (2002), uma habilidade essencial para a construção do conceito de função. A regularidade pode ser observada não somente nas relações funcionais, como também em sequências numéricas, situações reais, padrões geométricos, fórmulas e outros.

A regularidade surge nas sequências em que há padrões a serem observados, e com isso, é possível prever dados futuros. No caso de uma sequência numérica, por exemplo, ao detectar o padrão existente, podemos determinar os próximos termos devido a essa regularidade presente. Tal identificação de regularidade nesses padrões é tida por Caraça (1951) como extremamente importante, uma vez que ela irá permitir fazer previsões e detectar as repetições.

Pavan (2010) e Nogueira (2014) consideram importante propor situações que envolvem regularidades desde a Educação Infantil, uma vez que as regularidades aparecem em sequências que possuem padrões; sendo assim, pode-se trabalhar com desenhos em turmas com crianças menores, e sequências numéricas com as crianças maiores.

Ademais, Pavan (2010) menciona que, após a identificação da regularidade, é possível estabelecer uma *generalização*, capacidade envolve abstração. Também afirma a autora que:

> [...] Muitas vezes, os alunos generalizam situações que apresentam regularidades, verificando apenas se certa lei se aplica a casos particulares. É preciso que desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os. O registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito de função, embora não seja fácil (PAVAN, 2010, p. 27).

Nesse sentido, Tinoco (2002) aponta que é necessário que os estudantes "[...] desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os. Os registros de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito de função" (TINOCO, 2002, p. 6), uma vez que muitos estudantes apresentam generalizações apenas para alguns casos particulares em relações funcionais.

Caraça (1951) expõe que a generalização não ocorre somente após a identificação da regularidade; segundo ele, a generalização envolve todos os conceitos-base de função, e para que haja a generalização, é preciso que se tenha uma correspondência entre dois conjuntos numéricos, o que envolve a dependência entre duas variáveis; assim, só após identificar a regularidade é que será possível observar o padrão existente para apresentar a generalização.

Para Nunes (2003), a ideia de *proporcionalidade* é um conceito essencial para o ensino das quatro operações – multiplicação, divisão, adição e subtração. Para a autora, a proporcionalidade envolve tanto frações como multiplicação, estando presente em todas as áreas de conhecimento e fazendo parte do cotidiano de qualquer pessoa.

Nunes (2003) menciona, em entrevista à "Nova Escola", que a proporcionalidade é um conceito simples na sua origem, sendo a relação entre duas variáveis. A autora indica que muitas vezes a escola não relaciona a proporcionalidade com a multiplicação. Para ela, no início da escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação, porém, muitos docentes ensinam essa operação como sendo apenas uma "adição repetida" de parcelas, não fazendo relação com a noção de proporção. Para a autora, a adição repetida de parcelas não demonstra o sentido de proporção que há por trás dessa conta, sendo somente no 5º ano que a proporção aparece.

Nunes (2003) ainda menciona que o raciocínio proporcional surge quando se ensina a multiplicação usando o raciocínio de correspondência e quando é estimulada uma representação para a relação entre duas variáveis.

A ideia de proporcionalidade é identificada em funções lineares que são modelos matemáticos para problemas de proporcionalidade, sendo definidas como $f(x) = ax$, significando que a "[...] grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado de constante de proporcionalidade) tal que $y = ax$ para todo valor de x" (LIMA *et al.*, 2016, p. 96). Em uma função afim, se olharmos somente para a parte multiplicativa, tem-se a ideia de proporcionalidade envolvida, pois essa parte está associada a uma função linear.

A ideia de proporcionalidade "[...] é assinalada, na representação gráfica, pela noção de declividade, que é, ao mesmo tempo, a relação passiva entre os valores de y ou $f(x)$ e os correspondentes valores de x e o coeficiente multiplicador das variações de x que permite calcular as variações correspondentes de y" (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 33-34).

Para Vergnaud (1993), muitos conceitos seriam mais bem aproveitados se o ensino de proporcionalidade fosse devidamente reconhecido; também segundo o autor, os conceitos de "[...] fração, quociente, número racional, produto e quociente de dimensões, escalar, função linear e n-linear, combinação e aplicação linear" (p. 16) assumem sentidos nos problemas de proporção se desenvolvendo como instrumento de raciocínio muito antes de serem tratados como objetos matemáticos.

Tendo apresentado as ideias-base do conceito de função juntamente com a ideia de proporcionalidade, que assumimos nesta pesquisa como ideias essenciais para a construção do conceito de função, apresentamos na seção seguinte as ideias de função afim sendo analisadas por meio do pensamento algébrico, mais especificamente, pelo pensamento funcional dos estudantes dos Anos Iniciais.

1.4 Ideias de Função Afim Atreladas ao Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais

Nesta seção apresentamos estudos envolvendo ideias associadas à modelação algébrica da função afim, ou seja, à expressão $f(x) = ax + b$. Será também abordada sua associação aos problemas mistos, envolvendo elementos do campo aditivo e multiplicativo que permitem ser trabalhados com os estudantes dos Anos Iniciais. Cautelosamente, procuramos guardar as habilidades esperadas para os estudantes dos Anos Iniciais, ou seja, as representações possíveis sem formalidade algébrica.

Para tanto, apresentamos a modelação algébrica da função afim relacionada ao pensamento algébrico, indicada pela BNCC para serem desenvolvidas com estudantes desde os Anos Iniciais. Para essa faixa etária, é indicado o uso do pensamento algébrico sem o uso de símbolos ou letras para representá-las (BRASIL, 2018).

Devido à possibilidade de trabalhar o pensamento algébrico nos Anos Iniciais, elaboramos instrumento de pesquisa com problemas do tipo misto, pois tais problemas abordam, em suas resoluções, o campo aditivo (adição ou subtração) e o campo multiplicativo (multiplicação ou divisão) (VERGNAUD, 2009b). Em se tratando de problemas mistos, eles foram elaborados com a possibilidade de serem modelados na forma da função afim $f(x) = ax + b$, embora não tivéssemos a intenção de que os estudantes utilizassem notações algébricas, mas que pudessem desenvolver ideias associadas a este conceito.

Blanton e Kaput (2005, p. 413) descrevem que o pensamento algébrico é "[...] um processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações por meio de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade".

Segundo Coletti (2020), a álgebra inicial, ou a álgebra voltada para os Anos Iniciais, sendo definida como *Early Algebra*, se refere à construção de um modo de pensar antes do uso de uma linguagem algébrica. Nesse sentido, a autora destaca ser mais viável utilizar a denominação “pensamento algébrico” em vez de “álgebra”.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) enfatizam que a linguagem é a expressão de um pensamento e que, portanto, pode ser considerada no pensamento algébrico – também caracterizado pelos autores: “[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, pg. 87).

Blanton e Kaput (2005) indicam duas vertentes que emergem do pensamento algébrico: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. A aritmética generalizada é caracterizada pela generalização das operações e pelo pensamento relacional dos números; o pensamento funcional é caracterizado pela descrição da variação numérica em um certo domínio, abarcando ideia similar ao conceito de função, podendo “[...] ser desenvolvida a simbolização de quantidades, operações com elas, além da determinação de relações funcionais e representação gráfica que podem subsidiar a previsão de resultados” (NUNOMURA; SILVA; VERTUAN, 2019, p. 4). Nesse sentido, o pensamento funcional “[...] envolve a descrição e identificação de relações nas quais se exploram as regularidades numéricas ou geométricas, a variação de quantidades e a determinação de valores particulares em que haja grandezas interdependentes” (OLIVEIRA; PAULO, 2021, p. 7).

Para Blanton e Kaput (2005), a modelação enfatiza a forma de expressar as generalizações construídas por meio da exploração de diversas situações matemáticas, ou seja, “[...] na modelação há a expressão por meio da linguagem que deverá ir em direção à formalização ou à linguagem simbólica (OLIVEIRA; PAULO, 2021, p.8).

O trabalho centrado na proposta da *Early Algebra* “[...] procura elaborar tarefas que privilegiam uma forma particular de organização do pensamento, estreitando a relação entre o raciocínio matemático e a linguagem algébrica” (BONI; FERREIRA; GERMANO, 2013, p. 13). Nesse sentido, Jesus, Cyrino e Oliveira (2018) afirmam que trabalho com tarefas desafiadoras proporcionam processos de ensino e de aprendizagem centrados na compreensão dos estudantes. No âmbito das tarefas desafiadoras, cabe ao professor:

> [...] aceitar/valorizar e compreender as diferentes estratégias utilizadas pelos alunos; aceitar/reconhecer que o aluno pode lidar com tarefas de elevada demanda cognitiva; valorizar o processo e não somente as respostas corretas; solicitar e incentivar que os alunos apresentem justificativas para suas resoluções e partilhem suas ideias; apoiar o pensamento matemático do aluno; utilizar as ideias dos alunos para sustentar as discussões e o processo de sistematização das ideias matemáticas; construir relação

> de confiança na capacidade de os alunos se envolverem nesse tipo de tarefa; considerar o nível de escolaridade, a idade e os conhecimentos prévios dos alunos na escolha da tarefa, e trabalhar com as inseguranças dos alunos. Assim, o professor precisa prestar atenção na escolha das tarefas para não priorizar somente aquelas que possuem "aparência" de desafiadoras, mas não o são (JESUS; CYRINO; OLIVEIRA, 2018, p. 42).

Dessa forma, assim como mencionam Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico precisa ser explorado por meio de situações que envolvam a aritmética generalizada, analisando padrões e modelagem. Além disso, os autores ainda indicam que o trabalho com o pensamento algébrico nos Anos Iniciais, *Early Algebra*, pode ser desenvolvido por meio de tarefas que valorizem a generalização e que explorem o sentido numérico, levando em conta o modo de expressão e análise do estudante.

Para Kaput (1999), o foco do pensamento algébrico está relacionado ao processo de generalizar:

> [...] a generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objetos de nível superior para o raciocínio ou comunicação) (KAPUT, 1999, p. 6).

O autor ainda enfatiza que:

> [...] expressar a generalização significa acomodá-la numa linguagem, seja uma linguagem formal, ou, para crianças mais jovens, em entoações e gestos. No caso de alunos jovens, identificar a expressão da generalidade ou a tentativa de que uma declaração acerca de um caso particular seja tomada como geral pode requerer o ouvido atento e qualificado do professor que sabe como ouvir cuidadosamente as crianças (KAPUT, 1999, p. 6).

Considerando o pensamento algébrico *Early Algebra* com foco no pensamento funcional, analisamos as soluções dos estudantes como exposto por Blanton e Kaput (2005), além, é claro, de analisar os *teoremas em ação*, os esquemas e as ideias de função manifestados pelos estudantes de acordo com Vergnaud (2009b).

Na presente pesquisa, adotamos olhar voltado para o pensamento funcional mobilizado pelos estudantes dos Anos Inicias ao resolverem cada problema, conforme indicam Blanton e Kaput (2005). Os quatro problemas mistos do instrumento de pesquisa podem ser modelados em sua solução como sendo a função afim do tipo $f(x) = ax + b$, além de possibilitarem a manifestação das ideias de regularidade, correspondências, dependência, variável, generalização e proporcionalidade.

Na seção seguinte, apresentamos as pesquisas, com base na teoria dos Campos Conceituais, que abordam ideias de função, pensamento algébrico ou pensamento funcional nos Anos Iniciais.

1.5 Pesquisas Respaldadas na Teoria dos Campos Conceituais Relacionadas a Ideias Função nos Anos Iniciais

O objetivo desta seção é apresentar pesquisas que foram analisadas com o intuito de justificar o desenvolvimento desta dissertação de mestrado.

Primeiramente, foi realizado lavamento de dados em busca de Teses e Dissertações contidas no Banco de dados da CAPES[7], com a utilização da palavra "Vergnaud" no campo de pesquisas. Dentre os trabalhos que emergiram, realizou-se uma análise para verificar quais deles abordavam a teoria dos Campos Conceituais voltada para o conceito de função e, em seguida, uma segunda análise foi realizada para verificar quais desses eram voltados aos Anos Iniciais. Além disso, também realizamos alguns estudos no GEPeDiMa, os quais nos permitiram o conhecimento de outros trabalhos que envolvem o conceito de função nos Anos Iniciais com respaldo na teoria dos Campos Conceituais.

Assim, citamos as seguintes pesquisas, que apresentam respaldo na teoria dos Campos Conceituais envolvendo o conceito de função nos Anos Iniciais: Pavan (2010), Magina e Porto (2018), Beck (2018), Silva (2021) e Rodrigues (2021); apresentamos, na sequência, um breve resumo do que contempla cada uma das pesquisas mencionadas.

A pesquisa de mestrado de Pavan (2010) teve como objetivo investigar se crianças da 4ª série (atual 5º ano) do Ensino Fundamental reconhecem e mobilizam elementos do Campo Conceitual de Função (como variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização) na resolução de situações-problema de estruturas aditiva e/ou multiplicativa. Para esta pesquisa, a pesquisadora propôs cinco baterias de atividades, cujos objetivos diferem: a primeira bateria consiste em analisar a ideia de correspondência; a segunda, as

---

[7]CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Catálogos de Teses e Dissertações. Disponível em: https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

ideias de variável e generalização; a terceira, a ideia dependência; a quarta, a ideia de regularidade, e a quinta, a de proporcionalidade.

Pavan (2010) constatou diversos esquemas de resolução e identificou teoremas em ação manifestados nas respostas dos estudantes a partir de gestos, manifestações orais e registros escritos. A pesquisadora concluiu que os resultados alcançados indicam que os estudantes mobilizam, mesmo que de forma intuitiva, as ideias-base de função; por esse motivo, as funções podem ser trabalhadas desde a primeira fase do Ensino Fundamental, para que posteriormente sejam ampliados e consolidados os conhecimentos a respeito desse conceito.

Magina e Porto (2018), em seu artigo publicado no VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM – analisam as estratégias utilizadas por 80 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem três situações-problema que envolvem o conceito de função. Para esse estudo, a pesquisa toma como base a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996a) e as investigações sobre *Early Algebra*, termo utilizado em vários países no tocante aos estudos que envolvem a álgebra nos Anos Iniciais.

Para a pesquisa, o raciocínio funcional encontra-se presente em situações aritméticas e algébricas, surgindo quando se buscam generalizações, como por exemplo, em situações multiplicativas simples, como: sabendo que uma motocicleta tem 2 rodas, quantas rodas têm 9 motocicletas? Essa situação pode ser expressa algebricamente por$f(x) = 2x$, estabelecendo uma relação funcional linear entre a quantidade de rodas e quantidade de motocicletas, uma vez que a quantidade de rodas depende da quantidade de motocicletas (MAGINA; PORTO, 2018).

As autoras concluem que foi possível observar que os estudantes apresentam competências necessárias à formação do raciocínio funcional, o que permite que sejam trabalhadas nos Anos Iniciais, porém, desde que o professor "[...] tenha conhecimento do teorema-em-ação que subjaz o comportamento do estudante; e ainda que utilize os conhecimentos intuitivos dos estudantes para transformá-lo em conhecimento explícito no que se refere a uma função" (MAGINA; PORTO, 2018, p. 11).

Beck (2018) aplicou, em sua pesquisa de doutorado, quatro atividades abordando as principais noções algébricas que já foram estudadas anteriormente com os participantes da pesquisa, sendo: problema da balança, copos comutativos, álgebra das mesas e problema das balas. O objetivo do autor consistiu em descrever e analisar os invariantes operatórios utilizados por 24 estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental em situações que envolvem o pensamento algébrico. O pesquisador utiliza nos procedimentos metodológicos e na coleta e análise dos dados o Método Clínico de Piaget, concluindo, após as análises, que o pensamento algébrico pode ser estimulado desde os Anos Iniciais por meio de intervenções pedagógicas que possam mobilizá-lo.

A pesquisa de doutorado de Silva (2021) busca analisar a compreensão das ideias-base de função por meio da resolução de uma sequência de 22 problemas de estruturas multiplicativas por estudantes do 5º ano. Os estudantes foram separados em grupos e, após as análises das resoluções, a autora conclui que "[...] as ideias de *correspondência, dependência, regularidade, variável e generalização* foram mobilizadas pelos grupos durante a resolução da sequência de problemas de estruturas multiplicativas implementada, resultado que corrobora com o apresentado por Pavan (2010)" (SILVA, 2021, p. 292).

A pesquisadora também menciona que, em todos os grupos, a forma operatória do conhecimento, que é o saber fazer acerca das relações e propriedades dos objetos, foi manifestada com mais facilidade do que a forma predicativa do conhecimento, que é o saber explicitar, sendo a ideia de regularidade a mais manifestada tanto na forma operatória quanto na forma predicativa do conhecimento. Já a ideia de correspondência foi a ideia-base que mais causou equívocos de resolução nos grupos em ambas as formas do conhecimento, sendo que a maior dificuldade se deu em relação às ideias de generalização, variável *e* correspondência, seguidas da ideia de dependência.

Rodrigues (2021), em sua pesquisa de mestrado, analisou os invariantes operatórios associados ao conceito de função com 12 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Para isso, a pesquisadora aplicou quatro problemas mistos do tipo *proporção simples e transformação de medidas*. A aplicação dos problemas ocorreu via *Google Meet*, de forma individual e com estudantes de diferentes escolas. Nas análises, Rodrigues (2021) considerou as resoluções escritas dos estudantes e os diálogos que teve com eles.

Após as análises dos esquemas dos estudantes, Rodrigues observou a presença de quinze (15) teoremas em ação verdadeiros e dois (2) teoremas em ação falsos, e mais dezesseis (16) conceitos em ação associados a esses teoremas em ação. Dentre os conceitos em ação surgidos, Rodrigues (2021) identificou a mobilização das ideias-base de função: *correspondência, dependência, variável, regularidade* e *proporcionalidade*.

Observando os trabalhos supracitados, apresentamos as principais justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa, mostrando o seu diferencial com relação às demais. A presente pesquisa envolve problemas mistos do tipo *proporção simples e composição de medidas* - embora a pesquisa de Rodrigues (2021) também contemple problemas mistos, a classe de problemas considerada pela autora é *proporção simples e transformação de medidas*, que diverge da classe proposta nesta pesquisa:

— A classe de *proporção simples e composição de medidas,* selecionada para esta pesquisa, foi a classe mais identificada em livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio (MIRANDA, 2019) e a mais identificada nos Livros Didáticos dos Anos Iniciais da Coleção Ápis de Dante (2017) (REZENDE; RODRIGUES, 2021);

— Os problemas de *proporção simples e composição de medidas* envolvem a relação aditiva e a relação multiplicativa em suas resoluções, podendo ser modelados por meio da expressão: $f(x) = ax + b$ relacionadas à função afim;

— A presente pesquisa foi desenvolvida no contexto de sala de aula, em horário convencional de aula, com os estudantes organizados em grupos, proporcionando diálogos entre eles, e interação com a pesquisadora após a resolução pelos grupos. Esse procedimento constitui diferencial outro além da classe de problemas, da pesquisa de Rodrigues (2021), cujos dados foram produzidos online, via *Meet*, com os estudantes resolvendo individualmente, na forma de entrevista com a pesquisadora;

— A noção intuitiva de função é prevista pela BNCC (2018, p. 270) para ser explorada "[...] por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas" desde os Anos Iniciais;

— O conceito de função não é simples de ser estudado, causando dificuldades de compreensão para os estudantes (CALADO; REZENDE, *no prelo*; ROSSINI, 2006; SILVA, 2008; PAVAN, 2010; BERNARDINO *et al.*, 2019; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020);

— Vergnaud (2009) defende que a compreensão de um conceito ocorre por meio de diferentes situações vivenciadas ao longo do processo escolar;

— Defendemos a importância de ideias de função serem desenvolvidas por estudantes desde os Anos Iniciais, para serem aprimoradas durante o processo escolar, para que possam ser formalmente oficializadas no 9º ano do Ensino Fundamental e aprofundadas na 1ª série do Ensino Médio.

Sendo assim, justificamos a pertinência do desenvolvimento da presente pesquisa, garantindo que ela difere das que se apresentaram anteriormente.

Com isso, a partir destas justificativas, apresentamos, no Capítulo 2, o referencial teórico que sustenta esta pesquisa: a Teoria dos Campos Conceituais.

2 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo são apresentados elementos da teoria dos Campos Conceituais, que sustentam o desenvolvimento desta pesquisa. Para tanto, este capítulo está organizado em seções que contém: aspectos gerais da teoria; elementos principais que sustentam a teoria e o desenvolvimento da pesquisa; os campos conceituais aditivo e multiplicativo; e problemas mistos e suas classificações, a partir das classificações dos campos aditivo e multiplicativo. Por fim, discutimos e exemplificamos a classe de problema misto *proporção simples e composição de medidas*, foco da elaboração do instrumento de pesquisa, e as variáveis didáticas presentes nos problemas.

2.1 A Teoria dos Campos Conceituais

Gérard Vergnaud, nasceu em Doué-la-Fontaine, na França no dia 08 de fevereiro de 1933 e faleceu no dia 06 de junho de 2021. Formado em psicologia e Doutor em Educação Matemática, foi orientado por Jean Piaget durante o período de seu doutoramento. Vergnaud realizou diversos estudos sobre a Psicologia Cognitiva, e a mais importante de suas contribuições para o campo científico foi a elaboração da teoria dos Campos Conceituais - TCC. A referida teoria foi desenvolvida a partir do início dos anos de 1970, e o pesquisador informa que a desenvolveu para "[...] melhor compreender os problemas de desenvolvimento específicos no interior de um mesmo campo de conhecimento", denominado de campo conceitual (VERGNAUD, 1996b, p.11).

Segundo Bittar (2009), a teoria dos Campos Conceituais originou-se com o estudo das estruturas aditivas e multiplicativas, e é nesse âmbito que se concentra a maioria das pesquisas que usam a TCC como referencial teórico. Ademais, "[...] reflexos desses estudos podem ser sentidos, no Brasil, nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, séries iniciais, o que tem consequência direta sobre os textos dos livros didáticos destinados a essas séries". Este fato é notado em especial no que se refere às operações – multiplicação, divisão, adição e subtração (BITTAR, 2009, p. 53).

A teoria dos Campos Conceituais é uma "[...] teoria cognitivista, que visa proporcionar um quadro coerente e alguns princípios básicos para o estudo do desenvolvimento e aprendizagem de habilidades complexas, incluindo as decorrentes da ciência e tecnologia" (VERGNAUD, 1996a, p. 155). É por isso que, mesmo tendo emergido a fim de explicar o desenvolvimento do interior de um campo específico de conhecimento, para melhor compreender o processo de conceitualização das estruturas aditivas, das estruturas multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra, ela não se limita somente à Matemática, podendo ser utilizada, da mesma forma, em outras áreas de conhecimento (VERGNAUD, 1996a).

Vergnaud afirma que o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio por parte do aprendiz vai acontecendo no decorrer do tempo, por meio da experiência, maturidade e aprendizagem (MOREIRA, 2002). Entretanto, para que o estudante se aproprie de um determinado conceito, é necessário que ele vivencie diversas situações que possibilitem a elaboração de novos esquemas[8]. Isso permite ao professor o estudo das ações dos estudantes, bem como das condições de produções e comunicações durante a aprendizagem em sala de aula.

Vergnaud contempla contribuições de Piaget e de Vigotsky para a teoria dos Campos Conceituais. As ideias de adaptação, equilibração e esquema, que são apresentadas em sua teoria, derivam dos trabalhos de Piaget, e a importância que Vergnaud atribui para o papel da interação social, da linguagem e da formação de símbolos no processo de aquisição de um determinado conceito por parte dos estudantes, advém de Vigotsky (MOREIRA, 2002).

Assim, a TCC (VERGNAUD, 2017) fundamenta-se em algumas ideias básicas, a saber: (1) O sentido para um determinado conceito ocorre por meio de uma variedade de situações vivenciadas; (2) Os conceitos não funcionam se forem trabalhados isoladamente, são necessários vários conceitos vinculados em uma ampla e complexa rede; (3) O aprendizado de todas as propriedades e relações que esses conceitos acarretam se dá ao longo do tempo, entrelaçada por uma série de filiações e rupturas; (4) Por meio das ideias anteriores pode-se definir um critério de conhecimento pragmático, em que um conceito não se refere apenas à sua definição explícita, mas sim à sua capacidade de resolver situações-problema.

2.2 Principais Elementos da Teoria dos Campos Conceituais

Vergnaud estabelece diversos elementos que são essenciais para a teoria dos Campos Conceituais. Discorremos nesta seção sobre: campo conceitual, conceitos, esquemas,

[8] As abordagens referentes às "situações" e aos "esquemas" estão detalhadas na seção seguinte.

situações, invariantes operatórios, significados e significantes, que também se fazem essenciais para a presente pesquisa.

O Campo Conceitual, conforme proposto na TCC (VERGNAUD, 2009a; 2013), tem como principal entrada um conjunto de situações relacionadas a um conceito. O termo conceito é tão importante nesta teoria que Vergnaud apresenta uma definição, do ponto de vista psicológico, para um conceito, como sendo: o conjunto C composto pela tríade C = {S, I, R}, sendo: S o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência); I o conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização e operação dos esquemas, ou seja, ao resolver as situações propostas (o significado); e R o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que estão relacionadas à representação do próprio conceito (o significante) (VERGNAUD, 1990, p. 145; 1996a, p. 166; 2009a, p. 29; 2009b).

Para Vergnaud, "[...] um conceito não pode ser reduzido à sua definição, pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança" (1996a, p. 156).

Magina *et al.* (2001) também afirmam que é por meio de uma variedade de situações que a definição de um determinado conceito fará sentido para a criança. Dessa forma, não se pode pensar na construção do conhecimento de uma criança por meio de situações isoladas, e sim pelo conjunto de fatores que a levam a construir esses conceitos trazendo significados para o estudante.

Vergnaud (2009b) menciona que:

> [...] os conhecimentos que essa criança adquire devem ser construídos por ela em relação direta com as operações que ela, criança, é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que é capaz de discernir, de compor e de transformar, com os conceitos que ela progressivamente constrói. Isso não quer dizer, de modo algum, que o papel do professor deva ser negligenciado; mas o valor do professor reside justamente na sua capacidade de estimular e de utilizar essa atividade da criança (VERGNAUD, 2009b, p. 15).

Deste modo, é importante selecionar situações que favoreçam a aprendizagem dos estudantes, uma vez que a apropriação de um conceito por um indivíduo depende necessariamente das situações apresentadas, o que compreende a construção e a reconstrução desses conhecimentos, bem como da ajuda que o indivíduo recebe no meio em que está inserido (VERGNAUD, 2009a).

Magina *et al.* (2001) pontuam que, para a construção do conhecimento, também é necessário que os estudantes vivenciem situações e problemas já conhecidos por eles. Ainda no que diz respeito às situações, Vergnaud (1996a) apresenta duas classes:

1ª. “Classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação” (VERGNAUD, 1996a, p. 156);

2ª. “Classe de situações para os quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso” (VERGNAUD, 1996a, p. 156).

Os esquemas manifestados a partir destas duas classes de situações são distintos. Na primeira, são organizadas e apresentadas classes de situações automatizadas e únicas; já na segunda, o processo é acompanhado de descobertas, as quais tornam necessário recorrer a esquemas anteriores, de modo sucessivo, para que se encontre o mais adequado, organizado e reorganizado para solucionar a situação atual.

Para o conceito de esquema, Vergnaud (2013) apresenta quatro definições, a saber:

1. Um esquema é uma totalidade dinâmica funcional
2. Um esquema é uma organização invariante de uma conduta para uma certa classe de situações.
3. Um esquema está composto necessariamente de quatro classes de componentes:
   a) Uma meta ou várias submetas e antecipações.
   b) Regras de ação, coleta e controle de informações.
   c) Invariantes operatórios (conceito em ação e teorema em ação).
   d) Possíveis inferências.
4. Um esquema é uma função que toma seus valores de entrada dentro de um espaço temporizado de *n* dimensões e que produz seus valores de saída dentro de um espaço igualmente temporizado de *n'* dimensões, sendo *n* e *n'* muito grandes.

Para Vergnaud (2013), a terceira definição é a que mais permite compreender o caráter funcional, adaptativo e cognitivo do esquema. A organização dos gestos, seja de um bebê, de uma criança ou de um sujeito adulto, contém os mesmos componentes de um esquema: um objetivo, o sequenciamento, a coordenação dos movimentos das diferentes partes do corpo, a identificação dos objetos materiais e de suas propriedades (VERGNAUD, 2009a).

Vergnaud (1996a) descreve que o Campo Conceitual é constituído por situações, representações e esquemas que o estudante constrói durante a aquisição de conhecimento sobre um determinado conceito. Para o autor, “[...] são nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória” (VERGNAUD, 1996a, p. 157). Ou seja, são nos esquemas mobilizados pelos estudantes que estão presentes os conhecimentos que eles possuem sobre um determinado conceito; por isso, é importante analisar de forma minuciosa as suas resoluções, pois muitas vezes esses conhecimentos podem estar implícitos em seus esquemas ou em suas respostas.

O autor também menciona que "[...] as competências matemáticas são sustentadas por esquemas organizadores da conduta", como podemos verificar nos dois exemplos apresentados por ele:

1º Exemplo: O esquema de enumeração dado por uma criança de cinco anos pode ter formas variadas ao contar balas, copos sobre a mesa ou pessoas sentadas no jardim, mas essas formas variadas apresentam uma organização invariante, essencial ao conceito de esquema: coordenação dos movimentos dos olhos, dos gestos do dedo e da mão relativamente à posição dos objetos, enunciado coordenado da sequência numérica, cardinalização do conjunto numerado ou pela repetição da última palavra-número pronunciada: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete... sete!

2º Exemplo: O esquema da resolução das equações da forma $ax + b = c$ atinge rapidamente um grau elevado de confiabilidade entre os estudantes que se iniciam na álgebra, quando a, b e c têm valores numéricos positivos e $b < c$. Os cálculos apresentados na escrita dos estudantes mostram uma organização invariante, que assenta simultaneamente nos hábitos aprendidos e em teoremas como os seguintes: 'conserva-se a igualdade subtraindo b aos dois lados'; 'conserva-se a igualdade dividindo dois lados por a'.

O funcionamento cognitivo de um estudante, ao resolver equações como no exemplo apresentado, ocorre de modo automático: isolar x em um dos lados da igualdade e, nas trocas de membro, mudar o sinal. Muitas vezes as operações são realizadas pelos estudantes de forma consciente, na busca por encontrar o valor da incógnita na equação, mas, na maioria das vezes, o estudante encontra o valor da incógnita de forma automática, sem apresentar explicitamente o esquema mobilizado por ele. Para Vergnaud (1996a), os esquemas dos estudantes são mobilizados de forma implícita ou explícita, dependendo das características do problema apresentado e da relação que o sujeito tem com o algoritmo.

Para Vergnaud (1996a), a automatização é uma das manifestações mais visíveis de caráter invariante da organização da ação; contudo, uma sequência de decisões consciente pode ser objeto de uma organização invariante para uma classe de situações apresentada.

É importante destacar que a automatização não anula o fato de o sujeito ter domínio da situação, pois avaliar se uma operação é adequada ou não para determinada situação faz parte das decisões tomadas por ele.

Vergnaud (1996a) afirma que os algoritmos são esquemas, e acrescenta que os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos, mas falta-lhes a efetividade, ou seja, a segurança de chegar ao fim com um número finito de etapas. Ainda, para o pesquisador, os esquemas são frequentemente eficazes, mas nem sempre efetivos, pois se uma criança utiliza um esquema que não tenha eficácia para uma determinada situação, isso poderá fazer com que ela estacione; em outras palavras, ela não mudará de esquema e nem tentará modificar o esquema ineficaz. Vergnaud (1996a, p. 159) afirma que "[...] com Piaget, podemos dizer que os esquemas se encontram no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação".

Muitas vezes, a criança é capaz de realizar uma sequência de operações; no entanto, é quase impossível que ela explicite todas as regras utilizadas. Como exemplo, podemos lembrar de que muitas crianças realizam adequadamente o algoritmo da adição com números inteiros, porém não são capazes de explicitarem as regras envolvidas: começar pela coluna das unidades, continuar pela coluna das dezenas, depois das centenas etc., calcular a soma dos números em cada coluna e, se a soma dessa coluna for superior a dez, escrever o algarismo das unidades dessa soma e transportar o algarismo das dezenas para o alto da coluna que está à esquerda, somando-o com o restante da soma dessa coluna, e assim sucessivamente, progredindo da direita para a esquerda, até o fim das colunas. Deste modo, há sempre muito de implícito nos esquemas (VERGNAUD, 1996a).

O conceito de situações foi muito utilizado e modernizado por Guy Brousseau (2008), permitindo, além de um alcance didático que ele não tinha em psicologia, uma significação em que a dimensão afetiva interfere tanto quanto a dimensão cognitiva (VERGNAUD, 1993; 1996a). Vergnaud não assume o conceito de situação nessa perspectiva ampla, e sim de modo mais restrito, indicando que "[...] os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com que ele se confronta" (VERGNAUD, 1993, p. 12). A partir disso, o pesquisador apresenta duas ideias principais:

1. A de variedade: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situações são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis;

> 2. A da história: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes "(VERGNAUD, 1993, p. 12).

Contar pessoas, os lugares dispostos na mesa, comprar bolos, frutas ou bombons, são exemplos de situações favoráveis para o desenvolvimento das conceitualizações matemáticas relativas ao número, à comparação, à adição e à subtração para uma criança de seis anos (VERGNAUD, 1996a). No entanto, no cotidiano dessas crianças há poucas situações relacionadas às atividades mencionadas, por exemplo, com relação às situações de compras: "*Terei dinheiro suficiente para comprar isto*? *Para comprar isto e aquilo*? *Com quanto ficarei se comprar isto*? *Quanto me falta*? *Valerá mais apena comprar isto ou aquilo*? *Qual é a diferença de preço*?" (p. 171).

Por outro lado, o pesquisador menciona que "[...] nas situações da vida diária, os dados pertinentes estão mergulhados num conjunto de informações pouco ou nada pertinentes, e as questões suscitáveis nem sempre se expressam claramente" (VERGNAUD, 1993, p. 12). Sendo assim, "[...] o tratamento de tais situações supõe, ao mesmo tempo, a identificação das questões e a das operações a executar para resolvê-las" (p.12).

Nesse sentido, o autor também aponta que:

> Toda situação, contudo, pode ser, em princípio, conduzida a uma combinação de relações de base com dados conhecidos e desconhecidos, que correspondem ao número de questões possíveis. A classificação dessas relações de base e das classes de problemas que podem ser construídas a partir delas é um trabalho científico indispensável. Nenhuma ciência se constituiu sem trabalho de classificação sistemática. Essa classificação permite, por outro lado, abrir o campo das possibilidades e ultrapassar o quadro muito limitado das situações da vida cotidiana (VERGNAUD, 1993, p. 13).

Sendo assim, é necessário que o estudante tenha vivência e experiência de situações diversas, uma vez que a compreensão de um conceito não se dá com apenas uma situação (VERGNAUD, 1993).

Vergnaud atribui importância aos conhecimentos implícitos manifestados nas respostas dos sujeitos, denominando-os *invariantes operatórios* e classificando-os em dois tipos: *teoremas em ação* e *conceitos em ação*. Os primeiros são os conhecimentos na forma de proposição, podendo ser verdadeiros ou falsos; os últimos, os conceitos manifestados pelos sujeitos por meio dos teoremas em ação, não sendo passíveis de serem verdadeiros ou falsos, apenas pertinentes para a situação (VERGNAUD, 2009a).

Os teoremas em ação e os conceitos em ação também podem ser vistos como "[...] relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações, para resolver determinado problema" (GITIRANA *et al*., 2014, p. 22).

Na busca de tentar solucionar o problema, dada uma situação nova, o estudante poderá recorrer aos conhecimentos e aos esquemas que realizou para resolver uma situação mais simples, e poderá adaptá-los a essa nova situação. Essa construção de esquemas mobilizados pelos estudantes é constituída por invariantes operatórios, sendo os teoremas e os conceitos implícitos, podendo ser verdadeiros ou não, do ponto de vista matemático, para a situação em questão (VERGNAUD, 1993).

Vergnaud (2009a) menciona que os invariantes operatórios, assim como os esquemas, não são utilizados conscientemente pelo sujeito, cabendo ao professor mediar a explicitação deste conhecimento. Por exemplo, consideremos a seguinte equação algébrica apresentada por Vergnaud (1996b): $2x + 4 = 30$. Muitos estudantes chegam ao resultado final e encontram o valor da incógnita ($x = 13$), porém, não sabem explicitar que para a resolução desta equação é necessário subtrair 4 ambos os lados da igualdade e depois dividir por 2 ambos os lados da igualdade. Daí a importância de reconhecer os invariantes implicitamente mobilizados nas respostas dos estudantes.

O estudante também pode não possuir o nível de conhecimento necessário para resolver uma determinada situação, e, nesse momento, o professor assume papel fundamental na análise e identificação de se o conhecimento mobilizado pelo sujeito é implícito ou se ele não possui tal competência. Nesse caso, o professor não pode exigir do estudante que haja a reconstrução dos conhecimentos, pois o mal-entendido entre professor e estudante acontece, em geral, porque o professor não reconhece o que falta nas operações apresentadas pelos estudantes; em outras palavras, "[...] o professor deixa a cargo da criança o trabalho de reconstruir muito desse conhecimento implícito. Isso é normal. Mas pelo menos é preciso estar atento ao fato de que a criança muitas vezes é incapaz de reconstruir esse conhecimento (VERGNAUD, 1996b, p. 15).

Assim, faz-se necessário se apropriar do conjunto de situações que dão sentido ao conceito, dos invariantes operatórios e das representações, que são os elementos da terna {S, I, R}, uma vez que será por meio desses elementos que se identificará como ocorrem a apropriação e manifestação do conhecimento mobilizado nas respostas dos estudantes.

De forma mais ampla, Vergnaud (1993; 1996a) classifica os invariantes operatórios em três tipos lógicos: proposição, função proporcional e argumento.

Os invariantes do tipo *proposição* são aqueles que podem ser verdadeiros ou falsos; os teoremas em ação são os invariantes desse tipo lógico. Como dito anteriormente, os invariantes operatórios são do tipo teoremas em ação e, na maioria das vezes, são implícitos e inconscientes, uma vez que muitos estudantes utilizam determinado esquema para solucionar o problema, porém não sabem explicitar o porquê da escolha, sendo verdadeiro somente para um conjunto específico de situações (VERGNAUD, 1993; 1996a).

Vergnaud (1993; 1996a) ainda salienta que os teoremas em ação são definidos como relações matemáticas no momento em que os estudantes escolhem determinadas operações ou estratégias de solução para o problema. Com isso, se torna muito importante analisar as respostas dos sujeitos para identificar quais estratégias (operações) e esquemas eles estão utilizando, para que o professor possa transformar o conhecimento implícito do estudante em conhecimento explícito.

Para exemplificar um invariante do tipo *proposição*, Vergnaud (1993) expressa que na fase "[...] entre 5 e 7 anos, as crianças descobrem que não é preciso recontar o todo para achar o cardinal de $A \cup B$, se A e B já forem contados" (p. 6). Essa situação é descrita pelo seguinte teorema em ação: $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) desdeque A \cap B = \emptyset$.

Para o pesquisador, "[...] a ausência de quantificador dá a entender que este teorema não é universalmente válido para as crianças. Tem alcance meramente local, como para pequenas coleções" (VERGNAUD, 1993, p. 6).

Um segundo exemplo para esse mesmo tipo de invariante é dado com crianças entre 8 e 10 anos. Muitas delas conseguem compreender que "[...] se uma quantidade de objetos à venda é multiplicada por 2, 3, 4, 5, 10, 100 ou qualquer outro número simples, seu preço será 2, 3, 4, 5, 10 ou 100 vezes maior" (VERGNAUD, 1993, p. 6). Essa situação é descrita pelo seguinte teorema em ação: $F(nx) = nF(x)$ para todo n inteiro e simples.

Os invariantes do tipo *função proposicional* são aqueles que não são passíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas indispensáveis para a construção das proposições, ou seja, são conceitos implícitos pertinentes na ação. Os conceitos em ação são invariantes desse tipo lógico (VERGNAUD, 1993; 1996a).

Segundo Vergnaud (1993), "[...] os conceitos raramente são explicitados pelos alunos, mesmo quando são construídos por eles na ação" (p.7). Os teoremas em ação e os conceitos em ação são diferentes, mas ambos são funções proposicionais. Para o pesquisador, "[...] não há proposição sem funções proposicionais, nem função proposicional sem proposições. Do mesmo modo, conceitos-em-ação e teoremas-em-ação se constroem em estreita interação" (p.7).

Os invariantes do tipo *argumento* estão relacionados com a função proposicional, pois os valores desses argumentos são dos tipos particulares (VERGNAUD, 1993; 1996a). Para o pesquisador, o argumento está interligado com as funções proposicionais e com as proposições, por exemplo, “João arruma a agenda sobre a mesa”, podendo ser escrito pela relação ternária R_3 ($João$, $agenda$, $mesa$). Podemos verificar que foram atribuídos valores particulares aos elementos da função proporcional. Esses argumentos, na Matemática, podem ser do tipo objetos materiais (o carro está à esquerda do semáforo), personagens (Marina é menor que Pedro), números ($10 - 2 = 8$), relações (dez é maior do que quatro) ou proposições (“3 é divisor de 9” e de modo recíproco “9 é múltiplo de 3”) (VERGNAUD, 1993, p. 7).

Portanto, os invariantes operatórios não possuem somente um tipo lógico, tornando possível observar as variedades e as diferenças entre os três tipos mencionados anteriormente. Além disso, Vergnaud (1993; 1996a) ainda menciona que um conceito em ação não é absolutamente um conceito, assim como um teorema em ação não é absolutamente um teorema. A justificativa desse pensamento se sustenta pelo fato de que os conceitos e os teoremas são explícitos, e é possível discutir a sua veracidade e pertinência no meio científico. Isso não acontece com os invariantes operatórios, pois:

> [...] conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceitualização: sem a parte escondida pelos invariantes operatórios, essa parte visível nada seria. Reciprocamente, só podemos falar dos invariantes operatórios integrados aos esquemas com o auxílio das categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais, objetos-argumentos (VERGNAUD, 1993, p. 8).

Desse modo, as análises dos invariantes operatórios, por meio de diferentes situações, são importantes para reconhecer o entendimento de um determinado conceito mobilizado pelos estudantes, que pode ser mobilizado por meio de palavras, símbolos ou representação de esquemas, sejam eles por meio de algoritmos, desenhos, traços ou outras formas, conforme a TCC apresenta.

Assim, as análises e classificações das situações-problema a serem propostas aos estudantes devem ser cuidadosamente selecionadas, pois é por meio delas que serão identificados os teoremas e os conceitos em ação mobilizados pelos estudantes em suas respostas. Desse modo, para a escolha de um problema, é preciso verificar se o enunciado está claro e objetivo, se o grau de dificuldade está adequado às competências dos estudantes daquele nível de ensino e, o mais importante, verificar qual ou quais conteúdos se deseja envolver na situação, para que possam ser analisados de forma minuciosa os esquemas e os invariantes operatórios manifestados pelos estudantes.

Para os significados, Vergnaud (2013, p. 11) pontua que "[...] é necessário distinguir entre significados da língua e conceitos, porque a conceitualização começa com a ação na situação e a formação de invariantes operatórios. São eles os responsáveis pela diferença entre sentido e significado". O autor também menciona que as palavras podem ter vários significados, de acordo com a situação em que se encontram. É comum que um significante represente mais do que um significado, bem como que os invariantes operatórios estejam presentes em diversas situações. Para o pesquisador, não é possível reduzir o significado ao significante, tampouco os esquemas às situações.

As situações dão sentido aos conceitos matemáticos; no entanto, o sentido não está nas situações em si. Os conceitos também não estão presentes nas palavras ou nos símbolos matemáticos, porém uma representação simbólica, uma palavra ou um enunciado poderá ter um ou vários sentidos, assim como poderá não ter sentido algum para este ou aquele estudante. O mesmo ocorre com as situações, podendo elas ter sentido ou não, dependendo do contexto em que se inserem (VERGNAUD, 2013).

Para Vergnaud (1993, p. 18), "[...] o sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Mais precisamente, os esquemas evocados no sujeito individual por uma situação ou por um significante constituem o sentido desta situação ou deste significante para aquele indivíduo".

Vergnaud (1993) menciona que um determinado símbolo ou uma situação não garantem o desenvolvimento de todos os esquemas possíveis em um estudante. Para ele, o sentido de uma situação específica, como por exemplo, da adição, não se refere ao sentido da adição ou de um símbolo, pois, "[...] quando se diz que uma palavra tem determinado sentido, estamos recorrendo a um subconjunto de esquemas e, desta forma, operando uma restrição ao conjunto dos esquemas possíveis" (p. 18).

Tendo em vista que os significados e os significantes são necessários para a compreensão de um conceito, surge a necessidade de se explicar a importância dos significantes. Com isso, Vergnaud (1993, p. 18) indaga: "*Quais funções cognitivas devemos atribuir à linguagem e às representações simbólicas na atividade matemática*?".

Nesse contexto, Vergnaud (1993) apresenta três funções para esclarecer o papel da linguagem e dos significantes, a saber:

- Ajudam a designação e a identificação dos invariantes: objetos, propriedades, relações e teoremas;

- Ajudam o raciocínio e a inferência;
- Ajudam a antecipação dos efeitos e metas, a planificação e ao controle da ação.

Vergnaud (1993) também afirma que a linguagem representa ordens diferentes. Para ele, a atividade da linguagem tem funções variadas:

> (1) As informações pertinentes são expressas em termos de objetos (argumentos), propriedades e razões (funções proporcionais) ou de teoremas (proposições); (2) As operações de pensamento, em termos de seleção das informações, inferência, aceitação ou recusa das consequências, bem como em termos de indicação das operações a realizar, dos resultados ou objetivos a atingir, da decomposição em etapas dos processos de tratamento: "faço isto, depois isso, então terei aquilo, etc." (VERGNAUD, 1993, p. 20).

Há também outros aspectos importantes que a atividade da linguagem apresenta, como "[...] a implicação do sujeito na tarefa ou no julgamento emitido, seus sentimentos, sua estimativa de plausibilidade de uma hipótese ou conclusão e, ainda, o relacionamento destes elementos entre si" (VERGNAUD, 1993, p.20).

2.3 As Estruturas Aditivas

Os dois campos conceituais mais explorados por Vergnaud são o das estruturas aditivas e o das estruturas multiplicativas. O campo das estruturas aditivas envolve problemas que demandam resolução por meio de uma ou várias adições ou subtrações, ou uma combinação de ambas as operações (VERGNAUD, 1993).

O campo conceitual aditivo é composto por seis categorias de situações, segundo Vergnaud (1993), a saber:

1. Composição de duas medidas em uma terceira;
2. Transformação de uma medida inicial em uma medida final;
3. Relação de comparação entre duas medidas;
4. Composição de duas transformações;
5. Transformação de uma relação;
6. Composição de duas relações.

Vale mencionar que "[...] os tipos de situações de 4 a 6 se referem às combinações das classificações de 1 a 3" (MIRANDA, 2019, p. 41).

Para dominar as estruturas aditivas, é necessário que o estudante saiba resolver diversos tipos de situações-problema, e isso não significa saber operar um cálculo numérico.

Magina *et al*. (2001) mencionam que, por trás de uma situação tão simples como $2 + 5$, é possível encontrar situações-problema tão sofisticadas que até estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental I apresentam dificuldades para solucionar. Segundo as autoras, as competências necessárias para resolver esses problemas estão diretamente ligadas ao seu grau de complexidade.

Como forma de exemplificar problemas com complexidade de resolução, Magina *et al*. (2001) apresentam quatro exemplos, a saber:

Problema 1: Na fila para o açougue do supermercado, estão à minha frente 2 homens e 5 mulheres. Quantas pessoas estão à minha frente nesta fila? (Adaptado de MAGINA *et al*., 2001, p. 20).

Problema 2: Ana comprou um lápis por R$ 2,00 e ficou com R$ 5,00 na carteira. Quanto ela possuía antes de fazer a compra? (Adaptado de MAGINA *et al*., 2001, p. 20).

Problema 3: Pedro tem 2 anos. Miguel é 5 anos mais velho que Pedro. Quantos anos tem Miguel? (Adaptado de MAGINA *et al*., 2001, p. 20).

Problema 4: Daniel participou de uma rodada de videogame com seus colegas. Ao término da primeira fase, ele tinha perdido 2 pontos. Ao término da segunda fase, ele ficou com 5 pontos ganhos. Qual é o total de pontos que Daniel fez na segunda fase para que ao término do jogo ele ficasse com 5 pontos? (Adaptado de MAGINA *et al*., 2001, p. 20).

Magina *et al*. (2001) destacam que, para Vergnaud, o primeiro problema apresentado é resolvido por crianças entre quatro e cinco anos; o segundo, por crianças entre seis e sete anos; o terceiro problema é resolvido por crianças a partir dos oito anos e, por fim, o quarto problema conta com apenas 25% das crianças de onze anos conseguindo ter sucesso na resolução. É válido observar que em todas as situações-problema apresentadas, basta realizar a operação $2 + 5$; entretanto, o sucesso em solucionar tais problemas varia de acordo com o nível de escolaridade da criança. Podemos perceber nos quatro problemas que eles são resolvidos com o mesmo cálculo numérico, porém, é também notável que as informações, organizadas com estruturas diferentes, os tornam mais simples ou mais completos. Com tudo isso, "[...] a interpretação e a esquematização de um problema depende, também, da forma como seu enunciado é proposto" (MAGINA *et al*., 2001, p. 20).

Magina *et al*. (2001) também esclarecem que as situações aditivas envolvem diferentes conceitos, a saber: conceito de medidas, conceito de adição, conceito de subtração, conceito de transformação de tempo, relações de comparação e composição de quantidades.

As pesquisadoras salientam que as competências necessárias para resolver situações do campo aditivo são desenvolvidas ao longo do tempo; dessa forma, evidenciam a importância de serem trabalhados problemas que envolvem as operações de adição e subtração durante todo o Ensino Fundamental. Ademais, "[...] é preciso que o professor esteja atento para as dificuldades que são inerentes aos tipos de situações, de maneira a não ficar apenas repetindo, ao longo da formação inicial do estudante, problemas que requeiram dele um único raciocínio" (MAGINA *et al*., 2001, p. 21).

Os problemas da estrutura aditiva são representados por um esquema relacional (VERGNAUD, 2009b). Esse esquema é composto por códigos, apresentados no Quadro 2 a seguir, contendo suas representações e o seus significados.

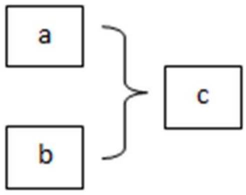
Quadro 2 – Códigos e representações dos esquemas

Código/símbolo	**Significado**
Retângulo ▭	Número absoluto
Círculo ou elipse ○ ⬭	Número relativo
Chave (horizontal e vertical) ⏞ {	A composição de elementos de mesma natureza
Flecha (horizontal e vertical) → ↑	Uma transformação ou uma relação, ou seja, a composição de elementos de natureza diferente.

Fonte: Vergnaud (2009b, p. 201).

Como mencionado anteriormente, as estruturas aditivas são classificadas em seis categorias de situações. Os problemas dessas estruturas são divididos em três grupos básicos (MAGINA *et al*., 2001): composição, transformação e comparação.

A classe de problemas de **composição** refere-se às situações que envolvem parte-todo, "[...] juntar uma parte com a outra para obter o todo, ou subtrair uma parte do todo para obter a outra parte" (MAGINA *et al*., 2001, p. 25). Vergnaud (2009b) relaciona três medidas para essa classe, sendo a equação representada pela relação entre essas medidas descrita da forma: $a + b = c$ (MIRANDA, 2019). O esquema relacional para essa classe é:

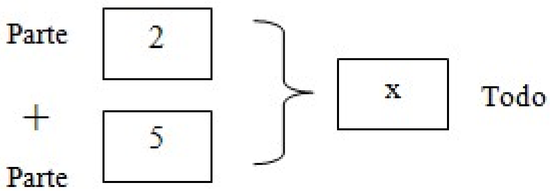


Nele, os números a, b e c são números positivos, e as variações que podem ter nessa classe são situações-problema que relacionam a medida que se deseja descobrir, a parte ou a medida composta (MIRANDA, 2019).

O problema 1, mencionado anteriormente, é um exemplo de problema de composição em que, conhecendo-se as partes, é possível encontrar a composição de medidas, sendo "homens" <u>uma parte</u> do problema e "mulheres" a <u>outra parte</u>; a soma dessas duas partes, homens e mulheres, formam o <u>todo</u>. Podemos representar essas situações pela equação $a + b = x$. O esquema relacional deste exemplo pode ser verificado no Quadro 3 a seguir.

Quadro 3 – Diagrama do problema 1: composição

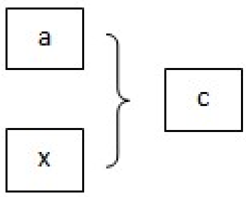
Problema 1: Na fila para o açougue do supermercado, estão à minha frente 2 homens e 5 mulheres. Quantas pessoas estão à minha frente nesta fila?



Fonte: Magina *et al*. (2001, p. 25).

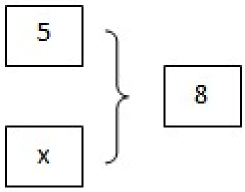
Para o problema do Quadro 3, temos a seguinte equação: $x = 2 + 5 = 7$.

Outra variação de problemas da classe de composição de medidas pode ser encontrada em situações em que, conhecendo-se uma das partes e a composição, pode-se encontrar a outra medida elementar. A equação que representa essa situação é: $a + x = c$ ou $x = c - a$, sendo representada pelo seguinte esquema relacional (MIRANDA, 2019):



Para tal situação, podemos observar o seguinte exemplo: “Ana tinha 8 lápis novos, dos quais 5 já foram usados. Quantos lápis novos Ana ainda tem para usar?” (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 31).

O esquema relacional desse problema é dado por:



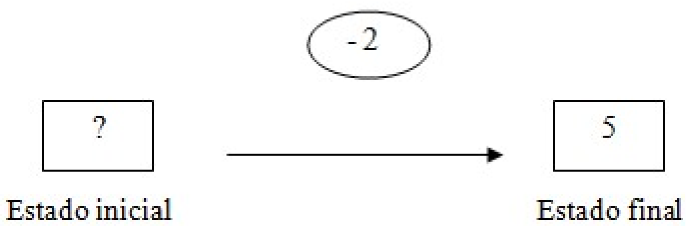
Sendo a equação representada nessa situação: $x = 8 - 5 = 3$.

Portanto, para a classe de composição de medidas, podemos encontrar duas variações: quando a composição é desconhecida ou quando uma das partes é desconhecida.

A classe de problemas de **transformação** refere-se às situações com ideia temporal, “[...] no estado inicial tem-se uma quantidade que se transforma (com perda/ganho; acréscimo/decréscimo; etc.)” (MAGINA *et al*., 2001, p. 26). O problema 2 é um exemplo de problema de transformação, em que Ana gastou um tanto , fez uma transformação da quantia que tinha, gastando R$ 2,00, restando R$ 5,00 em sua carteira, que é o estado final do dinheiro em sua carteira, sendo o estado inicial o que se deseja descobrir, ou seja, o quanto ela tinha inicialmente. O diagrama desse exemplo pode ser verificado no Quadro 4 a seguir.

Quadro 4 – Diagrama do problema 2: transformação

Problema 2: Ana comprou um lápis por R$ 2,00 e ficou com R$ 5,00 na carteira. Quanto ela possuía antes de fazer a compra?

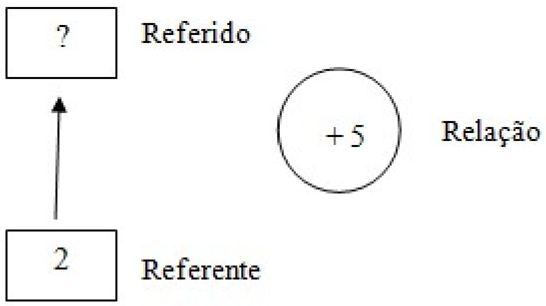


Fonte: Magina *et al*. (2001, p. 26).

A classe de problemas de **comparação** se refere aos problemas que comparam duas quantidades, uma denominada de “referente” e a outra, de “referido” (MAGINA *et al*., 2001, p. 26). O problema 3 é um exemplo de problema de comparação, uma vez que é fornecida a idade de Pedro (2 anos), e a idade de Miguel é apontada em relação à idade de Pedro (Miguel é 5 anos mais velho que Pedro). Desse modo, a idade de Pedro é a referência, ou seja, o referente, para obter a idade de Miguel, que é o referido, por meio da relação, que neste caso é +5. O diagrama deste exemplo pode ser verificado no Quadro 5 a seguir.

Quadro 5 – Diagrama do problema 3: comparação

Problema 3: Pedro tem 2 anos. Miguel é 5 anos mais velho que Pedro. Quantos anos têm Miguel?



Fonte: Magina *et al*. (2001, p. 27).

Há, ainda, problemas que envolvem vários tipos de situações simultaneamente, como no caso do problema 4 (*Problema 4*: Daniel participou de uma rodada de videogame com seus colegas. Ao término da primeira fase ele tinha perdido 2 pontos. Ao término da segunda fase ele ficou com 5 pontos ganhos. Qual é o total de pontos que Daniel fez na segunda fase para que ao término do jogo ele ficasse com 5 pontos?) que apresenta uma **composição de transformações** (MAGINA *et al*., 2001).

Em cada categoria das estruturas aditivas há diversas subclasses. A partir das 6 categorias principais, existem ao todo 70 subclasses, sendo duas (02) pertencentes à primeira categoria (composição de medidas), seis (06) pertencentes à segunda categoria (transformação de medidas), seis (06) pertencentes à terceira categoria (comparação de medidas), dezesseis (16) pertencentes à quarta categoria (composição de transformação), vinte e quatro (24) pertencentes à quinta categoria (transformação de relações) e dezesseis (16) pertencentes à sexta categoria (composição de relações) (VERGNAUD, 2009b; ZANELLA; BARROS, 2014; MIRANDA, 2019).

Não iremos aprofundar os estudos em todas as subclasses destacadas, pelo fato de não ser esse o foco desta pesquisa. Mais adiante, todavia, abordamos com maior profundidade a classe de situações que compõe o objeto central deste trabalho.

2.4 As Estruturas Multiplicativas

O campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve problemas que podem ser resolvidos utilizando as operações de multiplicação ou divisão. Ao analisar essas situações, nota-se o envolvimento de conceitos como de fração, função linear, bilinear, e não linear, composição de funções lineares, razão, taxa, proporção, espaço vetorial, análise dimensional, combinação, produto cartesiano, área, volume, isomorfismo, entre outros (VERGNAUD, 1993; GITIRANA *et al*., 2014).

Gitirana *et al*. (2014) apontam que é comum na docência ensinar aos estudantes que multiplicar é o mesmo que somar repetidamente, logo, $5x3$ é feito pela criança como $3 + 3 + 3 + 3 + 3$. As autoras afirmam que "[...] há uma clara continuidade entre a adição e a multiplicação, em termos de estrutura. No entanto, em relação aos significados, há uma descontinuidade entre os problemas de adição e de multiplicação" (p. 24).

Vergnaud (2009b) enfatiza que as estruturas multiplicavas são compostas por relações do tipo quaternárias, diferentemente das estruturas aditivas, que são compostas por relações ternárias. Além disso, Vergnaud (2009b) aponta que podemos distinguir duas categorias principais pertencentes às estruturas multiplicativas: *isomorfismo de medidas* ou *proporção simples* e *produto de medidas*. A primeira categoria é uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo duas medidas de um determinado tipo e as outras duas medidas de outro tipo. Exemplo: "Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho?" (p. 239). Já a segunda categoria é uma relação ternária entre três quantidades, na qual uma é o produto das outras, concomitantemente, nos plano numérico e dimensional. Exemplo: "Três rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?" (p. 253).

O exemplo a seguir ilustra um problema do campo multiplicativo referente às situações quaternárias, organizadas duas a duas de mesma espécie, a saber: "*Em cada pacote de figurinha vêm 3 figurinhas. Quantas figurinhas se obtêm com 4 pacotes*?" (GITIRANA *et al*., 2014, p. 25). O esquema para este problema pode ser verificado no Quadro 6 abaixo:

Quadro 6 – Diagrama do exemplo de problema do tipo multiplicativo

$\xrightarrow{f}$

G1 - pacotes	G2 - figurinhas
1	3
4	?

Fonte: Gitirana *et al*. (2014, p. 25).

Gitirana *et al*. (2014) pontuam, em relação ao problema supracitado, que "[...] a multiplicação com esse significado, de proporção simples, é uma relação quaternária. Com ela, obtém-se uma relação de proporcionalidade **(f)** entre o número de pacotes e o número de figurinhas" (p. 26, grifo das autoras).

Assim como no campo conceitual das estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas também são classificadas em categorias, sendo estas em cinco classes de situações (VERGNAUD, 2009b; GITIRANA *et al*., 2014):

1. Isomorfismo de medidas ou proporção simples.
2. Comparação multiplicativa; caso de um único espaço de medidas de mesma natureza.
3. Produto de medidas ou produto cartesiano.
4. Função bilinear ou proporção dupla.
5. Proporção múltipla.

A segunda e a terceira classe pertencem às relações ternárias, que envolvem a relação entre três grandezas, sendo todas de mesma espécie; a primeira, a quarta e a quinta classe, por sua vez, pertencem às relações quaternárias, que envolvem a relação entre quatro grandezas, sendo duas a duas de mesma espécie (VERGNAUD, 2009b; GITIRANA *et al*., 2014).

Com base em Vergnaud (1990, 1996a, 2009b), Magina *et al*. (2010) construíram um esquema para as estruturas multiplicativas, com o intuito de sintetizar as classes e subclasses presentes no campo multiplicativo, conforme apresentado na Figura 1.

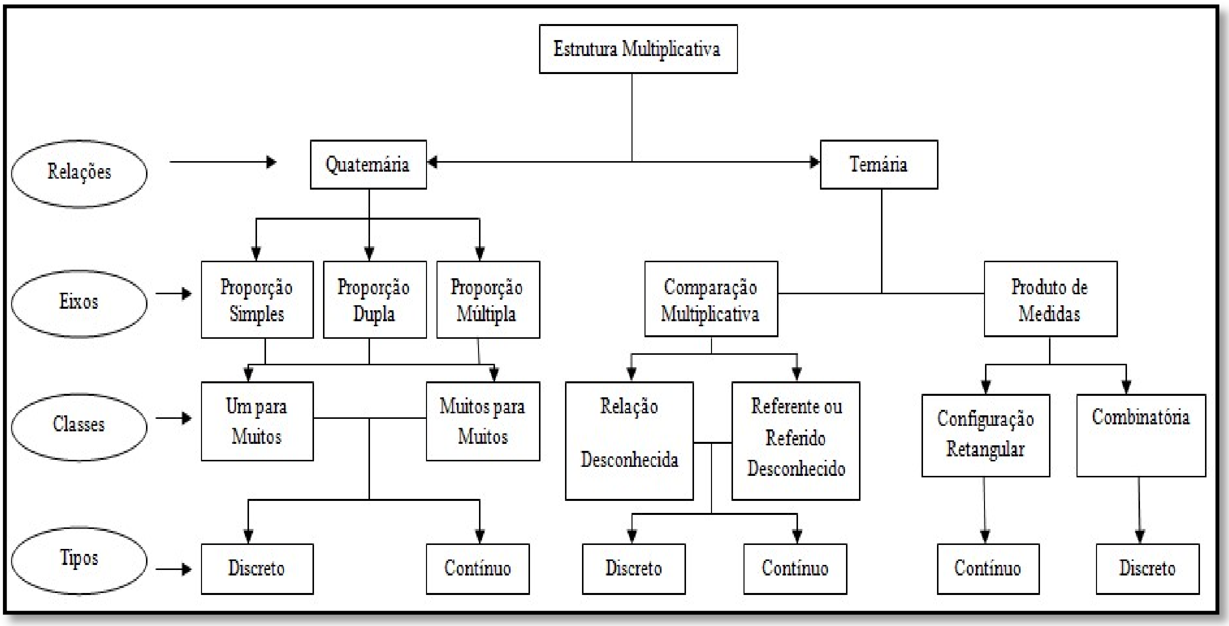


Figura 1: Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo
Fonte: Magina *et al*. (primeira elaboração em 2010, ajustado em 2014).

Podemos observar que a organização do Campo Conceitual Multiplicativo é dividida em duas partes: relações ternárias e relações quaternárias. A relação quaternária é composta por três eixos - proporção simples, proporção dupla e proporção múltipla –, e duas classes – um para muitos e muitos para muitos. A relação ternária é composta por dois eixos – comparação multiplicativa e produto de medidas –, e quatro classes: *relação desconhecida*, *referente ou referido desconhecido*, *configuração retangular* e *combinatória*.

Miranda (2019), com base em Vergnaud (1993) e Gitirana *et al*. (2014), apresenta que a categoria de isomorfismo de medidas, também denominada de proporção simples, permite a variação de quatro tipos de problemas elementares: *Um para muitos*, *Distribuição*, *Cota* e *Quarta proporcional*, como podemos verificar no Quadro 7 a seguir:

Quadro 7 – Diagrama do exemplo de problema do tipo multiplicativo

Classe de problema	**Esquema relacional**	**Descrição**
Multiplicação – um para muitos	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{a} \\ \boxed{b} & \boxed{x} \end{array}$	A medida se relaciona à unidade é dada (a unidade 1) e se deseja saber o valor que corresponde à segunda medida de mesma espécie da unidade.
Divisão–partição ou Distribuição	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{x} \\ \boxed{b} & \boxed{c} \end{array}$	É dada a correspondência entre duas medidas dadas de natureza distintas e se deseja saber a medida que corresponde à unidade.
Divisão-cotação ou cota	$\begin{array}{c\|c} \boxed{1} & \boxed{a} \\ \boxed{x} & \boxed{c} \end{array}$	A medida que corresponde à unidade (medida igual a 1) é dada e se deseja saber a medida que corresponde à medida de mesma natureza da unidade dada, ou quantas cotas ou grupos se pode obter com a medida dada.
Quarta proporcional	$\begin{array}{c\|c} \boxed{a} & \boxed{b} \\ \boxed{c} & \boxed{x} \end{array}$	A relação de proporcionalidade em que a medida correspondente à unidade não é explicitada e nem mesmo solicitada, podendo ser mais complexas caso as medidas dadas de mesma natureza, ou não, sejam múltiplas uma das outras.

Fonte: Miranda (2019, p. 60).

Por meio das cinco classes de situações – proporção simples, comparação multiplicativa, produto cartesiano, função bilinear e proporção múltipla –, é possível estabelecer dezoito (18) subclasses, sendo quatro pertencentes à primeira classe, proporção simples, seis (06) pertencentes à segunda classe, comparação multiplicativa, quatro (04) pertencentes à terceira classe, produto de medidas, duas (02) pertencentes à quarta classe, função bilinear ou proporção dupla e duas (02) pertencentes à quinta classe, proporção múltipla (MIRANDA, 2019).

Assim como mencionado quando da apresentação das estruturas aditivas, destacamos não ter o propósito, neste texto, de aprofundar os estudos em cada uma dessas subclasses. Assim, dedicamos o estudo da próxima seção aos problemas mistos, com foco na classe de *proporção simples e composição de medidas*, conforme proposta desta pesquisa.

2.5 Problemas Mistos

Além dos problemas do campo aditivo e do campo multiplicativo, Vergnaud (2009b) discute os *problemas mistos*, que envolve em sua resolução ao menos uma das operações do campo aditivo, adição/subtração, e ao menos uma das operações do campo multiplicativo, multiplicação/divisão.

Para guiar o professor durante a aplicação de problemas mistos em sala de aula, Vergnaud (2009b) apresenta algumas ações:

- Elaborar situações fazendo com que o estudante formule perguntas que tenham sentido em relação ao enunciado;

- Acrescentar informações desnecessárias, ou omitir informações necessárias, no enunciado do problema, de modo proposital;

- Levar o estudante a estabelecer um ou vários esquemas de resolução;

- Fazer um elo entre esses diversos esquemas – verbalizado, em forma de tabela, equações algébricas, algoritmo de operações, entre outros;

- Em caso de insucesso, recorrer ao enunciado do problema a fim de restabelecer os elos entre a situação apresentada e os esquemas mobilizados para a situação.

Esses princípios, segundo Vergnaud (2009b) são indispensáveis para orientar o estudante a uma análise aprofundada da situação em questão, sendo pouco eficaz o ensino sem essa análise.

Vergnaud (2009b) não apresenta as classes para os problemas mistos; assim, nos respaldamos na pesquisa de mestrado de Miranda (2019), que, de acordo com as análises de problemas mistos proposto por Vergnaud (2009b), e em consonância com as relações elementares envolvidas em situações das estruturas aditivas e multiplicativas, investigou o modo como essas relações se estabelecem em situações-problema que envolvem o conceito de função afim – associada, em seu turno, a problemas mistos. Sendo assim, a pesquisadora analisou problemas mistos (de função afim) identificados em livros didáticos de Matemática, sendo dois livros do 9º ano do Ensino Fundamental e dois da 1ª série do Ensino Médio.

Miranda (2019) identificou um total de 89 situações-problema constituídas em 09 categorias (a saber: proporção simples; produto de medidas; composição de medidas; proporção simples e composição de medidas; proporção simples e transformação de medidas; comparação multiplicativa e composição de medidas; comparação multiplicativa e transformação de medidas; proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas; e comparação multiplicativa e proporção simples) de situações relacionadas à função afim, das quais 07 foram pré-estabelecidas e 02 emergiram durante o mapeamento das situações-problema.

A categoria com mais situações-problema identificada nos estudos de Miranda (2019), foi a de *proporção simples e composição de medidas*, sendo 17 no Ensino Fundamental e 15 no Ensino Médio, totalizando 32 situações.

Rodrigues e Rezende (2021) mostram que os problemas mistos também estão presentes em livros didáticos dos Anos Iniciais, e que a classe de *proporção simples e composição de medidas* também apresenta o maior número de situações-problema, identificadas nos livros didáticos de Matemática da coleção Ápis de Dante (2017a; 2017b; 2017c; 2017d; 2017e) do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Dos quarenta e seis (46) problemas mistos presentes nos livros, dezenove (19) situações problemas pertencem à classe proporção simples e composição de medidas, sendo três (3) situações-problema encontradas no livro do 2º ano; quatro (2) presentes nos livros do 3º ano; dez (7) presentes no livro do 4º ano e oito (8) presentes no livro do 5º ano.

Assim, com base nos resultados dos estudos de Miranda (2019) e Rodrigues e Rezende (2021), definimos como instrumento de pesquisa problemas mistos pertencentes à classe de *proporção simples e composição de medidas*.

Apresentamos, na sequência, algumas considerações e análise de um problema pertencente à classe de proporção simples e composição de medidas retiradas do livro didático de Matemática do 4º ano da coleção Ápis de Dante (2017d), com base em Vergnaud (2009b), Miranda (2019) e Rodrigues e Rezende (2021), como forma de melhor esclarecimento dessa classe.

2.5.1 *A Classe de Proporção Simples e Composição de Medidas*

A classe de *proporção simples e composição de medidas* é caracterizada por situações que envolvem problemas do tipo misto, pois possui mais de um tipo de relação, envolvendo as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas, sendo "proporção simples" referente ao campo multiplicativo e "composição de medidas" referente ao campo aditivo. Além disso:

> [...] nesta categoria de situações-problema é possível verificar que se estabelecem, entre as medidas dos enunciados, relações quaternárias das estruturas multiplicativas do tipo proporção simples e relações binárias das estruturas multiplicativas do tipo composição de medidas. As situações-problema desta categoria resultam na expressão da função afim $y = f(x) = a \cdot x \pm b$, com a e b reais e $a > 0$ e $b > 0$ (MIRANDA, 2019, p. 114).

A característica da classe de proporção simples e composição de medidas é de "[...] solicitar uma medida resultante da composição de outras duas, sendo uma delas uma taxa fixa (uma constante) e uma medida variável, resultado de uma relação quaternária de proporção simples" (MIRANDA, 2019, p. 115).

Miranda (2019) concluiu que cada categoria de situação-problema apresenta, em seu processo resolutivo, uma forma analítica específica, sendo esta, para a classe de proporção simples e composição de medidas, a seguinte expressão: $f(x) = ax \pm b$, com $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0\ e\ b > 0$.

Essa classe, *proporção simples e composição de medidas*, é caracterizada por "[...] situações relacionadas às situações em que a variável dependente é a composição ou faz parte da composição de duas medidas, sendo uma delas variável resultante de uma proporção. Se caracterizam pela forma de uma composição de uma taxa fixa e uma parte variável" (MIRANDA, 2019, p. 151).

Para exemplificar uma situação-problema da classe de proporção simples e composição de medidas, apresentamos um problema presente no livro didático de Matemática do 4º ano da coleção Ápis de Dante (2017d), como segue no Quadro 8.

Quadro 8 – Exemplo de problema misto da classe de proporção simples e composição de medidas

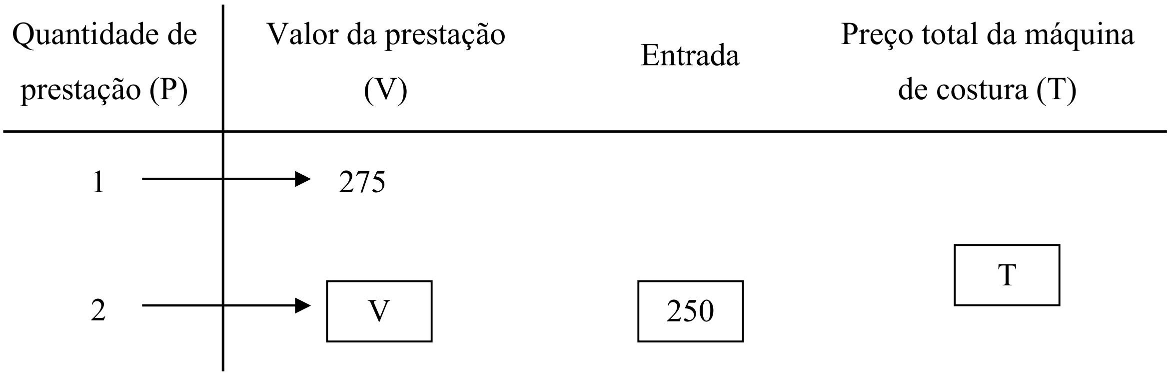
Elisa comprou uma máquina de costura e pagou da seguinte forma: uma entrada de R$ 250,00 e mais 3 prestações de R$ 275,00 cada uma delas. Quanto ela pagou pela máquina?

Fonte: Dante (2017d, p. 137).

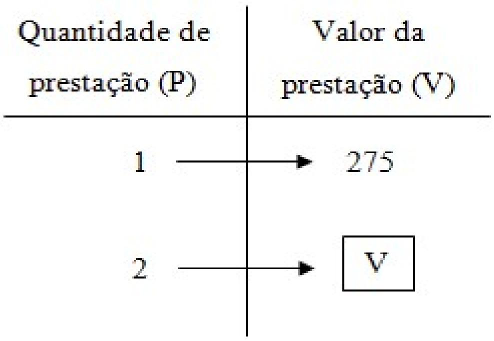
O problema enunciado é um problema do tipo proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas *com parte desconhecida*. Com base em Vergnaud

(2009b), Miranda (2019) e Rodrigues e Rezende (2021) podemos representar as informações contidas no enunciado pelo seguinte esquema sagital:

Esquema sagital:

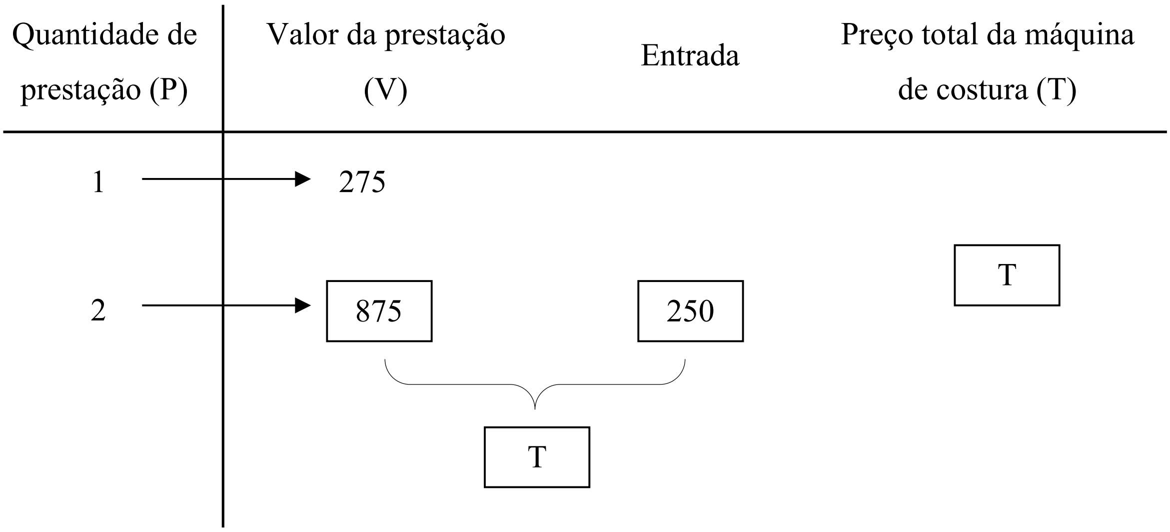


Para encontrar o valor total da máquina de costura, é necessário descobrir quantos reais ficará o valor das três prestações, e depois somar com o valor da entrada. A identificação do valor das três prestações pode ser representada por um esquema relacional definido por Vergnaud (2009b). O esquema relacional existente nesse problema se refere a uma relação quaternária de proporção simples *multiplicação um para muitos*. Ao realizar a proporção simples temos o seguinte esquema relacional:

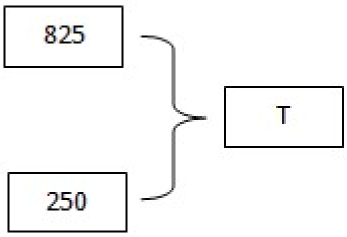


Com esse esquema relacional, é possível identificar a relação existente entre a quantidade de prestações e o valor da prestação; em outras palavras, uma prestação corresponde a R$ 275,00 e três prestações corresponde a V reais, em que V é o valor das três prestações que se deseja descobrir. Algebricamente temos: $\frac{1}{3} = \frac{275}{V} \to V = 3 \times 275 \to V = 825$.

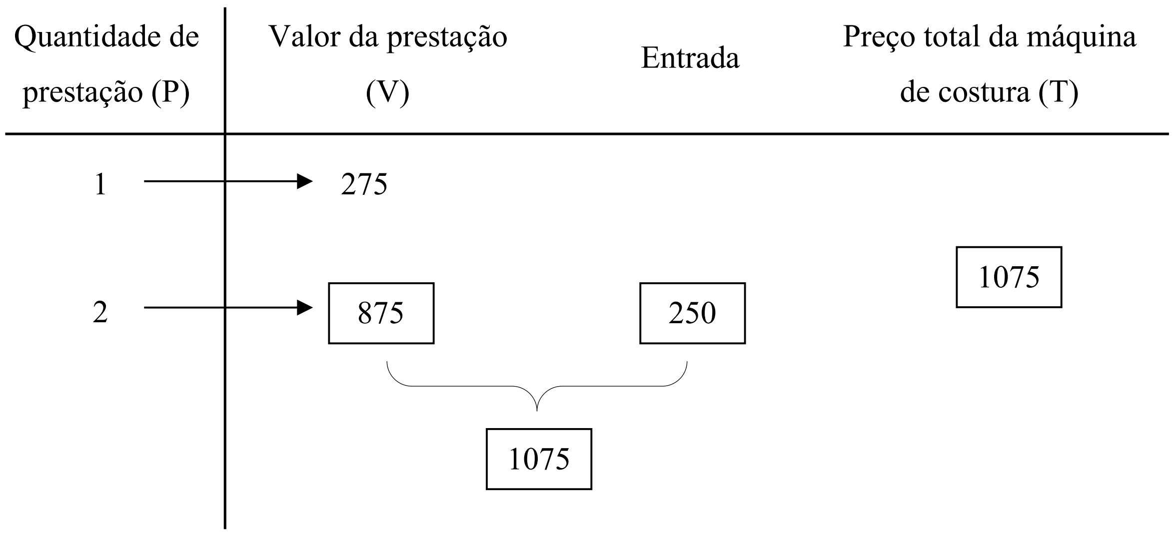
Portanto, o valor das três prestações juntas nos fornece o total de R$ 825,00. Incluindo esse valor encontrado no esquema sagital temos:



É necessário observar que, identificado o valor das três prestações, que corresponde a R$ 875,00, basta somar com o valor da entrada para descobrir o valor total pago pela máquina de costura. A relação para esta parte final da resolução indica uma relação ternária de composição de medidas em que a composição é desconhecida, sendo R$ 875,00 se referindo a uma medida e R$ 250,00, a outra medida. A representação para esse esquema relacional, com base em Vergnaud (2009b), é apresentada da seguinte maneira:



A representação algébrica para esta relação é dada pela seguinte equação: $T = 825 + 250 = 1075$. Logo, o valor pago pela máquina de costura é R$ 1075,00. Para esse problema, temos a seguinte expressão: $f(x) = 275 \times 3 + 250$. Representados os valores encontrados no esquema sagital, temos:



Nesse problema, notamos que o preço total da máquina de costura (T) varia em decorrência da quantidade de prestações (P). Assim, se a quantidade de prestações pode sofrer variação, o valor total do preço da máquina também varia, podendo ser dado pela seguinte expressão: $T = 275P + 250$, que intuitivamente, pode ser associada à modelação algébrica da função afim.

Com o intuito de apresentar as variáveis didáticas que adotamos no nosso instrumento de pesquisa, apresentamos na sequência, brevemente, o que são variáveis didáticas, juntamente com duas situações para exemplificar. Em seguida, apresentamos as variáveis didáticas consideradas e seus respectivos valores, presentes nesta pesquisa.

2.6 Variáveis Didáticas

Segundo Bittar (2017, p. 103), as variáveis didáticas são “[...] elementos da situação que, ao serem alterados, implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos”. A autora menciona duas equações do primeiro grau para exemplificar o uso de variáveis didáticas: $x + 4 = 8$ e $6x + 17 = 3x - 5$, e complementa dizendo que essas equações não demandam, necessariamente, resolução utilizando as mesmas estratégias: a primeira equação pode ser solucionada por meio de um procedimento aritmético, enquanto a segunda necessita de um procedimento algébrico. Com isso, a escolha de uma equação para um estudante que está iniciando o estudo da álgebra pode ser uma variável didática (BITTAR, 2017).

Outro exemplo dado pela autora, inspirado em Grenier (1985)[9], destina-se à simetria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nesse trabalho, foram consideradas três variáveis didáticas: o material disponível (papel quadriculado ou não, régua, compasso etc.); a posição da figura em relação ao eixo de simetria; e a complexidade da figura. A Figura 2 contém exemplos de atividades de construção de figuras simétricas à figura apresentada, com variáveis didáticas que assumem diferentes valores que implicam em mobilização de diferentes estratégias de solução por parte dos estudantes.

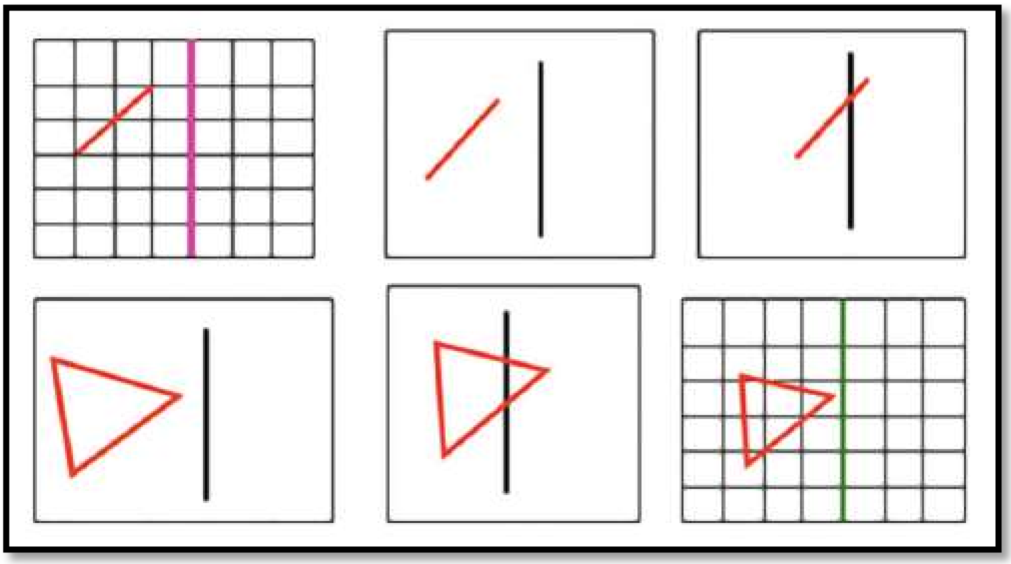


Figura 2: Exemplos de mudanças nos valores das variáveis didáticas
Fonte: Bittar (2017, p. 104).

Podemos observar que, na Figura 2, um dos valores da variável considerado foi a utilização de papel quadriculado e papel branco; as estratégias que os estudantes assumem ao solucioná-lo provavelmente são diferentes. Com o apoio do papel quadriculado, o estudante pode realizar a construção tendo o visual da malha; já com o papel em branco, este recurso não pode ser utilizado, o que permite ao estudante traçar outras estratégias de solução.

Nesse sentido, Bittar (2017) atribui importância à descrição das possíveis estratégias de resolução dos problemas propostos, sejam elas corretas ou não, acompanhadas das análises de cada um dos problemas com previsão das ações cognitivas dos estudantes, e com isso "[...] durante a realização das atividades pelos alunos, o pesquisador estará mais preparado para compreender o que esses estão fazendo e, consequentemente, saber que tipo de intervenção deve realizar para favorecer a aprendizagem" (BITTAR, 2017, p. 105).

---

[9]GRENIER, D. Quelques aspects de La symetrie orthogonale pour des élèves de Classes de 4 ème et 3 ème. Petit X, Grenoble, IREM de Grenoble, n. 7, p.57-69, 1985.

Diante disso, apresentamos as variáveis didáticas que foram levadas em consideração para a elaboração dos problemas mistos para esta pesquisa, quais sejam*: proporção simples e composição de medidas; apoio visual; e possibilidade de modelação na forma de função* $f(x) = ax + b$.

Estabelecidas nossas variáveis didáticas, apresentamos os valores dessas variáveis.

Classe de problema – Proporção simples e composição de medidas

Foram elaborados quatro problemas mistos, que conforme Vergnaud (2009b), envolvem as operações de adição e multiplicação simultaneamente, sendo pertencentes às subclasses: *proporção simples multiplicação um para muitos – com o todo desconhecido* e *proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas – com a parte desconhecida*. Essas duas subclasses são variações da classe de *proporção simples e composição de medidas*, a qual nos fornece oito variações, sendo duas delas consideradas nesse estudo. As outras seis subclasses foram descartadas por não permitir o alcance do objetivo deste trabalho.

O valor considerado na classe de *proporção simples e composição de medidas* é a utilização da *multiplicação um para muitos*, pertencente à categoria de *proporção simples*, que permite analisar as ideias de função e as ideias de proporcionalidade. A parte aditiva, *composição de medidas*, possibilita a variação da composição, a saber, *com o todo desconhecido* e *com a parte desconhecida*.

Para a subclasse de *proporção simples multiplicação um para muitos – com o todo desconhecido* foram elaborados dois problemas, sendo eles o problema 1 e o problema 4. Nessa subclasse foi possível envolver as cinco ideias-base de função – *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável* e *generalização* – e a ideia de proporcionalidade.

Para a subclasse de *proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas – com a parte desconhecida*, também foram elaborados dois problemas, sendo eles o problema 2 e o problema 3. Nessa subclasse foi possível contemplar as seguintes ideias-base de função: *correspondência*, *dependência* e *regularidade* e a ideia de proporcionalidade.

Apoio visual

Para os dois problemas pertencentes à subclasse *proporção simples multiplicação um para muitos – com o todo desconhecido,* consideramos a utilização de tabela como valor dessa variável didática, garantindo a diferença de um problema para o outro. O problema 1 foi construído sem o apoio de tabela, enquanto o problema 4 conta com o apoio de tabela. Consideramos que a utilização de tabela poderia nos fornecer outras estratégias de resolução dadas pelos estudantes, ou até mesmo tornar o problema mais fácil ou mais complexo para os eles.

Possibilidade de modelação na forma de função $f(x) = ax + b$

Os quatro problemas elaborados permitem a modelação da forma $f(x) = ax + b$. Como valor para essa variável didática, consideramos o conjunto numérico, sendo x, a e b pertencentes ao conjunto dos números Naturais. Os valores numéricos considerados assumem até a classe dos milhares (unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar).

Para os problemas 1 e 4 é possível, em linguagem algébrica, modelar do seguinte modo: $f(x) = 4x + 5$ e $f(x) = 3x + 150$.

Os problemas 2 e 3 não apresentam a constante b em seus enunciados, devido à sua subclasse. Assim, temos para o problema 2 a seguinte formulação: $82 = 4 \times 19 + b$. Para o problema 3, temos: $2140 = 120 \times 7 + b$. Após encontrar o valor de b em ambos os problemas, são possíveis as seguintes modelações: para o problema 2, $f(x) = 4x + 6$, e para o problema 3, $f(x) = 120x + 1300$.

Assim, apresentadas as variáveis didáticas e seus respectivos valores adotados, trazemos, no capítulo seguinte, mais informações acerca da elaboração do instrumento de pesquisa, as características consideradas sobre a Educação no Campo, os procedimentos metodológicos adotados, e o problema de pesquisa, juntamente com os objetivos gerais e específicos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, procedemos à caracterização do ambiente escolar; apresentamos a Educação do Campo – modalidade em que se enquadra a escola participante do estudo; trazemos informações dos sujeitos participantes da pesquisa; discorremos sobre a elaboração do instrumento de pesquisa; abordamos as contribuições do estudo piloto e apresentamos os critérios adotados para as análises dos dados produzidos pelos estudantes.

3.1 Caracterização do Ambiente Escolar

Esta investigação assume a perspectiva de uma pesquisa qualitativa, uma vez que devido à "[...] sua diversidade e flexibilidade, não admite regras precisas, aplicáveis a uma ampla gama de coisas" (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2001, p. 45). Além disso, "[...] a pesquisa qualitativa pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa [...]" (MORAES, 2003, p. 191), o que se enquadra em nossos objetivos, pois buscamos compreender e analisar as produções escritas e os diálogos dos estudantes durante suas resoluções.

Conforme apresentado na introdução dessa dissertação, esta pesquisa foi desenvolvida a partir da seguinte questão: *Que ideias de função são mobilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas mistos do tipo de proporção simples e composição de medidas?*

A partir desse problema de pesquisa, estabelecemos os seguintes objetivos:

Geral:

Identificar ideias de função mobilizadas por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos do tipo proporção simples e composição de medidas.

Específicos:

— Analisar os esquemas apresentados pelos estudantes ao resolverem os problemas mistos;

— Identificar teoremas em ação relacionados à modelação da função afim do tipo $f(x) = ax + b$ mobilizados nos esquemas dos estudantes.

Apresentados a questão e os objetivos da investigação, descrevemos a seguir o contexto da escola e os colaboradores deste estudo.

Os colaboradores da pesquisa são estudantes que finalizavam o 5º ano do Ensino Fundamental em uma escola pública do campo localizada na região Noroeste do Paraná, no município de Moreira Sales. A escolha pela turma do 5º ano ocorreu devido ao fato de os estudantes estarem concluindo a primeira etapa do Ensino Fundamental; com isso, espera-se, em conformidade com a BNCC (2018), que os estudantes colaboradores da pesquisa tenham as habilidades necessárias para resolver os problemas propostos.

É preciso considerar o período pandêmico em que vivemos desde março de 2020, cenário em que o ensino e a aprendizagem dos estudantes sofreram prejuízos, uma vez que as aulas foram suspensas por alguns períodos, e ocorreram de modo remoto em outros. Todavia, ainda assim consideramos que os estudantes do 5º ano da escola parceira desta pesquisa já tinham as habilidades necessárias para resolverem os problemas mistos propostos no instrumento elaborado, fato que foi confirmado a partir dos resultados do estudo piloto, descrito mais adiante.

A escola dos sujeitos participantes desta pesquisa – Escola Municipal Luciane Almeida Liberal E.F - é uma escola do campo. No ano de 2021, ela contava com 87 estudantes matriculados, constituindo uma turma para cada ano de ensino, sendo quinze (15) estudantes do 1º ano, onze (11) estudantes do 2º ano, vinte (20) estudantes do 3º ano, dezoito (18) estudantes do 4º ano – destes cinco (5) estudantes fazem parte da sala de recurso –, quatorze (14) estudantes 5º ano, sendo que, destes, um (1) estudante faz parte da sala de recurso, e nove (9) estudantes da Classe Especial – Deficiência Intelectual - D.I.

Segundo o Projeto Político Pedagógico – PPP (2021), a referida escola foi criada pelo Decreto nº 105/99 de 29 de setembro de 1999, devido à municipalização das escolas no estado do Paraná, o que se concretizou no ano 2000. Por não ter prédio próprio, essa escola funciona em dualidade com o Colégio Estadual do Campo Maria Cândida de Jesus E. F. M.

Os estudantes do 8º e 9º do Ensino Fundamental e do Ensino Médio frequentam a estrutura da escola no período matutino, e os estudantes do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental frequentam o espaço físico escolar no período vespertino, juntamente com os estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. As aulas da Sala de Recursos Multifuncional e da Classe Especial são realizadas no período matutino.

Em relação à estrutura física, a escola é composta por oito salas de aula, uma sala multiuso, uma biblioteca, uma quadra de esporte coberta, um banheiro masculino, um banheiro feminino, uma cozinha, uma área coberta que é utilizada como refeitório, uma sala para a secretaria, uma sala para a direção e uma sala para professores (PPP, 2021).

No PPP (2021) é mencionado que a participação da família na escola é primordial, tendo reflexo positivo na aprendizagem dos estudantes; por isso, sempre há momentos de integração entre a família e a instituição de ensino escolar.

Por se tratar de uma escola do campo, as turmas possuem número de estudantes reduzido, e essa vantagem permite aos professores praticarem aulas de pesquisa de campo, além da possibilidade de utilizar equipamentos tecnológicos, procurando dar praticidade aos conteúdos, ressaltando sua função social e auxiliando na compreensão e resolução de situações da vida real (PPP, 2021).

No Projeto Político Pedagógico (PPP, 2021) da escola consta que no último Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB, realizado em 2019[10], essa escola obteve o índice de 7.1, sendo de 6.9 o índice de 2017.

Em relação à avaliação diagnóstica da Prova Paraná, os índices alcançados, mencionados no PPP (2021) foram:

1ª Edição: Língua Portuguesa 59,71%, Matemática 69,41%.

2ª Edição: Língua Portuguesa 67,06%, Matemática 70,59%.

3ª Edição: Língua Portuguesa 73%, Matemática 80%.

Para alcançar os resultados esperados, o PPP (2021, p. 22) enfatiza que são necessários cumprir as seguintes estratégias metodológicas: "[...] observação, experimentação, diálogo, socialização exposição, leitura, escrita, cálculo, entrevistas, coleta e análise de dados, gráficos e tabelas, palestras, sequências didáticas, uso de tecnologias disponíveis dentre outros recursos assim pertinentes".

Tendo caracterizado a escola parceira deste estudo, apresentamos a seguir os critérios adotados na elaboração do instrumento desta pesquisa, levando em consideração a Educação do Campo.

3.2 A Educação do Campo

O termo Educação do Campo é um termo que emergiu em substituição à nomenclatura Educação Rural, sendo utilizado até uma década atrás (TORRES; SIMÕES, 2011). Os autores ainda mencionam que a Educação do Campo não é continuidade da Educação Rural, e

---

[10]A nota do IDEB realizado em 2019 da escola participante desta pesquisa pode ser consultada no seguinte link: http://ideb.inep.gov.br/resultado/home.seam?cid=1985698. Para tanto, selecionar o ícone "Escola", UF-PR, município de Moreira Sales, Rede Municipal, Escola Luciane Almeida Liberal E M EF – 5º ano.

distinguir esses dois conceitos é relevante, pois a Educação Rural e a Educação do Campo "[...] são concepções educacionais diferentes, sendo a Educação do Campo uma proposta consagrada por diversos movimentos sociais ligados ao campo, provinda da necessidade de "romper" com o modelo educacional rural até então utilizado" (TORRES; SIMÕES, 2011, p. 2).

Torres e Simões (2011) ainda indicam que foi a partir de 1998 que o termo Educação do Campo foi efetivado, com a realização da Primeira Conferência Nacional por uma Educação Básica do Campo.

A Educação Rural era compreendida, segundo Torres e Simões (2011), como:

> [...] uma mobilização em favor da extensão da educação às populações rurais, ou seja, víamos a educação rural como aquela onde os alunos "do sítio" tinham aula na zona rural, em salas multisseriadas, com professores responsáveis pelo atendimento de alunos de diversas séries e idades diferentes (TORRES; SIMÕES, 2011, p. 2-3).

A Educação do Campo, segundo Machado (2017) "[...] é proposta de diversos movimentos sociais ligados ao campo, por isso, quando se fala em educação do campo, é inevitável não pensar em lutas sociais, trabalhadores como protagonistas e sujeitos das ações pedagógicas" (MACHADO, 2017, p. 5). Para a autora, o campo não significa o contrário de urbano, mas sim um lugar de inúmeras possibilidades.

Em relação à escola do campo, Caldart (2003) afirma que esta:

> [...] não é, afinal, um tipo diferente de escola, mas sim é a escola reconhecendo e ajudando a fortalecer os povos do campo como sujeitos sociais, que também podem ajudar no processo de humanização do conjunto da sociedade, com lutas, sua história, seu trabalho, seus saberes, sua cultura, seu jeito (CALDART, 2003, p.66).

Ou seja, a perspectiva da Educação do Campo induz a um novo sentido de escola, que adquire caráter não somente voltado às exigências de atendimento aos estudantes, mas à reflexão da sua função social como instituição, "[...] seu caráter formativo, a formação de professores, o processo de ensino aprendizagem a ser efetivado e a elaboração de uma proposta pedagógica que esteja de acordo com a história de luta das trabalhadoras e dos trabalhadores do campo" (MACHADO, 2017, p. 6).

Segundo as Diretrizes Curriculares da educação do Campo do Estado do Paraná (PARANÁ, 2006), a Educação do Campo é caracterizada como:

> [...] o resgate de uma dívida histórica do Estado aos sujeitos do campo, que tiveram negado o direito a uma educação de qualidade, uma vez que os modelos

> pedagógicos ora marginalizavam os sujeitos do campo, ora vinculavam-se ao mundo urbano, ignorando a diversidade sociocultural do povo brasileiro, especialmente aquela expressa na prática social dos diversos sujeitos do campo (PARANÁ, 2006, p. 9).

O mesmo documento destaca que a elaboração das Diretrizes Curriculares da Educação do Campo é mais um passo importante na afirmação da educação como um direito universal; além disso, propõe auxiliar o professor na reorganização da sua prática educativa, contribuindo para que ele possa trazer a realidade dos estudantes do campo para a sala de aula. Essa prática poderá trazer "[...] um sentimento de pertencimento das crianças e adolescentes, que vão ter na escola um trabalho educativo com sentido em suas vidas" (PARANÁ, 2006, p. 9).

Nas Diretrizes, ainda é indicado que os estudantes do campo "[...] têm direito a uma educação pensada, desde o seu lugar e com a sua participação, vinculada à sua cultura e as suas necessidades humanas e sociais" (PARANÁ, 2006, p. 9).

Foi pensando nessas particularidades dos estudantes do campo que elaboramos os quatro problemas que compõem o instrumento de pesquisa, de modo que o contexto de cada problema levasse em consideração a realidade vivenciada pelos estudantes participantes desta pesquisa.

O contexto dos problemas foram primordiais durante a elaboração do instrumento de pesquisa, pois vários problemas foram inicialmente elaborados, mas em seguida descartados do instrumento, pelo fato de seus contextos não fazerem parte da realidade desses estudantes, a exemplo das menções a entregador de *fast food*, motorista de *Uber*, confeitaria, confecção de tecidos, escola de língua estrangeira, dosagem de medicamentos e floricultura.

Após as análises e discussões do contextos dos problemas, apresentamos os quatro contextos que permaneceram no instrumento desta pesquisa:

- Parque de diversões, pois faz parte da realidade dos estudantes colaboradores da pesquisa. Antes da pandemia, todo ano ocorria a Expo-Sales, festa realizada no Município de Moreira Sales com diversas atrações, entre elas rodeio, shows, praça de alimentação, parque de diversões, etc. O parque de diversões foi considerado da mesma forma como acontece nessa festa, a saber, a partir do valor da entrada no parque de exposições e o custo da compra de cada ingresso;
- Motorista de táxi, pois é uma realidade da comunidade do distrito. Por ser uma população de baixa renda, muitas famílias não possuem carro e necessitam realizar viagens de táxi quando não conseguem ir de carona com o transporte da prefeitura,

indo às cidades vizinhas para realizarem as compras do mês, pagar contas na lotérica ou até mesmo receber o salário ou a aposentadoria. A necessidade de se deslocar para outra cidade se dá pelo fato de o distrito não possuir bancos, lotéricas, posto de gasolina, e pelo atendimento médico ocorrer apenas duas vezes por semana;

- Vendedor de celulares, pois há pequenos comércios no distrito (majoritariamente de roupas) que contam com vendedores; contudo, para ficar coerente com o valor numérico utilizado no enunciado, foi pensado em se utilizar o vendedor de celular que, embora não esteja presente no distrito, é observado pelos estudantes nas cidades vizinhas;
- Empresa de sanduíches, pois é um contexto vivenciado na comunidade. Algumas famílias trabalham com vendas de pães, bolos, doces e salgados, oferecendo seus produtos de casa em casa. Embora o termo "empresa" não seja muito usual em tais negociações no distrito, ele foi necessário para dar sentido ao problema, e, tal qual outros termos como "salário fixo", "valor adicional" e "gasto total", foi inserido com a certeza de que os estudantes compreenderiam a nomenclatura, após debate com a professora regente da turma que garantiu que esses termos seriam de fácil entendimento pelos estudantes.

Assim, apresentados os aspectos da Educação do Campo, trazemos na seção seguinte o perfil dos estudantes participantes da pesquisa.

3.3 Sujeitos Participantes da Pesquisa

Informamos que os estudantes participantes, todos com idade adequada para o 5º ano, não eram estudantes da pesquisadora proponente no momento de realização da pesquisa, tendo sido estudantes dela no ano de 2020, quando cursavam o 4º ano.

Durante todo o ano letivo de 2021, mesmo com a maior parte das aulas sendo remotas devido à pandemia, e mesmo já não sendo mais a professora regente da turma, devido à nossa proximidade e ao convívio com a professora da turma no ambiente escolar, foi possível conhecer as particularidades de cada estudante, principalmente em relação às realidades que fazem parte de suas vivências.

Vários estudantes do 5º ano manifestam gostar de Matemática, sendo muito receptivos ao receberem comunicado a respeito desta pesquisa. Ao serem convidados a participar da pesquisa e receberem explicações acerca da importância da pesquisa e do papel deles para o estudo, todos os quatorze (14) estudantes da turma aceitaram de imediato participar, de forma bem espontânea e genuína. Porém, no dia da aplicação, treze (13) estudantes participaram deste estudo, sendo os responsáveis pela produção de dados para a pesquisa.

O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE – e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE – foram lidos e explicados para os estudantes. Ambos os termos, e outros documentos, como o roteiro do projeto de pesquisa, Termo de Compromisso de Utilização de Dados – TCUD –, e o termo de ciência do responsável pelo campo de estudo, foram enviados ao Comitê de Ética em Pesquisa – CEP da UNESPAR – e aprovados com o número do parecer: 4.661.538 no dia 20/04/2021.

Devido à resolução da Secretaria de Estado da Saúde do Paraná - SESA/PR nº 977 de 28 de outubro de 2021 (PARANÁ, 2021b), que altera alguns artigos da resolução SESA nº 860/2021, de 23 de setembro, foi revogado o inciso 2º do art. 37, que menciona o afastamento físico de no mínimo um metro entre os estudantes e entre esses e os professores. Sendo assim, foi retirado o distanciamento físico entre as pessoas, e começou a ser realizado o atendimento 100% presencial nas escolas, eliminando o ensino remoto e tendo por obrigatório o uso de máscara e a utilização de álcool em gel, devido à pandemia do COVID-19.

Com essa nova resolução, os sujeitos participantes desta pesquisa puderam ser organizados em duplas na sala de aula, mantendo o uso de máscaras e a utilização de álcool em gel, seguindo as recomendações do Protocolo de Biossegurança da escola.

Após os estudantes terem levado para casa os termos para serem assinados pelos pais, dois contatos com os estudantes foram realizados em momentos distintos: o primeiro em busca dos termos assinados, e o segundo para eles se familiarizarem com a presença da pesquisadora em sala de aula antes da implementação dos problemas. Por já terem sido estudantes da pesquisadora, e por recentemente a pesquisadora ter substituído a professora regente da turma, avaliamos este segundo momento como positivo. Nesse encontro de duas horas, houve diálogo sobre assuntos rotineiros e sobre o dia em que eles resolveriam os problemas propostos para a pesquisa. A experiência desse segundo momento ocorreu na biblioteca, pois era o momento de leitura da classe. Os estudantes se mostraram ansiosos para participar da pesquisa, chegando a insistir que os problemas fossem propostos naquele mesmo dia.

Assim, os problemas foram propostos e resolvidos pelos estudantes em dia letivo e horário convencional de aula, dia 01/12/2021. Os estudantes resolveram todos os problemas em duas horas, tendo sido acordado previamente com a professora regente que o ideal para os estudantes seria apresentar todos os problemas em um único dia, ao invés de reparti-los em dias diferentes.

No dia da aplicação dos problemas estavam presentes 14 estudantes, porém um estudante não quis participar do estudo devido ao fato de seus pais não terem assinado o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE. Foi perguntado se ele queria participar das resoluções do problema em algum grupo, sem que suas respostas fossem analisadas, mas o estudante se recusou. Também foi proposto para ele ir à biblioteca para jogar algum jogo ou ler um livro, mas novamente ele se recusou, tendo preferido ficar na sala desenhando.

Sendo assim, participaram desta pesquisa 13 estudantes, que foram divididos em cinco duplas e um trio. A formação dos grupos foi definida pela pesquisadora, que solicitou a organização em duplas e que, por estar diante de quantidade ímpar, permitiu a um dos grupos a formação com três integrantes. Ao serem formados tais grupos, um gravador foi colocado sobre a mesa de cada grupo para que pudéssemos analisar os diálogos entre os estudantes e, assim, a produção dos dados desta pesquisa contou com a gravação de áudio dos estudantes, o registro escrito dos estudantes, as transcrições das gravações dos diálogos dos estudantes, e o diário de bordo da pesquisadora.

Antes de iniciarem as resoluções, uma fala inicial foi realizada pela pesquisadora para esclarecer os seguintes pontos: não seria fornecida nenhuma resposta; não seria verificado se a resposta estava correta; não seriam lidos os problemas com os estudantes; e não seria explicado o que o problema solicitava. Durante o momento de resolução dos problemas, os estudantes dialogavam entre si, e, após o término de cada problema, os membros de cada equipe solicitavam a presença da pesquisadora, com o intuito de darem explicações a respeito de suas estratégias. Esse momento garantiu à pesquisadora obter mais informações a respeito dos resultados apresentados por cada grupo.

A seguir, apresentamos detalhes sobre a elaboração do instrumento da pesquisa.

3.4 Elaboração do Instrumento de Pesquisa

A escolha do instrumento desta pesquisa foi cautelosamente elaborada seguindo os conteúdos e as orientações previstas pela BNCC (BRASIL, 2018) referentes ao 5º ano, juntamente com a análise dos problemas pertencentes ao Livro Didático da turma, da coleção Ápis de Matemática (DANTE, 2017e). Para a elaboração deste instrumento, também foram considerados os estudos de Vergnaud (2009b), Magina *et al*. (2001), Gitirana *et al*. (2014) e Miranda (2019).

Antes dos problemas serem elaborados, primeiramente identificamos a quantidade de variações presente na classe de proporção simples e composição de medidas, para que fossem diversificadas as estruturas dos problemas propostos.

Fazendo a combinação entre as variações pertencentes à classe de proporção simples – *multiplicação um para muitos*, *divisão-partição*, *divisão-cota* e *quarta proporcional* - com as variações da classe de composição de medidas – *com o todo desconhecido* e *com a parte desconhecidas* -, identificamos oito variações para a classe de proporção simples e composição de medidas:

1. Proporção simples *multiplicação - um para muitos* e composição de medidas - *com o todo desconhecido*;
2. Proporção simples *multiplicação - um para muitos* e composição de medidas - *com a parte desconhecida*;
3. Proporção simples *divisão - partição* e composição de medidas - *com o todo desconhecido*;
4. Proporção simples *divisão - partição* e composição de medidas - *com a parte desconhecida*;
5. Proporção simples *divisão - cota* e composição de medidas - *com o todo desconhecido*;
6. Proporção simples *divisão - cota* e composição de medidas - *com a parte desconhecida*;
7. Proporção simples *quarta proporcional* e composição de medidas - *com o todo desconhecido*;
8. Proporção simples *quarta proporcional* e composição de medidas - *com a parte desconhecida.*

A princípio, havíamos elaborado um problema pertencente a cada uma dessas variações; porém, por meio de discussões realizadas nos encontros do GEPeDiMa, desconsideramos os problemas que envolviam em sua estrutura a proporção simples do tipo divisão-partição e do tipo divisão-cota, uma vez que esses tipos de problemas não contribuiriam para a identificação de ideias de função, pois estamos considerando problemas mistos que envolvam uma relação multiplicativa e uma relação aditiva. Logo, problemas que envolvem divisão não correspondem ao objetivo da pesquisa.

Restaram quatro variações que atenderiam ao objetivo desta pesquisa: duas variações de proporção simples do tipo *multiplicação um para muitos* e duas variações de proporção simples do tipo *quarta proporcional*. Ao analisar os problemas destas classes, notamos que a classe proporção simples do tipo *quarta proporcional* tornava os problemas mais complexos, podendo comprometer a produção dos dados, impedindo que atingíssemos o objetivo da pesquisa, associado às ideias de função.

Desse modo, o instrumento desta pesquisa conta com situações problemas de proporção simples do tipo *multiplicação um para muitos,* variando a composição – *com o todo desconhecido* e *com a parte desconhecida*.

Com isso, elaboramos quatro situações-problema, sendo duas situações pertencentes à classe de proporção simples *multiplicação - um para muitos* e composição de medidas - *com o todo desconhecido* – e duas situações-problema pertencentes à proporção simples *multiplicação - um para muitos* e composição de medidas - *com a parte desconhecida*. Com notações matemáticas mais avançadas, é possível notar que todos os problemas podem ser modelados por meio de uma função afim $f(x) = ax + b$.

Os dois problemas elaborados para a classe de proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas – *com o todo desconhecido*, envolvem os seguintes conceitos de função: as ideias-base – variável, dependência, regularidade, correspondência, generalização –, e a ideia de proporção.

Os outros dois problemas pertencentes à classe de proporção simples *multiplicação - um para muitos* e composição de medidas - *com a parte desconhecida*, envolvem os seguintes conceitos de função: as ideias-base – dependência, regularidade e correspondência –, e proporção. As ideias de variável e generalização não foram abordadas nessa classe, pois nossos estudos indicaram que estas poderiam apresentar grau de dificuldade elevado para os estudantes do 5º ano.

Os problemas elaborados estão descritos no Capítulo 4 desta dissertação, juntamente com as análises, nas quais indicamos as variáveis didáticas presentes em cada problema, seus esquemas sagitais e o estudo das principais resoluções que poderiam ser manifestadas pelos sujeitos colaboradores da pesquisa.

Após a apresentação da elaboração do nosso instrumento de pesquisa, apresentamos na seção seguinte as contribuições da realização do estudo piloto para a pesquisa.

3.5 Estudo Piloto para a Pesquisa

Antes da implementação dos problemas e da produção de dados com os estudantes do 5º ano, foi realizado estudo piloto com outros estudantes, da turma do 4º ano, da qual a pesquisadora é professora regente. A intenção desse estudo foi analisar se os estudantes compreendiam o enunciado dos problemas e se tinham habilidades matemáticas para resolvê-los. Se necessário, após o estudo piloto, o instrumento de pesquisa e o modo de implementação das tarefas poderiam passar por refinamentos. A resolução dos quatro problemas pelos estudantes do 4º ano levou duas horas.

Antes de serem propostos os problemas aos estudantes do estudo piloto, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE - e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE – foram lidos e explicados. Participaram do estudo piloto dezessete (17) estudantes, sendo que a pesquisadora/professora da turma procurou não conduzir ou induzi-los a qualquer resposta. Os estudantes foram divididos sete (7) grupos, sendo em três (3) trios e quatro (4) duplas, e foram analisadas a produção escrita e os diálogos entre eles, por meio dos gravadores de áudio que ficaram dispostos nas mesas de cada grupo.

Para o estudo piloto, os estudantes revolveram quatro problemas (ANEXO III); os problemas 1 e 2 foram resolvidos com facilidade pela maioria dos estudantes, enquanto os problemas 3 e 4 geraram dúvidas e dificuldades de resolução.

Com a aplicação do estudo piloto percebemos que os enunciados estavam claros e foram facilmente entendidos pelos estudantes. Pequenas mudanças foram realizadas nos problemas do estudo piloto para a versão final, sendo uma no problema 1 e duas mudanças no problema 4, respectivamente:

- Houve alteração em relação a uma palavra contida na letra “d” do problema 1. A questão estava escrita da seguinte forma: *Como podemos calcular o gasto total de Pedro para qualquer quantidade de ingressos que ele queira comprar*? Muitos estudantes se confundiram ao ler a palavra “queira”, substituindo-a erroneamente por “queria”, causando erros de resolução e dificuldades de interpretações dos estudantes.
- Percebemos no estudo piloto que, no problema 4, muitos estudantes apresentaram dificuldades ao preencherem a tabela, então, acrescentamos à versão final uma nova questão que antecede o preenchimento da tabela, como segue: *Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?* Além disso, também mudamos os valores numéricos contidos na tabela. No estudo piloto, eles se

apresentavam da seguinte maneira: “5”, “10”, “15”, “20” e “25”. Para a versão final, definimos a tabela com início em 20 e até chegar em 40, com intervalo de cinco em cinco para cada número.

Após a modificação dos problemas, foi entregue para a professora regente da turma do 5º ano uma cópia dos problemas da versão final para que ela pudesse analisar e verificar se eles estavam adequados para o nível de seus estudantes, bem como se os termos utilizados estavam adequados. Após a análise, a professora regente deu seu parecer afirmando que os problemas estavam apropriados para seus estudantes.

Com base na apresentação dos critérios que foram utilizados para analisar os dados produzidos pelos estudantes, apresentamos na sequência como essas análises foram realizadas.

3.5.1 *Critérios Adotados para as Análises dos Dados*

Para as análises dos dados, consideramos o protocolo escrito dos estudantes e as gravações dos diálogos entre os integrantes de cada grupo.

Os problemas foram separados e agrupados por processos de resoluções semelhantes, como forma de organizar os dados. Feito isso, buscamos identificar em cada resolução as ideias de função envolvida: *correspondência, dependência, regularidade, variável, generalização* e *proporcionalidade*, e identificar os teoremas em ação mobilizados pelos esquemas dos estudantes e em seus diálogos. Também buscamos identificar se os estudantes conseguiram generalizar os problemas 1 e 4. Para essas análises, utilizamos a teoria dos Campos Conceituais, e analisamos o protocolo escrito de cada estudante, os diálogos entre os estudantes de cada grupo na íntegra e a explicação dos estudantes acerca da resolução do problema à pesquisadora.

Para isso, as resoluções dos problemas foram separadas seguindo os seguintes critérios:

- Resoluções que apresentam cálculos e/ou esquemas pertinentes ao problema;
- Resoluções e diálogos que demonstram ideias de correspondência, dependência, regularidade, variável, generalização e proporcionalidade, e teoremas em ação;
- Resoluções não pertinentes ao problema proposto;

- Resoluções com erros de cálculos, ou esquemas não pertinentes, porém com respostas orais que condizem com resoluções pertinentes ao problema;
- Problemas não resolvidos.

Após estabelecidos os critérios de análises, traremos no capítulo seguinte as análises e discussões a respeito dos dados produzidos durante a implementação da versão final do instrumento de pesquisa com os estudantes do 5º ano.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo, abordamos os problemas elaborados e seus respectivos esquemas sagitais, garantindo sua classificação e a análise *a priori*, contendo um estudo das possíveis resoluções dos estudantes. Após a apresentação de cada problema, traremos as análises e discussões acerca dos problemas que foram entregues aos estudantes e suas respectivas resoluções, juntamente com as análises *a posteriori*.

Para as análises dos dados, contamos com os áudios gravados, a produção escrita dos estudantes e o diário de bordo; analisamos então as respostas de cada grupo para cada um dos quatro problemas aplicados; tais respostas serão discutidas e analisadas nas seções seguintes. Para preservar as identidades dos estudantes, em nossas análises iremos nos referir a eles da seguinte maneira: estudante 1 e estudante 2 – Grupo 1; estudante 3 e estudante 4 – Grupo 2; estudante 5 e estudante 6 – Grupo 3; estudante 7 e estudante 8 – Grupo 4; estudante 9 e estudante 10 – Grupo 5; estudante 11, estudante 12 e estudante 13 – Grupo 6.

4.1 Apresentação do Problema 1

O primeiro problema é do tipo proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas - *com o todo desconhecido*. A parte de proporção simples se refere a uma relação quaternária. Esse problema contempla todas as ideias-base de função – variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização – e a ideia de proporcionalidade. Todos os problemas foram entregues em folha de sulfite colorida de tamanho A4, para diferenciar essa atividade das que são rotineiras em sala de aula. O problema 1 foi apresentado em folha de cor verde; o problema 2, cor rosa; o problema 3, cor amarela, e o problema 4, cor azul. Na Figura 3, a seguir, apresentamos o referido problema.

1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

Figura 3: Problema misto 1 - proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas - com o todo desconhecido
Fonte: arquivo de pesquisa.

As Variáveis Didáticas nesse problema são:

- Proporção simples e composição de medidas - valor da variável didática: proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas – com o todo desconhecido;
- Apoio visual - valor da variável didática: sem a utilização de tabela;

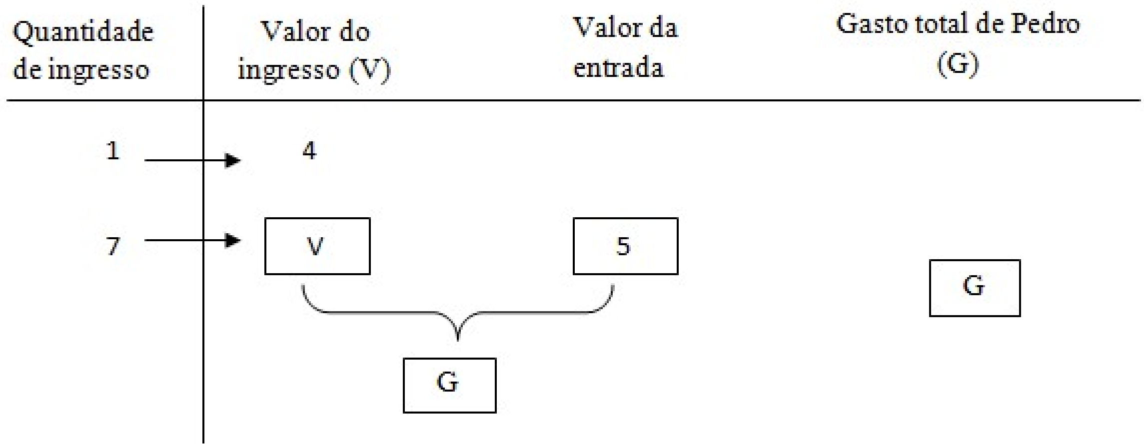
- Possibilidade de modelação na forma de função $f(x) = ax + b$ - valor da variável didática: $f(x) = 4x + 5$.

O problema 1 contém quatro questões: as duas primeiras trazem valores numéricos diferentes para os ingressos, com a intenção de que nas duas últimas questões os estudantes tenham a possibilidade de generalizar os cálculos para uma quantidade qualquer de ingressos. Não esperamos que o estudante generalize com expressões algébricas, pois isso não se enquadra no nível em que estão estudando, mas o fato de o estudante perceber a variável existente e que o mesmo cálculo realizado nas questões anteriores pode ser feito para outras quantidades, alterando o valor do ingresso, dá indicativos de manifestação das ideias-base de regularidade e, por consequência, da generalização, ideias essenciais para a construção do conceito de função.

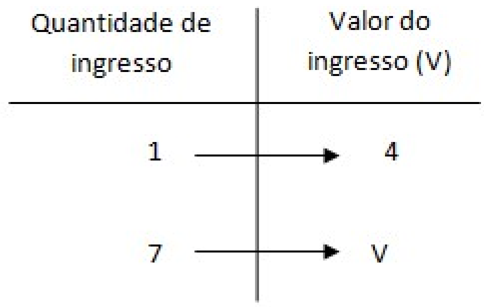
Esperávamos, nesse primeiro problema, que os estudantes percebessem que o valor total depende da quantidade de ingressos comprados. Por isso, foram pensadas duas questões – "a" e "b" – para os estudantes determinarem o valor total para a compra de 7 ingressos, e para a compra de 12 ingressos. Segundo Pavan (2010, p. 90), a noção de *dependência* não é simples de ser construída, por isso a utilização de "[...] linguagens informais para descrever a dependência em uma situação-problema significativa para o estudante é uma estratégia facilitadora no trato pedagógico do conceito de função". Esse cuidado foi tomado ao serem criados os problemas que fazem parte desta pesquisa.

Silva (2008) aponta a importância de propor situações em que o estudante perceba a variação de uma grandeza em relação a outra; sendo essa variação associada a um valor, isso implica na construção do conceito de função. Propusemos no problema 1 essa variação de grandezas com a busca de quantos reais ao todo Pedro gastou no parque de diversões.

Para determinar a resposta do item "a" é necessário multiplicar a quantidade de ingressos por R$ 4,00, que representa o valor do ingresso para cada brinquedo, e, em seguida, somar com R$ 5,00, que representa o valor da entrada, para poder encontrar o valor total gasto por Pedro. Representado o esquema sagital da questão "a" com base em Vergnaud (2009b), Miranda (2019) e Rodrigues e Rezende (*2021*), obtemos:



Para a identificação de "V" temos uma relação quaternária de proporção simples *multiplicação um para muitos* da seguinte forma:



Podemos verificar a relação existente entre a quantidade de ingressos e o valor pago por eles, em que um ingresso corresponde a quatro reais e sete ingressos correspondem a V reais. Algebricamente, podemos representar essa relação da seguinte maneira: $\frac{1}{7} = \frac{4}{V}$, logo $V = 7 \times 4 = 28$.

A relação para a parte final da resolução, que pede o gasto total de Pedro, corresponde a uma relação ternária de composição de medidas com a composição desconhecida, na qual R\$ 28,00 representa uma parte e R\$ 5,00 a outra parte. Assim, a resolução da primeira questão resulta em: $V = 28 + 5 = 33$. Logo, na questão "a", o gasto total de Pedro ao comprar 7 ingressos é R\$ 33,00. Notamos que é possível modelar a resolução desse problema pela seguinte função afim: $f(x) = 4x + 5$, em que 4 representa o valor para cada ingresso, x a quantidade de ingressos comprados e 5 o valor da entrada no parque.

Para a resolução da questão "b", o processo de resolução é semelhante ao da questão "a", mudando apenas a quantidade de ingressos.

A questão "c" foi incluída com o objetivo possibilitar ao estudante refletir acerca dos cálculos das questões *"a"* e *"b",* e notar as ideias de variável, a regularidade, a dependência e a correspondência presente nesse problema, para que então ele possa generalizar ao responder a questão “d”.

Antes de propor os problemas aos estudantes, realizamos um estudo *a priori* com o intuito de identificar esquemas de resolução, ideias de função envolvidas e erros possíveis de serem mobilizados pelos estudantes. Apresentamos no Quadro 9 a seguir a análise *a priori* realizada para o problema 1.

Quadro 9 – Análise a priori do problema 1

Possíveis esquemas de resolução dos estudantes	**Ideias de função envolvida**	**Possíveis erros dos estudantes**
a) $\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 4 \\ \hline 28 \end{array}$ $\begin{array}{r} 28 \\ +\ \ 5 \\ \hline 33 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 4 \\ \hline 48 \end{array}$ $\begin{array}{r} 48 \\ +\ \ 5 \\ \hline 53 \end{array}$ c) Realizando as operações de multiplicação e adição. d) Multiplicando a quantidade de ingressos por 4 e somando com 5.	*Ideias-base de função*: - Variável; - Dependência; - Correspondência; - Regularidade; - Generalização. *Proporcionalidade*: $\frac{1}{7} = \frac{4}{V}$ e $\frac{1}{12} = \frac{4}{V}$ $V = 7 \times 4$ e $V = 12 \times 4$ *Modelação da Função afim*: $f(x) = 4x + 5$	- Apresentar como resposta final somente o valor dos gastos na compra dos ingressos, esquecendo de somar com o valor da entrada; - Somar o valor de um ingresso com o valor da entrada; - Colocar como valor de cada ingresso o valor que corresponde à entrada no parque, ou seja, ao invés de realizar 7×4, por exemplo, efetuar 5×4; - Ao solicitar na letra “d” que o estudante indique como calcular uma “qualquer quantidade” de ingresso, o estudante substitua essa “quantidade qualquer” por um valor aleatório; - Efetuar as contas com erros de cálculos, tanto na adição, quanto na multiplicação.

Fonte: arquivo de pesquisa.

A seguir apresentamos as resoluções dos estudantes juntamente com nossas análises referentes ao problema 1.

4.1.1 *Análise e Discussão dos Resultados do Problema 1*

Na primeira questão do problema 1, quatro grupos apresentaram esquemas adequados para a resolução da questão, sendo eles: Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 6. Os estudantes desses grupos manifestaram em seus diálogos e em seus protocolos escritos a compreensão de que era preciso multiplicar a quantidade de ingressos, sete ingressos, por R$ 4,00, e, ao final somar o resultado da multiplicação com cinco para identificarem o gasto total.

Nos diálogos a seguir, notamos os estudantes do Grupo 1 conversando entre si em busca de solucionar o problema:

***Estudante 1**: Eu vou ler a situação e nós resolve! (o estudante 1 lê o problema)*
***Estudante 2**: É... 4×7. Ó... O ingresso é 4 reais.*
***Estudante1**: É, mas só que para ele entrar ele gastou 5 reais dele, não foi?*
***Estudante 2**: É... 4×7 e depois 5...*
***Estudante 1**: Calma! Vou ler de novo para nós entender.*
Nesse momento o estudante 1 lê novamente o enunciado, ao terminar ele diz:
***Estudante 1**: Ele entrou no parque, ele gastou 5 reais. Vamos fazer 4×7, o valor mais 5 reais... Não é?*
***Estudante 2**: É!*
***Estudante 1**: 4×7 é... Calma aí! 7 com 7, quatorze, 14 com 14, vinte e oito. O total deu 28! Agora, $28 + 5$. Vamos fazer a conta aqui. Vinte e oito... Mais cinco... Oito mais cinco é igual a...*
***Estudante 2**: 13!*
***Estudante 1**: 13, sobe um aqui em cima. Um mais dois é igual a três... Trinta e três! Vamos fazer a resposta completa aqui... O gasto total de Pedro foi 33 reais. Pronto! Agora nós já resolvemos a primeira! Vamos ver a segunda!*

Após terminarem, os estudantes do Grupo 1 expõem à pesquisadora como eles resolveram a primeira questão: "*É... Nós multiplicamos o valor do ingresso pela quantia comprada e adicionamos mais cinco, que foi a entrada do parque, pra saber quantos que ele gastou no total*".

A seguir, na Figura 4, apresentamos a resolução do Grupo 1.

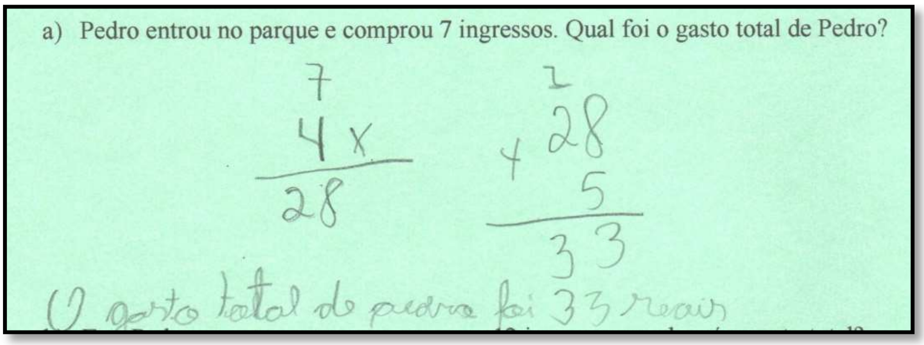
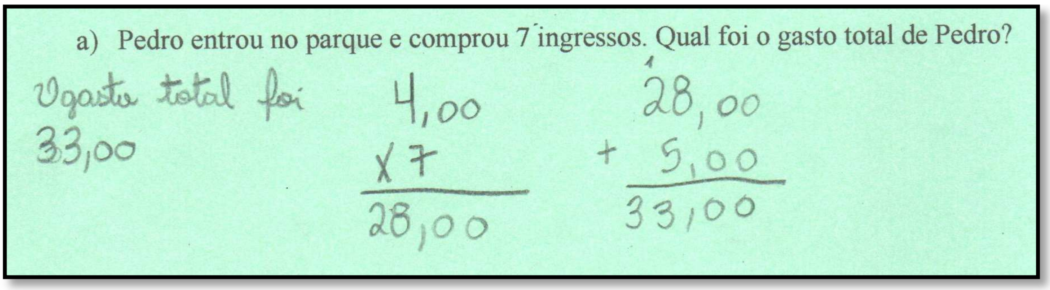


Figura 4: Resolução da questão "a" do problema 1 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

De forma análoga ao esquema apresentado na Figura 4, os estudantes do Grupo 2 e Grupo 3 apresentaram esquema de resolução e diálogos semelhantes ao do Grupo 1, como podemos observar na explicação dada à pesquisadora pelo estudante 5, do Grupo 3: "*Aqui nós vimos que é 7 ingressos, vimos que cada brinquedo custa 4, então 7×4 que dá 28 mais o 5*

da entrada que deu 33” e pela estudante 11 do Grupo 6: “*Como ele comprou* 7 *ingressos e o valor do ingresso é* 4 *reais a gente fez isso pra saber quanto que dá o valor de* 7 *ingressos aí depois a gente colocou mais* 5 *reais porque Pedro entrou no parque e custa* 5 *reais, aí a gente fez pra saber quanto que ele gastou*”.

O esquema de resolução das estudantes do Grupo 6, embora apresente o mesmo resultado do Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3, se difere do apresentado na Figura 4, pois as estudantes apresentaram a multiplicação de R$ 4,00 por 7 ingressos, como podemos verificar na Figura 5 a seguir.


a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

O gasto total foi 33,00

$$\begin{array}{r} 4{,}00 \\ \times\ 7 \\ \hline 28{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28{,}00 \\ +\ 5{,}00 \\ \hline 33{,}00 \end{array}$$

Figura 5: Resolução da questão “a” do problema 1 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

Em nossas análises, consideramos os esquemas dos estudantes como o registro escrito apresentado por eles, pois, segundo a TCC, os invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes por meio dos esquemas podem ser manifestados por algoritmos, desenhos, traços, entre outras formas (VERGNAUD, 1993).

Nas resoluções supracitadas, verificamos que os esquemas de resolução apresentados consistiram na utilização do algoritmo da multiplicação e da adição para resolverem a questão “a”. Os estudantes do Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 3 realizaram os cálculos de 7×4, e as estudantes do Grupo 6, $R\$\ 4{,}00 \times 7$, sendo que 7 representa a quantidade de ingressos, e 4, o valor de cada ingresso; ao encontrarem o resultado, somaram corretamente com 5.

Os estudantes do Grupo 4 e do Grupo 5 apresentaram como resposta para a questão *“a”* a multiplicação do valor do ingresso (R$ 4,00) pela quantidade pedida no enunciado (7), ou seja, 7×4, e também multiplicaram o valor da entrada no parque (R$ 5,00) pela quantidade de ingressos comprados. Ao final, esses estudantes somaram os resultados obtidos nessas multiplicações. O mesmo raciocínio foi mantido ao resolverem a questão “b”, mudando apenas a quantidade de ingressos. Na Figura 9, a seguir, ilustramos a resolução do Grupo 5 referente às duas primeiras questões do problema 1.

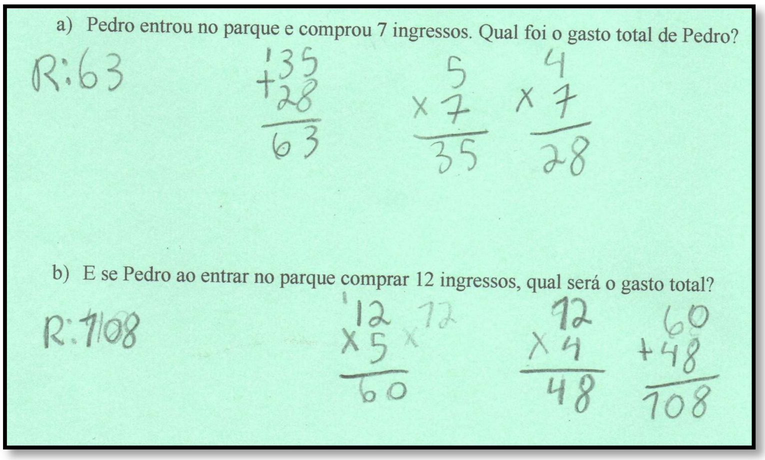


Figura 6: Resolução das questões “a” e “b” do problema 1 – Grupo 5
Fonte: arquivo de pesquisa.

Durante os diálogos entre os estudantes do Grupo 5, percebemos a mobilização de um *teorema em ação,* manifestado pelo estudante 9, ao dialogar sobre a resolução da questão com a sua dupla. Nesse diálogo, identificamos um *teorema em ação falso* para a solução do problema, porém pertinente para a resolução do estudante 9. Podemos verificar os diálogos entre os estudantes ao resolverem a primeira e segunda questões:

Os estudantes fazem a leitura do primeiro problema de forma individual.
***Estudante 9**: Você entendeu?*
***Estudante 10**: Entendi. E você?*
***Estudante 9**: Eu também. Então qual é a sua resposta pra ver se é a mesma?*
***Estudante 10**: É só fazer* 5×7*. Pedro entrou no parque e comprou* 7 *ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro? A entrada no parque custa... É...* 4 *vezes o* 7*.*
***Estudante 9**: Eu fiz diferente... Mas eu acho que o resultado é o mesmo.*
***Estudante 10**: Como você fez?*
***Estudante 9**: Eu somei os dois e multipliquei por* 7*.*
***Estudante 10**: Somou esses dois?*
***Estudante 9**: É. Deu* 63*.*
***Estudante 10**: É mesmo né? Por que como que ele vai entrar de graça.*
***Estudante 9**: Então... É só fazer o seguinte,* 4×7 *e depois* 5×7 *e somar os dois.*
***Estudante 10**: Mas eu acho melhor a gente fazer* 7×4*, porque se não falava assim é... Pedro entrou no parque, pagou pela entrada e comprou* 7 *ingressos. Ta falando dos ingressos.*
***Estudante 9**: Isso já ta na pergunta de baixo.*
***Estudante 10**: Oi?*
***Estudante 9**: Você está na pergunta de baixo.*
***Estudante 10**: Não, essa daqui ó.*
***Estudante 9**: Essa daqui é de* 7 *a de baixo é de* 12*.*
***Estudante 10**: Então. Eu to falando se, por exemplo, falasse... É... A entrada seria* 5 *reais.*
***Estudante 9**: Não. Aqui é o seguinte... O valor do ingresso para cada brinquedo é* 4 *reais e pra entrar no parque é* 5*, então pra você andar em um brinquedo só você gasta* 9 *reais e se ele comprou* 7 *ingressos... Só se for* 7 *de cada né. Aí dá* 63 *do mesmo jeito. É* 63*!*
A estudante 10 lê novamente o enunciado.
***Estudante 10**: Porque se fosse assim, se fosse colocar o* 5 *reais e o* 4 *reais, seria ele entrou no parque pagou* 5 *reais e comprou ingressos. Seria, eu acho, comprar só* 12 *ingressos.*

***Estudante 9**: Bom, mas de qualquer jeito a resposta é* 63*! É só multiplicar o* 5×7 *e* 4×7*. Ó, o* 5×7 *dá* 35 *e o* 4×7 *dá 28, aí soma tudo...* 63.
***Estudante 10**: Fazer o* 7×5*?*
***Estudante 9**: É.*
***Estudante 9**:* 12 *ingressos... Essa daqui eu já li e já entendi também.*
***Estudante 10**: É só fazer* 12×5 *né? Não...* 4.
***Estudante 9**: Não. É tudo.*
***Estudante 10**: Não é* 12×4.
***Estudante 9**:* 12×5 *e* 12×4.
***Estudante 10**: Não, porque aqui tá falando depois de entrar no parque... Então vai ter que fazer* 12×4.
***Estudante 9**: Bom nas minhas contas, e eu perdi as contas mas tá bom, é... Fica* 40*,* 48 *aqui da* 50*,* 60*...* $50 + 48$*...* 108 *então* 108 *reais!*
***Estudante 9**: Você já está na última?*
***Estudante 10**: Tô.*
***Estudante 9**: Ah, então é a mesma resposta?*
***Estudante 10**: Só essa daqui que eu fiz* 12×4.
***Estudante 9**: Ah, então essa daqui ou eu estou errado ou é você! Bom, eu entendi o seguinte nessa daqui...* 12×5 *e o* 12×4.
***Estudante 10**: Porque essa aqui que o Pedro entrou não tem nada a ver.*
***Estudante 9**: E se Pedro ao entrar no parque e comprar* 12 *ingressos de cada. Aqui falta palavra, mas se colocar um 'cada' aqui dá uma dica.*
***Estudante 10**: Deu* 108 *o seu?*
***Estudante 9**: É o meu deu* 108*. E essa daqui você entendeu? Eu já entendi*

Apesar de a estudante 10 não estar satisfeita com a resposta, ela acabou seguindo o raciocínio do estudante 9. No momento em que a estudante 10 menciona: "*Mas eu acho melhor a gente fazer* 7×4*, porque se não falava assim é... Pedro entrou no parque, pagou pela entrada e comprou* 7 *ingressos. Tá falando dos ingressos*", ela estava se referindo a multiplicar somente a quantidade de ingressos por R$ 4,00, e não multiplicar a quantidade de ingressos pelo valor da entrada.

O estudante 9 justifica o seu argumento com a seguinte fala: "*Não. Aqui é o seguinte... O valor do ingresso para cada brinquedo é* 4 *reais e pra entrar no parque é* 5*, então pra você andar em um brinquedo só você gasta* 9 *reais e se ele comprou* 7 *ingressos... Só se for* 7 *de cada, né. Aí dá* 63 *do mesmo jeito. É* 63*!*". A estudante 10 lê novamente o enunciado e insiste com o seu argumento: "*Porque se fosse assim, se fosse colocar o* 5 *reais e o* 4 *reais, seria ele entrou no parque pagou* 5 *reais e comprou ingressos. Seria, eu acho, comprar só* 12 *ingressos*". Até que o estudante 9 menciona: "*Ah então essa daqui ou eu estou errado ou é você! Bom eu entendi o seguinte nessa daqui...* 12×5 *e o* 12×4". Por fim, a estudante acabou se convencendo e fez da forma como o estudante 9 havia explicado.

O estudante 9 compreendeu que o valor da entrada era pago por cada ingresso comprado, e não somente uma vez, como estudante 10 tentou explicar. Ao explicar a resolução desse problema para a pesquisadora, a estudante 10 explicita: "*Porque, se Pedro entrou, quer dizer que ele já pagou um tanto e depois ele comprou os ingressos*", como podemos conferir nos diálogos seguintes entre os estudantes e a pesquisadora:

***Pesquisadora**: Gente, como vocês fizeram nessa? Pode falar os dois ou qualquer um. Na letra "a, vamos lá. Vocês fizeram aqui* 5×7 *e aqui vocês fizeram... Como é que é?*
***Estudante 9**:* 4×7.
***Pesquisadora**: Então espera lá. A primeira conta que vocês fizeram é* 5×7*?*
***Estudante 9**: É.*
***Pesquisadora**: Tá. Por que vocês fizeram* 5×7*? Só pra eu saber.*
***Estudante 10**: Porque se Pedro entrou quer dizer que ele já pagou um tanto e depois ele comprou os ingressos.*
***Pesquisadora**: Ah tá, então espera lá, vamos voltar. Esse* 5*, do que você está considerando?*
***Estudante 10**: Da entrada.*
***Pesquisadora**: Beleza. E esse* 7*?*
***Estudante 10**: Dos ingressos.*
***Pesquisadora**: Ah, ok, que deu* 35*, beleza. E aqui essa continha?*
***Estudante 10**: É dos brinquedos e dos ingressos. Eu juntei os dois.*
***Pesquisadora**: Ah, somou os dois, beleza. Entendi agora o que vocês fizeram. E na letra "b", o que vocês pensaram pra resolver?*
***Estudante 9**: Eu meio que não fiz conta, né. Lá em São Paulo eu não fazia conta, fazia tudo de cabeça.*
***Pesquisadora**: Ah, é? Que legal... E como você fez a sua conta de cabeça?*
***Estudante 9**: Eu fiz praticamente do mesmo jeito daqui, só que ao invés de* 7 *eu multipliquei por* 12.
***Pesquisadora**: O que vocês multiplicaram por* 12*?*
***Estudante 10**: O* 5 *e o* 4.
***Pesquisadora**: Vocês estão falando que a letra "b" é igual a letra "a", só que na letra "b" vocês fizeram a mesma coisa e colocaram* 12 *no lugar de quem?*
***Estudante 10**: Do* 7.

De forma análoga ao esquema representado na Figura 9, as estudantes do Grupo 4 apresentaram esquema de resolução semelhante ao do Grupo 5 para as duas questões do problema 1. Em seu diálogo, a estudante 7 (Grupo 4) fala para a sua dupla, após terem lido o enunciado da questão: "*Oh, eu vou colocar o valor... É* 7×5 *e* 7×4*. Ele comprou 7 ingressos!*", e as estudantes desse grupo conversam entre si sobre as contas a serem realizadas, de multiplicação e adição. Em sua explicação para a pesquisadora, referente à questão *"b",* a estudante 7 menciona: "*A gente fez* 12×5 *e* 12×4*. Porque daí ele comprou 12 ingressos, né, aí a gente fez vezes 5, que deu esse resultado. Na* 12×5 *deu 60 e* 12×4 *deu 48 e fizemos* $48 + 60$ *que deu 108*".

Podemos observar que os estudantes do Grupo 4 e Grupo 5 resolveram a questão *"a"* e a questão *"b"* do problema 1 de forma incoerente com problema. Esses estudantes multiplicaram a variável (quantidade de ingressos) tanto pelo valor correspondente a cada ingresso, como também pelo valor da entrada no parque (constante), ou seja, na função afim definida como $f(x) = a.x + b$, os estudantes apresentaram o seguinte *teorema em ação* falso: Seja f uma relação funcional, então $f(x) = a.x + b.x$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$.

Outros grupos, Grupo 1, Grupo 3 e Grupo 6, apresentam esquema de resolução na questão *"b"* semelhante ao da questão *"a"*, apresentando soluções corretas; os estudantes do Grupo 2 fizeram corretamente a multiplicação 12×4, porém esqueceram-se de somar o resultado com 5, para encontrar o gasto total. Isso pode ser observado na Figura 6 a seguir.

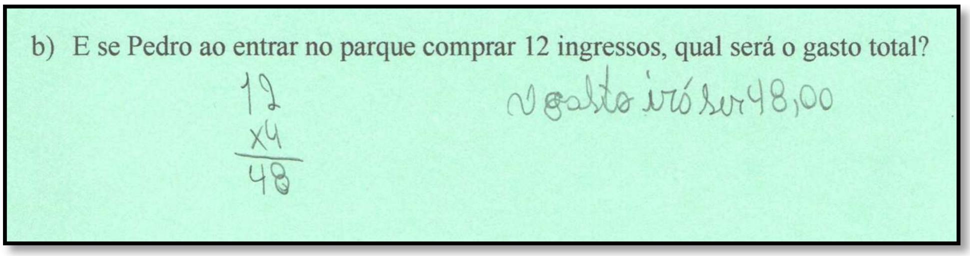


Figura 7: Resolução da questão "b" do problema 1 – Grupo 2
Fonte: arquivo de pesquisa.

Já os estudantes do Grupo 1, Grupo 3 e Grupo 6 acertaram a questão *"b"* e indicaram em seus diálogos que a resolução dessa questão se assemelha com a questão *"a",* mudando apenas a quantidade de ingressos considerados. Os estudantes do Grupo 1 mencionaram à pesquisadora, durante a explicação da questão "b": "*A mesma coisa. Só mudou a quantidade de ingressos daí.*". A explicação dos estudantes do Grupo 3 para a pesquisadora foi a seguinte: "*A outra, nós fizemos 12 ingressos, aí colocamos 12* $\times$ *4, que é do brinquedo, e a entrada do parque, que é 5*". E a explicação das estudantes do Grupo 6 foi: "*A mesma coisa, só que mudou os números. Aí aqui é* 12".

Para ilustrar a resolução escrita dos estudantes, apresentamos na Figura 7, as soluções do Grupo 1, semelhante à resolução do Grupo 3.

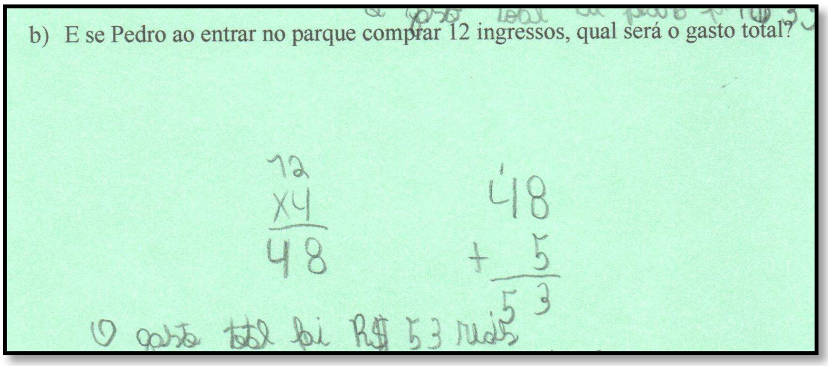


Figura 8: Resolução da questão “b” do problema 1 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

As estudantes do Grupo 6, assim como na questão *“a”,* chegaram ao mesmo resultado dos estudantes do Grupo 1 e Grupo 3, porém apresentando como esquema de resolução a multiplicação de $R\$ \, 4{,}00$ por 12 ingressos, como podemos verificar na Figura 8 a seguir.

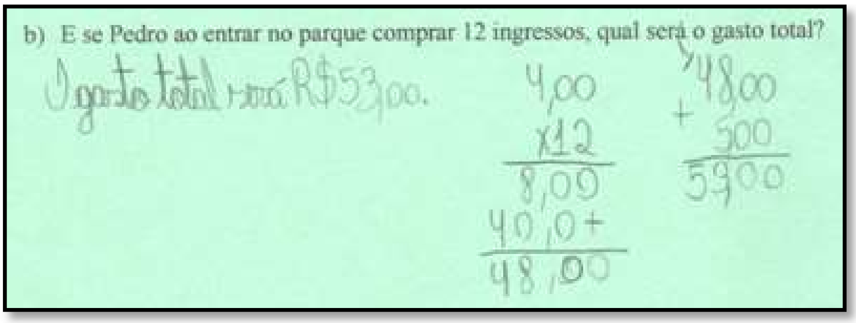


Figura 9: Resolução da questão “b” do problema 1 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

A ideia de *regularidade* não está apresentada de forma explícita no problema 1, mas esperávamos que os estudantes identificassem a regularidade existente, observando que os mesmos cálculos realizados na questão *“a”* valeriam para outras quantidades, alterando a quantidade de ingressos, pois a identificação de regularidades em uma situação funcional é uma habilidade essencial para a construção do conceito de função (TRINDADE, MORETTI 2000; TINOCO, 2002). Além disso, a BNCC também indica que a ideia de *regularidade* seja trabalhada desde os Anos Iniciais (BRASIL, 2018).

Para Caraça (1951), observar e descrever alguns fenômenos permitem identificar a ideia de *regularidade*, uma vez que “[...] ela se manifesta por meio do comportamento idêntico considerando condições iniciais iguais (SILVA, 2021, p. 241-242). Nesse sentido, observamos nos diálogos e nos protocolos escritos dos estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e Grupo 6, que eles identificaram a *regularidade* existente, pois eles seguiram o mesmo raciocínio nas duas primeiras questões, mudando apenas a quantidade de ingressos comprados, o valor de cada ingresso, e o valor da entrada foi preservado.

Em relação ao conceito de *proporcionalidade*, observamos que esta ideia surge por meio da multiplicação relacionada ao raciocínio de correspondência e por meio de representação da relação entre duas variáveis (NUNES, 2003). Nesse sentido, verificamos que os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e Grupo 6 manifestaram tal conceito, pois ao multiplicarem na primeira questão 7×4 ou $4{,}00 \times 7$ e na segunda questão 12×4 ou $4{,}00 \times 12$, está implícita a seguinte proporcionalidade: 1 está para 4, assim como 7 está para x; da mesma forma, 1 está para 4, assim 12 está para x, ou seja, um ingresso corresponde a R$ 4,00 reais, assim como 7 ingressos correspondem a x reais, do mesmo modo, um ingresso corresponde a R$ 4,00 reais, assim como 12 ingressos correspondem a x reais. Algebricamente fica representado da seguinte forma: $\frac{1}{7} = \frac{4}{x}$ e $\frac{1}{12} = \frac{4}{x}$. Multiplicando cruzado essa igualdade, temos: $x = 7 \times 4$ e $x = 12 \times 4$.

Mesmo que as estudantes do Grupo 6 tenham apresentado em seus protocolos escritos as multiplicações $4{,}00 \times 7$ e $4{,}00 \times 12$, foi possível verificar em seus diálogos que elas compreenderam que era necessário multiplicar 7×4 e 12×4, porém, como elas utilizam o algarismo quatro seguido de dois zeros após a vírgula – $4{,}00$ –, acreditamos que elas utilizaram $4{,}00$ como primeiro valor no algoritmo da multiplicação devido à quantidade de algarismos contida em 4,00 ser maior do que em 7 e 12.

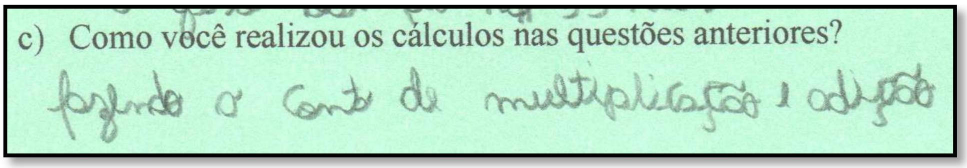
Ao analisar as resoluções do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 6 foi observado que, no esquema manifestado, guardadas as operações e notações matemáticas esperadas para estudantes do 5º ano, as ideias envolvidas podem ser associadas à modelação da função $f(x) = 4x + 5$, com $f(x)$ representando o gasto total de Pedro no parque, identificado por meio da multiplicação de 4, que representa a taxa de variação da função; com o x, que representa a quantidade de ingressos comprados mais a constante 5, que representa o valor da entrada no parque.

O conhecimento mobilizado pelos estudantes desses grupos pode ser associado ao seguinte *teorema em ação* verdadeiro: Seja f uma relação funcional, então $f(x) = a.x + b$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$ (RODRIGUES, 2021), pois os estudantes multiplicaram a taxa de variação da função por x, e o resultado somaram com b, para encontrar a $f(x)$.

A ideia de *correspondência* foi manifestada pelos referidos grupos, uma vez que eles resolveram corretamente uma situação-problema que envolve proporção simples. Ao apresentarem a multiplicação 7×4 e, de acordo com as análises dos diálogos, notamos a ideia de correspondência quando os estudantes afirmam que cada ingresso equivale a R$ 4,00. Assim, 7 ingressos correspondem a R$ 28,00.

Para os Anos Iniciais, a ênfase não deve ser colocada em expressões algébricas ou representações conceituais que expressam noções da ideia de *dependência*, mas em relações estabelecidas entre grandezas variáveis (BRASIL, 2018). Nesse sentido, foi possível identificar que os estudantes perceberam a ideia de *dependênci*a no problema 1, mesmo de forma implícita. O estudante 1, por exemplo, expõe: "*É, mas só que para ele entrar, ele gastou cinco reais dele, não foi?*" "*Ele entrou no parque, ele gastou cinco reais. Vamos fazer quatro vezes sete, o valor mais cinco reais... Não é?*". Podemos notar que ele mobiliza a ideia de *dependência*, pois o estudante sabe que, para encontrar o valor total, é preciso identificar o valor gasto com os ingressos e depois somar com o valor da entrada, apresentando ideia de dependência entre duas grandezas variáveis. A resolução do problema 1 pode ser modelada pela expressão algébrica da função afim $f(x) = 4x + 5$, sendo x a variável independente, $f(x)$ a variável dependente, 4 a taxa de variação e 5, a constante.

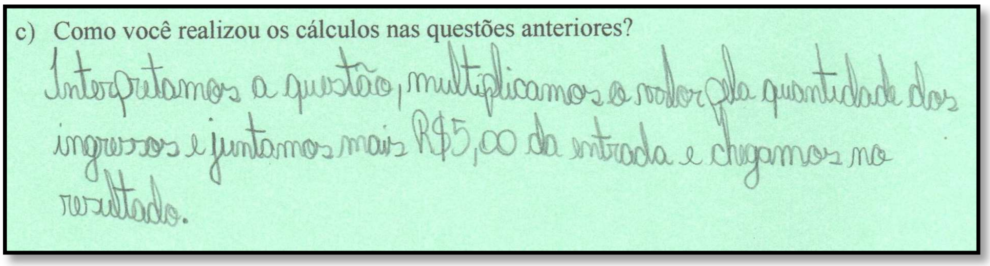
As questões *"c"* e *"d"* estavam relacionadas à ideia-base de generalização, sendo que intuito da questão *"c"* é auxiliar o estudante a chegar a uma possível generalização do problema. Assim, os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4 e Grupo 5 indicaram que realizaram as operações de multiplicação e adição. A Figura 10 seguinte indica a resolução dos estudantes do Grupo 1, análoga às dos demais.


c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

fazendo a conta de multiplicação e adição

Figura 10: Resolução da questão "c" do problema 1 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

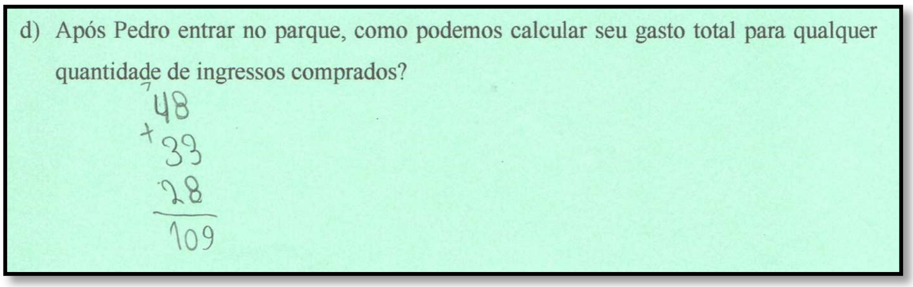
Somente as estudantes do grupo 6 indicaram uma resposta diferente dos demais, apresentando para a questão *"c"* o que está indicado na Figura 11 a seguir.


c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Interpretamos a questão, multiplicamos o valor pela quantidade dos ingressos e juntamos mais R$5,00 da entrada e chegamos no resultado.

Figura 11: Resolução da questão "c" do problema 1 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

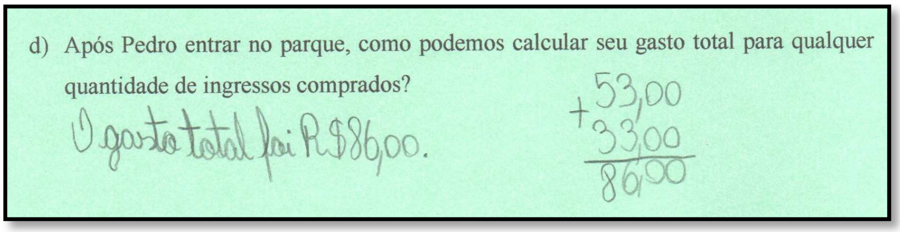
Na questão *"d",* os estudantes do Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4 e Grupo 6 apresentaram como resposta a soma dos resultados que obtiveram nas questões *"a"* e *"b"*. Os estudantes do Grupo 2 somaram os dois valores obtidos na questão *"a",* 28 e 33, resultantes de de $7 \times 4 = 28$ e $28 + 5 = 33$, com o valor encontrado na questão *"b",* 48, resultado de 12×4, como podemos verificar na Figura 12 a seguir.


d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

$$\begin{array}{r} 48 \\ + \; 33 \\ 28 \\ \hline 109 \end{array}$$

Figura 12: Resolução da questão "d" do problema 1 – Grupo 2
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os estudantes do Grupo 3 e do Grupo 6 somaram o resultado obtido na questão *"a",* 33, com o resultado obtido na questão *"b",* 53, como podemos observar na Figura 13 a seguir.

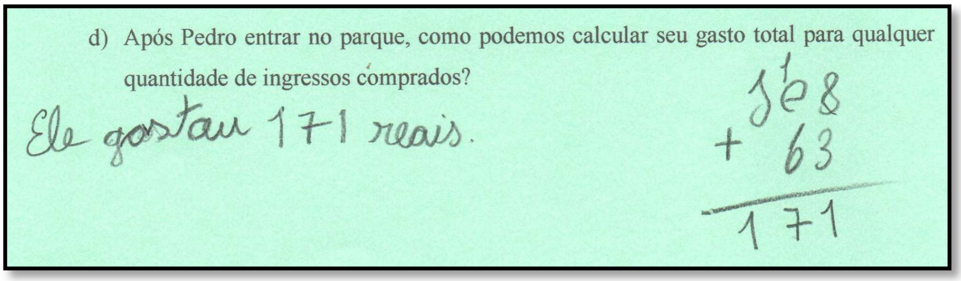

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

O gasto total foi R$86,00.

$$\begin{array}{r} 53{,}00 \\ + \; 33{,}00 \\ \hline 86{,}00 \end{array}$$

Figura 13: Resolução da questão "d" do problema 1 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

As estudantes do Grupo 4 também somaram o resultado da questão *"a"* com o resultado da questão *"b",* porém o resultado que elas obtiveram nessas duas questões foi $R\$\ 63{,}00$ e $R\$\ 108{,}00$, respectivamente, e esses resultados não condizem com o problema. A soma desses resultados podem ser observadas na Figura 14.

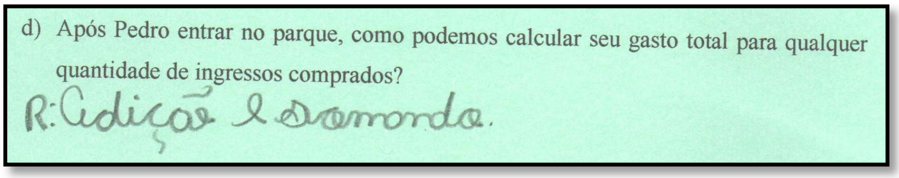

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

Ele gastou 171 reais.

$$\begin{array}{r} 108 \\ +\ 63 \\ \hline 171 \end{array}$$

Figura 14: Resolução da questão "d" do problema 1 – Grupo 4
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os estudantes do Grupo 5 apresentaram a seguinte resposta para a questão *"d"*, representada na Figura 15.

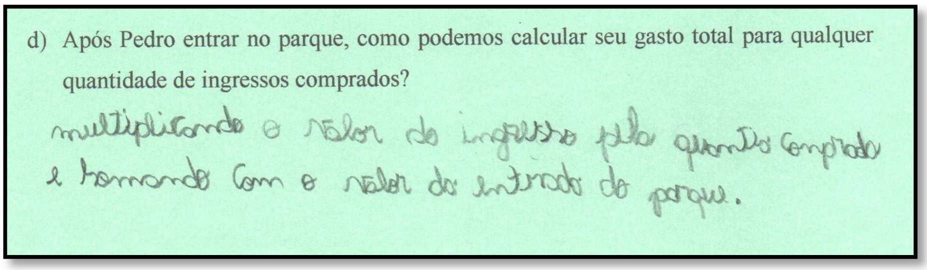

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

R: adição e somando.

Figura 15: Resolução da questão "d" do problema 1 – Grupo 5
Fonte: arquivo de pesquisa.

Em seus diálogos, o estudante 9, do Grupo 4, explica para a sua dupla que na questão *"d"* não se deve somar os resultados obtidos nas questões anteriores: "*Não, se fosse pra juntar estaria escrito diferente. Mas aqui está perguntando após Pedro entrar no parque como podemos calcular, COMO PODEMOS, não tá falando quanto que é o gasto total dele, tá falando como podemos*", e, ao explicar para a pesquisadora, o estudante 9 expõe: "*Esse 'podemos' aqui já dá uma certa dica de 'como podemos', se fosse qual o valor total, aí teria que fazer o* $63 + 108$". Embora os estudantes do Grupo 4 não tenham conseguido realizar corretamente as questões *"a"* e *"b"*, eles apresentam dados de uma possível generalização para o problema, mesmo que de forma implícita.

Os estudantes do Grupo 1 conseguiram apresentar uma generalização para esse problema, como podemos verificar na Figura 16 a seguir.


d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

multiplicando o valor do ingresso pela quantidade comprada e somando com o valor da entrada do parque.

Figura 16: Resolução da questão "d" do problema 1 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

Em seus diálogos, o estudante 1 explicita para o estudante 2: "*Hum... o gasto total? Multiplicando pelo valor do ingresso e somando com a entrada do parque... Multiplicando o valor do ingresso pela quantia comprada... e somando com o valor da entrada do parque, né? E somando com o valor da entrada do parque*".

Podemos observar que o estudante 1 conseguiu explicitar a *generalização* do problema para a sua dupla, mesmo sem apresentar expressões matemáticas. Quando o estudante 1 pronuncia que, para calcular o gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados, é "*Multiplicando o valor do ingresso pela quantia comprada e somando com o valor da entrada no parque*", fica evidenciada a compreensão desse estudante, relacionadas às ideias de *regularidade*, *variáve*l e de *generalização*, porque o estudante entende que a "quantidade qualquer" de ingressos implica na "*quantia comprada*" que ele menciona, ou seja, pode se referir a qualquer quantidade de ingressos, e essa quantidade qualquer sempre será multiplicada pelo valor do ingresso. Para finalizar o raciocínio, o estudante 1 também indica que se deve somar o valor da entrada no parque com o produto encontrado.

Fica explícito que o estudante 1 manifesta o conhecimento para encontrar o gasto total independentemente da quantidade de ingressos comprada. Percebemos que o estudante, aqui, evidencia a compreensão de um padrão quando altera-se uma das variáveis e, dessa forma, ele consegue chegar a uma generalização. Tal fato vai em direção a Tinoco (2020) e Calado (2020), que indicam que a capacidade de registrar argumentos e linguagem coerentes, que justifiquem a validade da resolução para qualquer caso – a generalização –, é um passo decisivo que indica a construção do conceito de função, pois a "[...] a generalização em linguagem natural pode auxiliar na construção da linguagem algébrica" (CALADO, p. 34). Ademais, generalizar ideias matemáticas, como fez o estudante 1, descreve o pensamento algébrico nos Anos Iniciais, mais especificamente o pensamento funcional apontado por Blanton e Kaput (2005).

Em nossas análises, consideramos a modelação da função afim em todos os esquemas que apresentam soluções no formato $f(x) = a.x + b$, contidas nos problemas 1 e 4, e $b = f(x) - a.x$, presentes nos problema 2 e 3, e que sejam coerentes com o resultado dessas soluções, ou seja, todos os esquemas que apresentem cálculos de multiplicação e adição nos problemas 1 e 4, e multiplicação e subtração nos problemas 2 e 3.

Desse modo, os estudantes do Grupo 1 apresentaram as seguintes ideias-base: *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável* e *generalização*. A ideia de *proporcionalidade* e a possível modelação da função afim também foram mobilizadas. Com exceção da *generalização*, os estudantes do Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 6 também manifestaram as ideias de função mencionadas.

Embora os estudantes do Grupo 4 e Grupo 5 tenham mobilizado um *teorema em ação* falso ao solucionarem as questões “a” e “b”, também admitimos que esses estudantes manifestaram as ideias de *correspondência, dependência, regularidade, variável* e *proporcionalidade*.

Como análise *a posteriori,* verificamos que os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 6 conseguiram solucionar o problema de forma coerente com esquemas de resolução previstos nas análises *a priori*. Os estudantes do Grupo 2, mesmo apresentando resposta correta na questão *“a”* do problema 1, trouxeram soluções incorretas na questão *“b”*, como indicado nas análises *a priori*, por exemplo, multiplicaram a quantidade de ingressos pelo valor correspondente a cada um e esqueceram de somar o resultado com o valor da entrada. Um teorema em ação falso, que não estava previsto nas análises *a priori*, emergiu durante as análises, tendo sido manifestado por dois grupos, 4 e 5, os quais multiplicaram a variável tanto pela taxa de variação quanto pela constante. Outro fato ocorrido que não estava previsto refere-se aos estudantes dos grupos 2, 3, 4 e 6, que apresentarem como resposta da questão *“d”,* que se referia à generalização, a soma dos resultados obtidos nas questões *“a”* e *“b”.*

Na sequência, apresentamos nossas análises e discussões referentes ao problema 2.

4.2 Apresentação do Problema 2

O problema 2 pertence à classe de proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas – *com a parte desconhecida*. A parte de proporção simples se refere a uma relação quaternária. Esse problema contempla três ideias-base de função – dependência, correspondência e regularidade – e a ideia de proporcionalidade. Podemos verificar o enunciado desse problema na Figura 17 a seguir.

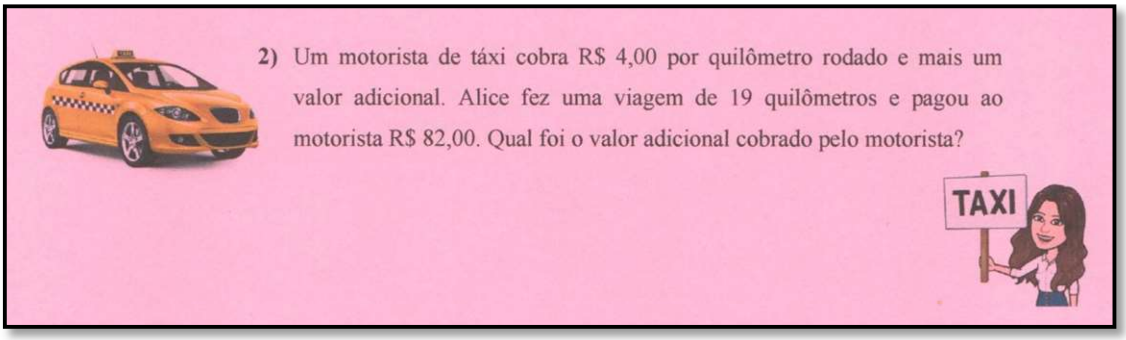
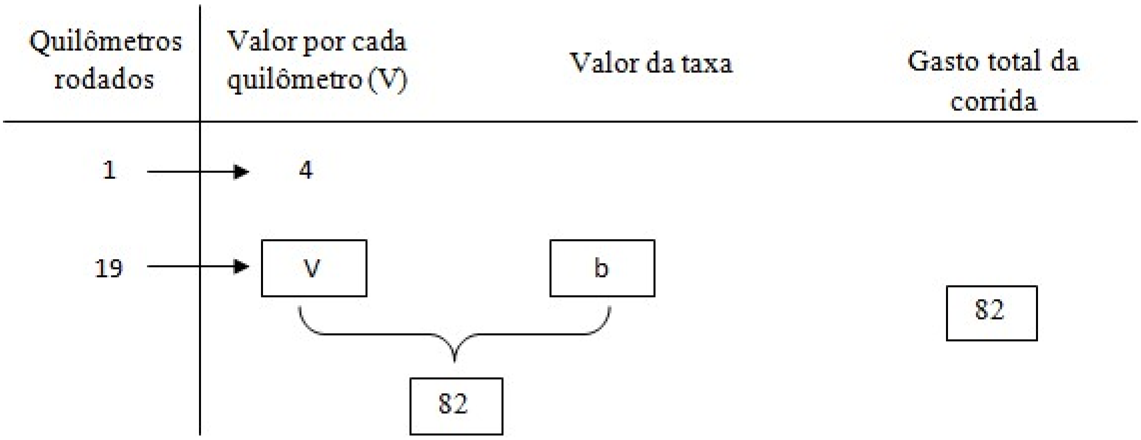


Figura 17: Problema misto 2 - proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas - *com a parte desconhecida*
Fonte: arquivo de pesquisa.

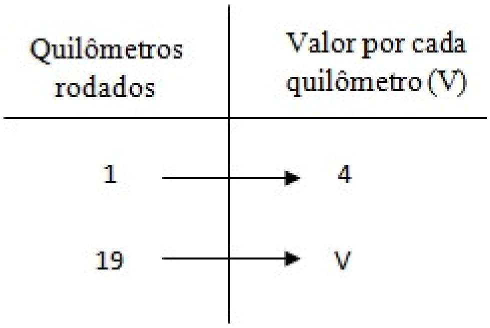
As variáveis didáticas contempladas nesse problema **s**ão:

- Proporção simples e composição de medidas – valor da variável didática: proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas – com a parte desconhecida;
- Possibilidade de modelação na forma de função $f(x) = ax + b$ – valor da variável didática: $82 = 4 \times 19 + b$.

Nesse segundo problema, a ideia é que o estudante encontre o valor da taxa cobrada pelo motorista de taxi. Esse valor representa a constante da função afim. Para encontrá-lo, primeiro é necessário multiplicar a quantidade de quilômetros rodados (19) pelo valor correspondente a cada quilômetro (R$ 4,00) e, em seguida, subtrair do total pago (R$ 82,00) a quantia encontrada na multiplicação. O esquema sagital que representa essa situação é:

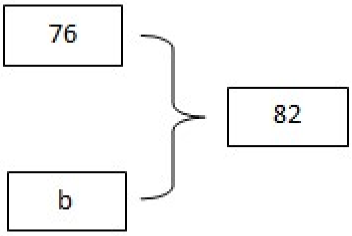


Para identificar "V", temos uma relação quaternária de proporção simples *multiplicação um para muitos* da seguinte forma:



Podemos verificar a relação existente entre a quantidade de quilômetros rodados e o valor pago por eles, em que um quilômetro rodado equivale a R$ 4,00 e 19 quilômetros correspondem a V reais. Algebricamente, podemos representar essa relação pela seguinte proporção: $\frac{1}{19} = \frac{4}{V}$, logo $V = 19 \times 4 = 76$.

A relação para a parte final da resolução corresponde a uma relação ternária de composição de medidas com a parte desconhecida, sendo 76 uma medida e 82 a composição, como podemos observar no esquema relacional proposto por Vergnaud (2009b) a seguir:



Algebricamente, temos: $b + 76 = 82$, então $b = 82 - 76 = 6$. Podemos modelar este problema no formato da função afim $f(x) = ax + b$ ao qual temos: $f(x) = 4x + b$; como $b = 6$, logo $f(x) = 4x + 6$.

Nesse problema não envolvemos as ideias de *variável* ou *generalização*, pois essa classe de problema não permite trabalhar com essas duas ideias. Seria até possível incluir outras questões que envolvessem *variável* e *generalização*, porém isso iria recair na classe do problema 1, e não tínhamos intenção de envolver duas classes em um único problema.

As análises *a priori* realizadas nesse problema estão descritas no Quadro 10 a seguir.

Quadro 10 – Análise a priori do problema 2

Possíveis esquemas de resolução dos estudantes	**Ideias de função envolvida**	**Possíveis erros dos estudantes**
	Ideias-base de função: - Dependência; - Correspondência; - Regularidade.	- Apresentar como resposta final somente o valor da multiplicação dos quilômetros rodados por 4, esquecendo de subtrair o 82 por

$\begin{array}{r} 19 \\ \times \quad 4 \\ \hline 76 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 82 \\ - \quad 76 \\ \hline 06 \end{array}$	*Proporcionalidade*: $\frac{1}{19} = \frac{4}{V}$ $V = 19 \times 4$ *Modelação da Função afim*: $82 = 4 \times 19 + b$	esse valor encontrado; - Somar o número 4 com o número 19; - Somar todos os valores numéricos que aparecem no enunciado; - Somar o resultado encontrado de 19 × 4 com 82; - Efetuar os cálculos com erros de resultado na subtração e/ou multiplicação.

Fonte: arquivo de pesquisa.

4.2.1 *Análise e Discussão dos Resultados do Problema 2*

Os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 5 e Grupo 6 conseguiram resolver o problema 2, apresentando diálogos e esquemas adequados ao problema. As estudantes do Grupo 4 manifestaram, em seus diálogos, a compreensão do enunciado do problema, porém cometeram um equívoco na hora de realizar o cálculo da multiplicação, como podemos verificar no fragmento do diálogo do deste grupo, a seguir:

***Estudante** 7: É 19 × 4. Eu acho. 4 × 9?*
***Estudante 8**: 9 × 4.*
***Estudante** 7: É a mesma coisa. Por que você fez o 4 em cima se é 19?*
***Estudante 8**: Ah deixa assim.*
***Estudante** 7: Então vai... 4 × 9?*
***Estudante 8**: 31!*
***Estudante** 7: 31?*
***Estudante 8**: É... 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40. Se 4 × 10 dá 40, menos 9 é 31!*

Podemos perceber que o erro na multiplicação começa quando a estudante 7 pergunta para a estudante 8 quanto é 4 × 9, e a estudante 8 afirma ser 31, justificando esse resultado ao mencionar: "*Se* 4 × 10 *dá* 40, *menos* 9 *é* 31*!*". Podemos verificar os cálculos das estudantes na Figura 18 a seguir.

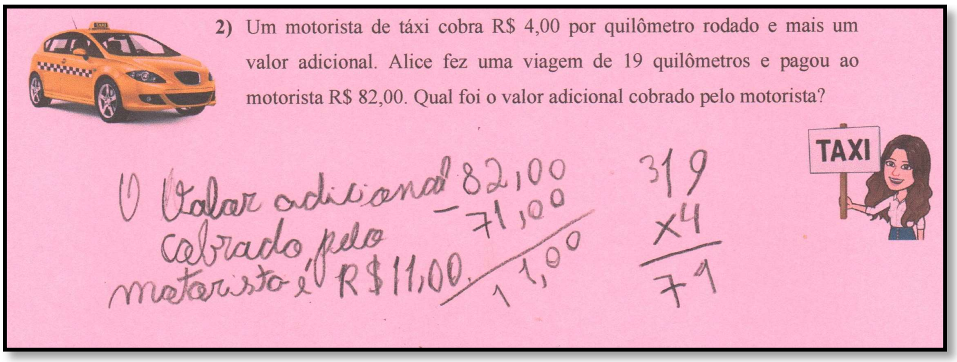


Figura 18: Resolução do problema 2 – Grupo 4
Fonte: arquivo de pesquisa.

Durante a explicação desse problema para a pesquisadora, a estudante 7 apresenta o seguinte:

Pesquisadora: *Vamos lá. O que vocês fizeram nessa?*
Estudante 7: *Aqui fizemos 19 × 4, que deu 71, e depois fizemos 82 − 71, que deu 11.*
Pesquisadora: *Ok. E por que vocês fizeram essa conta?*
Estudante 7: *Pra ver qual foi o valor adicional que o motorista cobrou.*
Pesquisadora: *Hum. Entendi... Beleza. Esse 82, de onde vocês pegaram?*
Estudante 7: *Daqui (indicando no enunciado).*
Pesquisadora: *E esse 71? É do resultado que vocês fizeram, de 19 × 4... E por que vocês decidiram pegar o 82 − 71?*
Estudante 8: *A gente pegou esses valores pra saber quanto que ele ia cobrar.*
Pesquisadora: *Ah, sim... Do valor adicional. Beleza então. Vou recolher estas folhas e já eu trago as outras.*

Os demais grupos não apresentaram erro de cálculo, explicitando que o valor adicional cobrado pelo motorista de táxi foi R$ 6,00. Em suas explicações e em seus diálogos no grupo, identificamos que todos eles compreenderam o problema e apresentaram argumentos condizentes com o enunciado, como podemos verificar na explicação das estudantes do Grupo 6 para a pesquisadora:

Pesquisadora: *Então vamos lá.*
Estudante 13: *Professora, a gente leu o problema, interpretou, a gente viu que o quilômetro rodado era* 4 *reais, e a gente viu também que ela andou* 19 *quilômetros, então a gente multiplicou* 19 *quilômetros por* 4, *e o resultado deu* 76. *Aí a gente fez* 82, *que ela pagou, menos* 76 *reais, aí a gente colocou que o valor adicional cobrado pelo motorista foi* 6 *reais.*
Pesquisadora: *Meninas, por que vocês fizeram* 82 − 76. *O que levou vocês a fazer essa conta? Vocês sabem me dizer?*

***Estudante 11**: Porque, tipo assim, pra gente saber... Que adicionou um pouquinho mais alto do preço... Tipo assim, como se ela fosse pagar* 76*, aí ele adicionou mais* 6 *que deu* 82*, no caso* 82 − 76*.*
***Pesquisadora**: Entendi. Ok, meninas.*

Mesmo que a estudante 13 do Grupo 6 tenha explicitado que "*multiplicou* 19 *quilômetros por* 4*, e o resultado deu* 76", o grupo traz como esquema de resolução a multiplicação de R$ 4,00 por 19 quilômetros, como podemos verificar na Figura 19 a seguir.

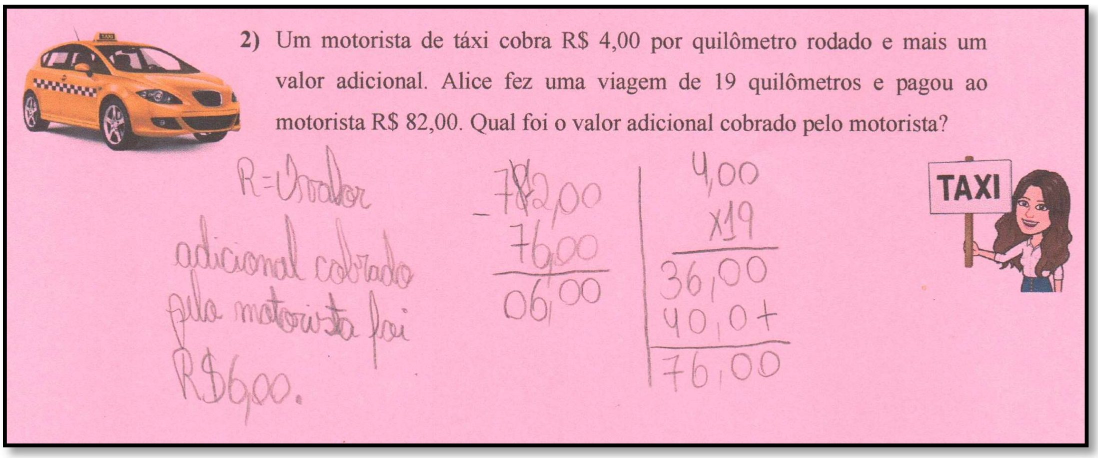


Figura 19: Resolução do problema 2 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os demais grupos – Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 5 – apresentaram como esquema de resolução a multiplicação de 19 quilômetros por R$ 4,00, como podemos verificar na resolução do Grupo 2 na figura 20 a seguir.

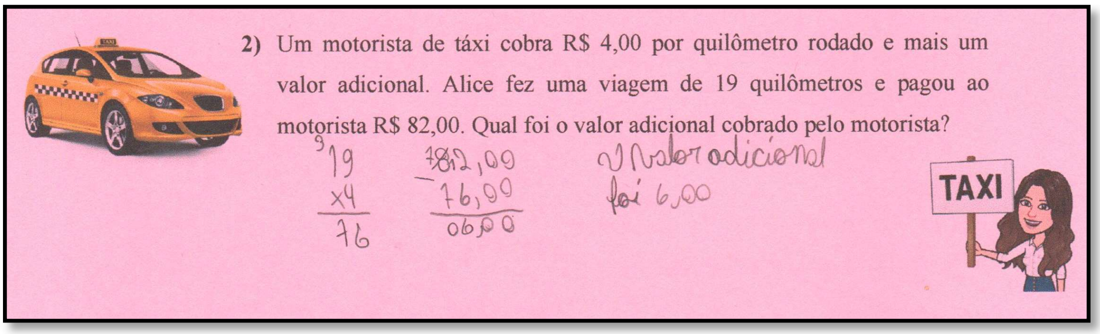


Figura 20: Resolução do problema 2 – Grupo 2
Fonte: arquivo de pesquisa.

Dessa forma, notamos que, no protocolo escrito apresentado por todos os grupos para o problema 2, os estudantes utilizaram o algoritmo da multiplicação e da subtração como esquema de resolução. Na multiplicação, os estudantes do Grupo 1, Grupo2, Grupo 3, Grupo 4 e Grupo 5 realizaram a conta de 19×4, e as estudantes do Grupo 6 realizaram 4×19. Na subtração, todos os estudantes realizaram a operação de $82 - 76$, exceto o Grupo 4, que fez $82 - 71$. Após encontrarem a solução, os estudantes apresentaram a resposta em linguagem natural para o problema 2.

As ideias de função identificadas na resolução desse problema foram: *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *proporcionalidade*.

A ideia de *correspondência* é notada quando o estudante identifica que cada quilômetro rodado corresponde a R$ 4,00; desse modo, quando os estudantes fazem a multiplicação da quantidade de quilômetros por R$ 4,00, identificamos que houve a ideia de correspondência mobilizada. No Quadro 11 seguinte, apresentamos as falas de alguns estudantes que demonstram estar mobilizando a ideia de correspondência em todos os grupos.

Quadro 11 – Diálogos que manifestam as ideias de correspondência

Fragmentos dos diálogos	Grupo
Estudante 1: *Nós vamos fazer aqui,* 19×4 *né? Que é o quilômetro.*	Grupo 1
Estudante 3: *Primeiro a gente fez* 19×4, *que foi* 19... *Ele cobra* 4 *reais a cada viagem, e aqui foi* 19 *quilômetros*.	Grupo 2
Estudante 5: *Nós fez assim... Se o motorista de táxi cobra 4 reais, nós pegamos os 19 quilômetros vezes 4, que deu 76, aí nós pegamos o 82 daqui menos 76, que deu 6 reais.*	Grupo 3
Estudante 7: "*Aqui fizemos 19 × 4, que deu 71, e depos fizemos 82 − 71, que deu 11*".	Grupo 4
Estudante 10: *Esse daqui foi o primeiro que a gente fez,* 19×4, *aí eu vou ter que fazer* 4 *vezes o* 19, *que será os quilômetros do motorista. Aí ele pagou ao motorista* 82 *reais, aí com esse daqui eu vou tirar menos* 82, $82 - 76$.	Grupo 5
Estudante 13: *Professora, a gente leu o problema, interpretou, a gente viu que o quilômetro rodado era* 4 *reais, e a gente viu também que ela andou* 19 *quilômetros, então a gente multiplicou* 19 *quilômetros por* 4, *e o resultado deu* 76. *Aí a gente fez* 82, *que ela pagou, menos* 76 *reais, aí a gente colocou que o valor adicional cobrado pelo motorista foi* 6 *reais*.	Grupo 6

Fonte: arquivo de pesquisa.

A ideia de *dependência* é identificada quando o estudante consegue perceber que, para encontrar o valor adicional, primeiro é preciso encontrar o valor equivalente aos 19 quilômetros percorridos e, em seguida, subtrair do valor total cobrado pelo motorista, ou seja, o valor adicional depende do valor atribuído aos 19 quilômetros.

Desse modo, notamos a ideia de dependência quando, por exemplo, o estudante1 menciona: "[...] *Aí nós vamos colocar 82, que é o valor que o motorista cobrou no total... 82 menos 76, que tinha dado ali na nossa conta [...] Então deu 6!*". Fica evidente que o estudante identificou que primeiro era necessário realizar a multiplicação (19×4), chegando ao resultado de 76, e, em seguida, o estudante subtrai esse valor de R$ 82,00 para encontrar o valor adicional que foi cobrado. O mesmo raciocínio foi identificado nos demais grupos.

Por conter no enunciado a palavra "adicional", esse problema pode levar muitos estudantes ao erro, pois o termo induz a somar os resultados, ao invés de subtraí-los.

A ideia de *regularidade* fica evidente quando os estudantes mencionam que primeiramente teriam que encontrar a quantidade paga pelos quilômetros rodados para depois subtrair do valor final da corrida para encontrar a taxa. Nas análises, notamos que esse pensamento foi manifestado pelos estudantes de todos os grupos, como podemos observar, por exemplo, na explicação da estudante 13, do Grupo 6, para a pesquisadora: "*Professora, a gente leu o problema, interpretou, a gente viu que o quilômetro rodado era* 4 *reais, e a gente viu também que ela andou* 19 *quilômetros, então a gente multiplicou* 19 *quilômetros por* 4, *e o resultado deu* 76. *Aí a gente fez* 82, *que ela pagou, menos* 76 *reais, aí a gente colocou que o valor adicional cobrado pelo motorista foi* 6 *reais*".

A ideia de p*roporcionalidade* também foi manifestada em todos os grupos, pois, ao montarem o algoritmo da multiplicação de 19×4, está implícita a proporcionalidade : 1 está para 4, assim como, 19 está para x, ou seja, 1 quilômetro rodado equivale R$ 4,00, assim como 19 quilômetros equivalem a x reais. Algebricamente, fica representado da seguinte forma: $\frac{1}{19} = \frac{4}{x}$. Multiplicando cruzado essa igualdade, temos: $x = 19 \times 4 = 76$.

O pensamento funcional nesse problema é dado por $f(x) = 4x + 6$, sendo $f(x)$ a representação do gasto total pela corrida (R$ 82,00), 4 o valor que corresponde a cada quilômetro rodado, x a quantidade de quilômetros rodados,e 6 o valor adicional. Com a resolução apresentada pelos grupos, foi observado o seguinte teorema em ação verdadeiro: Seja f uma relação funcional $f(x) = a.x + b$, então $b = f(x) - a.x$ com $a, b, x \in \mathbb{N}$, uma vez que os estudantes multiplicaram a taxa por x e subtraíram o resultado de $f(x)$. Também consideramos esse teorema para as estudantes do Grupo 4, que, mesmo apresentando um resultado incorreto para a multiplicação de 19×4, manifestaram ter compreendido o problema, de acordo com as análises de seus diálogos.

Como modelação da função afim, analisamos que os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 5 e Grupo 6 manifestaram essa ideia, uma vez que eles apresentaram a multiplicação correta de $19 \times 4 = 76$, e realizaram a subtração de $82{,}00 - 76{,}00 = 6{,}00$. Embora as estudantes do Grupo 4 apresentem $19 \times 4 = 71$, erroneamente, e depois realizam $82{,}00 - 71{,}00 = 11{,}00$, consideramos que foi mobilizada a ideia da modelação da função afim, pois verificamos em seus diálogos que as estudantes compreenderam o problema e apresentaram corretamente no algoritmo da multiplicação os dados do enunciado, errando apenas o resultado desse produto, o que implicou na solução da subtração.

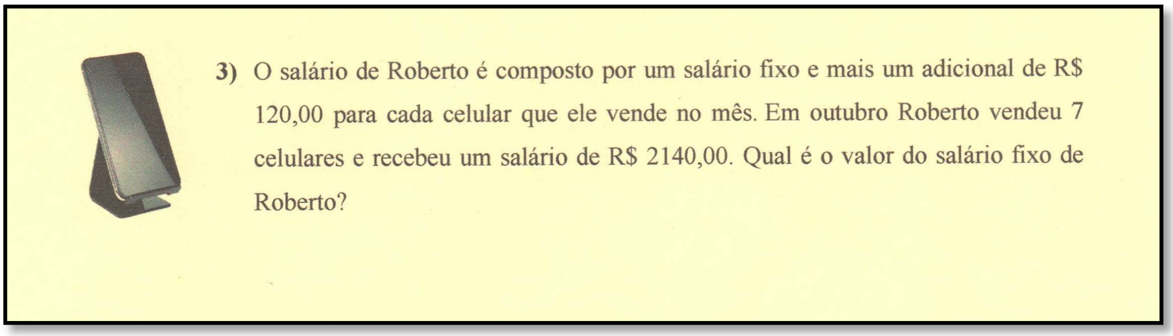
Frente às análises, observamos que três ideias-base de função foram apresentadas nas respostas dos estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e Grupo 6, sendo elas: *correspondência*, *dependência* e *regularidade*. Também identificamos nas respostas dos estudantes de todos os grupos a ideia de *proporcionalidade* e a manifestação de um *teorema em ação verdadeiro*. Como essa classe de problema não envolve as ideias de *variável* e *generalização*, logo não foi possível analisar a manifestação dessas duas ideias-base de função nos grupos.

A análise *a posteriori* mostra que os estudantes apresentaram esquemas de resolução coerentes, como previstos nas análises *a priori*.

Apresentamos a seguir as nossas análises e discussões acerca do problema 3.

4.3 Apresentação do Problema 3

O problema 3 pertence à classe de proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas – *com a parte desconhecida*. A parte de proporção simples se refere a uma relação quaternária. Esse problema contempla três ideias-base de função – dependência, correspondência e regularidade – e a ideia de proporcionalidade. O referido problema foi entregue em uma folha de sulfite de tamanho A4 de cor amarela, e seu enunciado e variáveis didáticas envolvidas podem ser analisadas na Figura 21 a seguir.



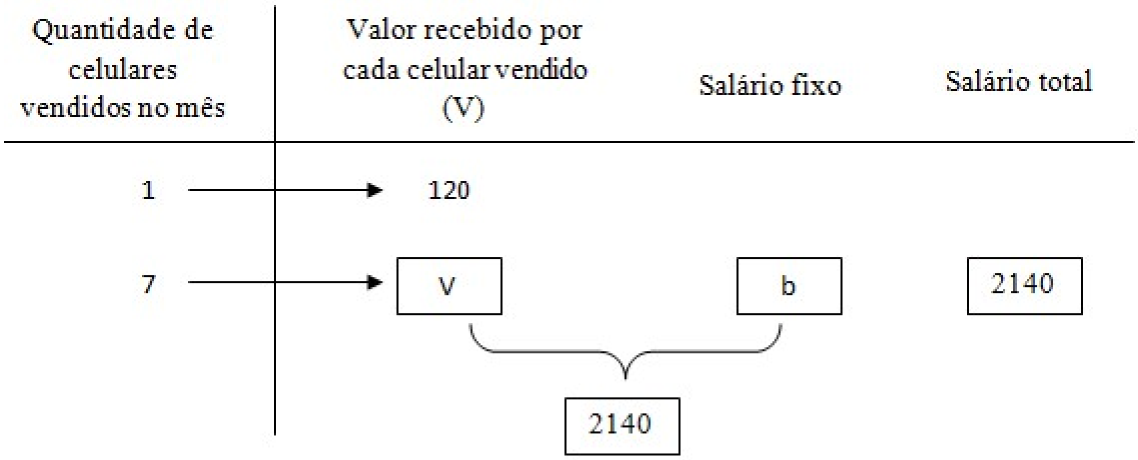
3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?

Figura 21: Problema misto 3 - proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas - *com a parte desconhecida*
Fonte: arquivo de pesquisa.

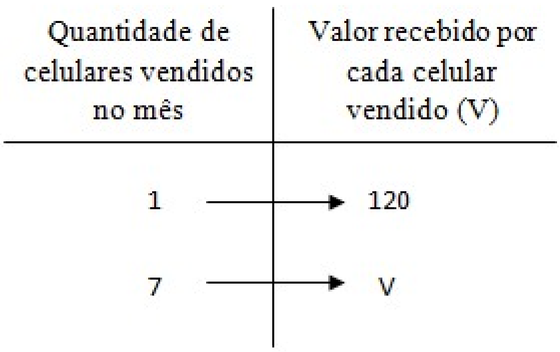
As Variáveis Didáticas nesse problema são:

- Proporção simples e composição de medidas – valor da variável didática: proporção simples - multiplicação um para muitos e composição de medidas – medidas elementares desconhecidas;
- Possibilidade de modelação na forma de função $y = ax + b$ – valor da variável didática: $2140 = 120 \times 7 + b$.

Nesse terceiro problema, a ideia é que o estudante encontre o salário fixo de Roberto, valor que também representa a constante da função afim, assim como no problema anterior. Para encontrar a constante, primeiro é necessário multiplicar o valor recebido pela venda de um celular (R$ 120,00) pela quantidade de celulares vendidos no mês (7) e, em seguida, subtrair do salário total de Roberto (R$ 2140,00) a quantia encontrada na multiplicação para poder encontrar o salário fixo. O esquema sagital que representa essa situação é:

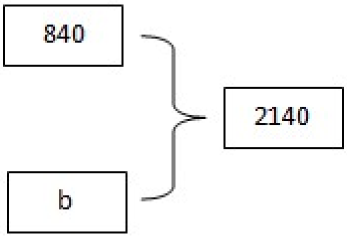


Para identificar "V" temos uma relação quaternária de proporção simples *multiplicação um para muitos* da seguinte forma:



Podemos verificar a relação existente entre a quantidade de celulares vendidos no mês e o valor recebido por eles, em que um celular vendido equivale a R$ 120,00, e 7 celulares vendidos correspondem a V reais. Algebricamente, podemos representar essa relação pela seguinte proporção: $\frac{1}{7} = \frac{120}{V}$, logo $V = 7 \times 120 = 840$.

A relação para a parte final da resolução corresponde a uma relação ternária de composição de medidas com a parte desconhecida, sendo 840 uma medida e 2140 a composição, como podemos observar no esquema relacional proposto por Vergnaud (2009b), posto a seguir:



Algebricamente, temos: $b + 840 = 2140$, então $b = 2140 - 840 = 1300$. É possível modelar esse problema no formato da função afim: $f(x) = 120x + b$, como $b = 1300$, logo $f(x) = 120x + 1300$.

Assim como no problema anterior, nesse problema não envolvemos as ideias de variável ou de generalização, devido à limitação dessa classe.

No Quadro 12 a seguir estão descritas as análises *a priori* realizadas nesse problema.

Quadro 12 – Análise a priori do problema 3

Possíveis esquemas de resolução dos estudantes	**Ideias de função envolvida**	**Possíveis erros dos estudantes**
$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 7 \\ \hline 840 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2140 \\ -\ 840 \\ \hline 1300 \end{array}$	*Ideias-base de função*: - Dependência; - Correspondência; - Regularidade. *Proporcionalidade*: $\frac{1}{7} = \frac{120}{V}$ $V = 7 \times 120$ *Modelação da Função afim*: $2140 = 120 \times 7 + b$	- Apresentar como resposta final a multiplicação de 120 por 7, esquecendo de encontrar a diferença do salário final (2140) pelo resultado obtido da multiplicação (840); - Somar o número 120 com o número 7; - Somar todos os valores numéricos que aparecem no enunciado; - Somar o resultado encontrado de 120×7 com 2140; - Efetuar os cálculos com erros de resultado na subtração e/ou

		multiplicação.

Fonte: arquivo de pesquisa.

4.3.1 *Análise e Discussão dos Resultados do Problema 3*

Dois grupos, 3 e 4, não conseguiram resolver o Problema 3. Nos diálogos entre os estudantes desses dois grupos, percebemos que eles não estavam entendo a proposta do problema e estavam realizando cálculos de divisão. Primeiro, eles tentaram dividir 120 por 7, e depois, 840 por 7; como não obtiveram sucesso, os estudantes desses dois grupos desistiram de resolver o problema.

Os demais grupos, Grupo 1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6, compreenderam o enunciado do problema, apresentando como salário fixo o valor de R$ 1.300,00, como podemos verificar na explicação dos estudantes do Grupo 5 à pesquisadora.

***Estudante 9**: A gente multiplicou o* 7 *por* 120 .
***Pesquisadora**: Por que vocês fizeram isso?*
***Estudante 9**: Porque o salário dele é fixo e ele ainda ganha um adicional de* 120 *para cada celular que ele vende.*
***Estudante 10**: Então provavelmente o fixo seria mais.*
***Pesquisadora**: Hum, então tá. Então vocês fizeram o* 120×7 *e chegou nesse resultado, beleza.*
***Estudante 9**: Aí a gente pegou o* 2140, *colocou aqui e subtraiu com o* 840 *e deu* 1300 *o resultado.*
***Pesquisadora**: E por que vocês fizeram a conta de menos?*
***Estudante 9**: Ah, porque se fosse de mais daria um valor a mais do que ele recebeu.*
***Pesquisadora**: Hum, e qual foi o valor que ele recebeu no final?*
***Estudante 9**: Ele recebeu* 2140.

Os estudantes dos demais grupos que solucionaram esse problema apresentaram explicações e argumentos condizentes com sua resolução, fornecendo dados suficientes que comprovam a compreensão que tais estudantes tiveram do problema. Quando indagados pela pesquisadora por que realizaram o cálculo de subtração ao final, ao invés da adição ou outra operação qualquer, o estudante 9 menciona: "*Ah, porque se fosse de mais daria um valor a mais do que ele recebeu*". Logo, percebemos que todos os cálculos realizados por esses estudantes foram feitos conscientemente. O único grupo que apresentou algum tipo de dúvida em relação à resolução desse problema foram as estudantes do Grupo 6; nos diálogos, a estudante 11 menciona que os cálculos delas poderiam não estar corretos, e afirma terem realizado outro cálculo, porém ficou "pior ainda". Quando indagadas pela pesquisadora o que significa esse "pior ainda", a estudante menciona: "*Porque a gente fez* $1300 + 120$ *pra ver se* *esse era o salário dele mesmo e deu pior ainda*", ou seja, elas tentam verificar se ao realizar essa soma elas poderiam chegar ao salário final de Roberto, mas, para que essa conta fosse válida, elas teriam que somar o salário fixo, $R\$\ 1300{,}00$, com o valor que Roberto recebeu pelas vendas de 7decelulares, ou seja, com $R\$\ 840{,}00$, como podemos verificar nos diálogos referentes ao Grupo 6 a seguir.

Estudante 12: *Professora, estava perguntando assim, que o salário de Roberto é composto por um salário fixo e um adicional, esse* 120 *é adicionado no salário. Aí a gente resolveu fazer assim,* 120×7 *pra ver se dava um valor tipo perto de* 2 *mil, aí deu* 840*. Aí a gente resolveu fazer uma conta assim, uma conta de subtração, de menos, que é* $2140 - 840$ *pra ver se dava o salário fixo mesmo de Roberto, aí deu* 1300 *de salário fixo do Roberto.*
Estudante 11: *Talvez não esteja certo porque a gente achou muito difícil. A gente lutou muito pra conseguir... (risos).*
Pesquisadora: *E qual foi a dificuldade de vocês, meninas?*
Estudante 13: *Porque a gente achou que não era esse resultado, aí a gente fez outra conta que ficou pior ainda.*
Pesquisadora: *Mas vocês olharam esse resultado e acharam que era esse por quê?*
Estudante 11: *Bom, porque assim, se o salário fixo dele, ele recebe mais* 120*, aí a gente ficou meio em dúvida se é* 7×120 *mesmo, aí a gente fez assim.*
Estudante 12: *Porque assim, a gente viu que não era nem de mais e nem de dividir, ela fez ali de mais e não deu, e a gente viu que de dividir não ia dar também, então a gente resolveu fazer de menos*
Estudante 11: *Eu fiz de mais pra ver se o resultado estava certo e ficou pior ainda.*
Pesquisadora: *Entendi. O que significa pior ainda?*
Estudante 11: *Porque a gente fez* $1300 + 120$ *pra ver se esse era o salário dele mesmo e deu pior ainda.*
Pesquisadora: *Entendi... Então vocês concluíram que o salário fixo de Roberto é de* 1300 *reais?*
Estudante 11: *Aham*".

Na Figura 19 apresentamos o esquema de resolução dos estudantes do Grupo 2, análogo às resoluções dos estudantes do Grupo 1, Grupo 5 e Grupo 6.

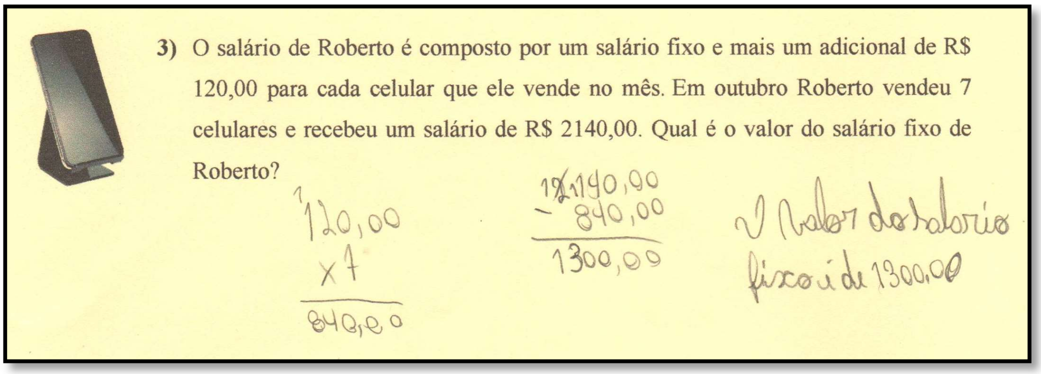


Figura 22: Resolução do problema 3 – Grupo 2
Fonte: arquivo de pesquisa.

Por meio do esquema dos estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6, percebemos que eles utilizaram o mesmo algoritmo de multiplicação e de subtração, de forma semelhante ao que fizeram no problema anterior. Eles realizaram primeiramente a operação de multiplicação, 120×7 e, em seguida, a subtração do salário total com o produto encontrado, $1140 - 840$. Para finalizar, eles apresentaram a resposta de forma discursiva, em linguagem natural.

As ideias de função identificadas nos esquemas de resolução dos grupos são as mesmas contidas no problema anterior, ou seja, *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *proporcionalidade*. A ideia de *correspondência* surge no momento em que os estudantes identificam que para cada celular vendido, o vendedor recebe uma comissão de R$ 120,00. Desse modo, quando os estudantes apresentam a multiplicação de 120 por 7, temos que eles estão mobilizando a ideia de *correspondência*. Com as análises, observamos que as ideias de correspondência foram manifestadas, pois todos os estudantes (Grupo 1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6) apresentam em seus diálogos a multiplicação da quantidade de celulares pelo valor correspondente a cada venda.

A ideia de *dependência* é manifestada quando o estudante consegue identificar que, para encontrar o salário fixo, primeiro é preciso identificar qual é o valor que o vendedor recebeu pelas vendas dos celulares, para depois encontrar a diferença entre o salário final com o valor recebido da comissão. Assim, identificamos a ideia de *dependência* nos quatro grupos mencionados, Grupo 1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6, pois os estudantes apresentaram, tanto nos diálogos quanto nos protocolos escritos que, para encontrar o adicional, primeiro é necessário realizar a multiplicação para encontrar a sua comissão. Eles entendem que esse valor se refere apenas à bonificação do vendedor por ter vendido 7 celulares, e que para encontrar a parte fixa seria preciso encontrar a diferença entre o salário final e a comissão recebida, apresentando que o salário fixo de Roberto é R$ 1300,00.

Analisamos a ideia de *regularidade* quando os estudantes identificam que é necessário encontrar o valor adicional recebido pelo vendedor, e depois subtrair o salário final com esse valor adicional para encontrar o salário fixo. Como nesse problema não há variação da quantidade de celulares vendidos no mês, devido ao salário fixo ser desconhecido, consideramos o conceito de *regularidade* quando o estudante realiza $120 \times 7 = 840,$ e depois, $2140 - 840$. Com isso, identificamos que a ideia de *regularidade* foi manifestada pelos estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6, pois eles apresentaram esses conceitos em seus esquemas e em seus diálogos.

A ideia de *proporcionalidade* é manifestada no momento em que os estudantes apresentaram o algoritmo da multiplicação. Ao realizarem em seus cálculos 120×7, os estudantes estão mobilizando implicitamente a seguinte proporcionalidade: 1 está para 120, assim como 7 está para x, ou seja, 1 celular vendido equivale a R$ 120,00, assim como 7 celulares vendidos equivalem a x reais. Algebricamente, temos: $\frac{1}{7} = \frac{120}{x}$. Multiplicando cruzado essa igualdade, temos: $x = 7 \times 120 = 840$.

O pensamento funcional presente nesse problema pode ser indicado por $f(x) = 120x + 1300$, sendo que $f(x)$ representa o salário final dado no problema (R$ 2140,00), 120 o valor que corresponde a cada celular vendido, x a quantidade de celulares vendidos e 1300 o valor do salário fixo. Com as resoluções apresentadas pelos grupos, foi observado o seguinte teorema em ação verdadeiro: Seja f uma relação funcional $f(x) = a.x + b$, então $b = f(x) - a.x$ com a, b, $x \in \mathbb{N}$, uma vez que os estudantes multiplicaram a taxa por x e, com o resultado, subtraíram de $f(x)$.

Esse problema, por conter a mesma classe do problema anterior, permitiu identificar nos esquemas e nos diálogos dos estudantes as mesmas ideias de função: *dependência*, *correspondência*, *regularidade*, *proporcionalidade* e o mesmo *teorema em ação verdadeiro*. A modelação da função afim foi identificada em quatro grupos: Grupo 1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6.

Como análise *a posteriori*, verificamos que os estudantes apresentaram esquemas de resoluções conforme previstos nas análises *a priori,* e nenhum dos grupos apresentou alguns dos possíveis erros que poderiam ocorrer, previstos nas análises *a priori*. Não foi prevista a não resolução do problema, como ocorreu com os estudantes do Grupo 3 e Grupo 4, que não conseguiram entender e resolver o problema, deixando-o em branco.

Na sequência, trazemos os resultados e discussões referentes ao problema 4.

4.4 Apresentação do Problema 4

O problema 4 pertence à classe de proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas - *com o todo desconhecido*. A parte de proporção simples se refere a uma relação quaternária. Esse problema contempla todas as ideias-base de função – variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização – e a ideia de proporcionalidade. Nesse problema utilizamos uma tabela como valor da variável didática. Segundo Trindade e Moretti (2000), as atividades que contêm tabela são importantes, pois no momento em que os estudantes interpretam e preenchem a tabela, favorecem a construção do conceito de função. Os problemas com tabelas também "[...] potencializam a compreensão da ideia de regularidade, bem como das demais ideias" (SILVA, 2021, p. 94). A seguir, apresentamos na Figura 23 o quarto problema proposto.

4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	**Gasto total no mês por Márcia**
20	
25	
30	
35	
40	

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

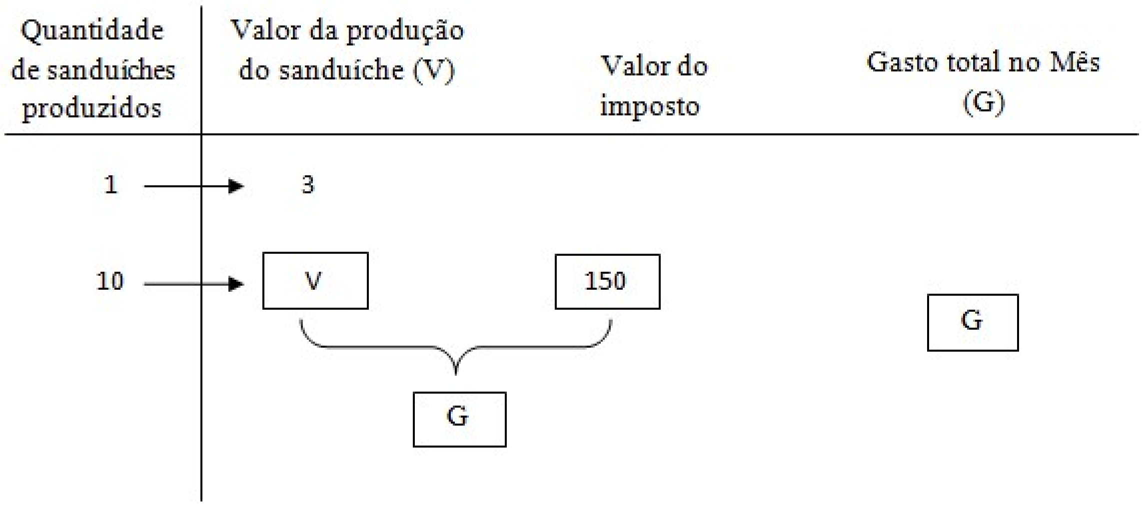
Figura 23: Problema misto 4 - proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas - *com o todo desconhecido*
Fonte: arquivo de pesquisa.

As Variáveis Didáticas presentes nesse problema são:

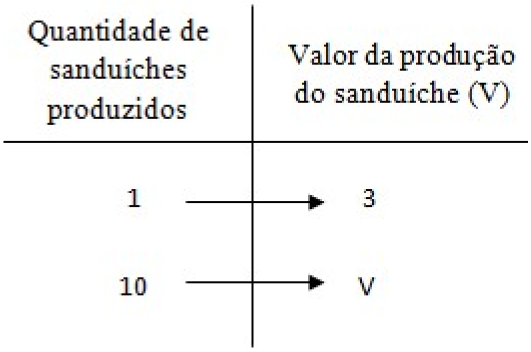
- Proporção simples e composição de medidas – valor da variável didática: proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas – com o todo desconhecido);
- Apoio visual – valor da variável didática: com a utilização de tabela;
- Possibilidade de modelação na forma de função $f(x) = ax + b$ – valor da variável didática: $f(x) = 3x + 150$).

O quarto problema contém cinco questões, e a intenção é que o estudante perceba as ideias de função envolvidas. Esse problema pertence à mesma classe do primeiro problema, sendo o seu diferencial a inclusão de uma tabela. As três primeiras questões variam a quantidade de sanduíches produzidos no mês para que nas duas últimas questões o estudante possa generalizar os cálculos para qualquer quantidade de sanduíches produzidos. Assim como no primeiro problema, não esperamos que o estudante generalize com expressões matemáticas com símbolos e letras, mas que perceba a variável existente e que possa verificar que o mesmo cálculo realizado nas questões anteriores pode ser feito para outras quantidades, mudando somente a quantidade de sanduíches. Isso já é o suficiente para identificarmos essa generalização.

Para encontrar a resposta dos itens "a", "b" e "c", é necessário multiplicar a quantidade de sanduíches produzidos por R$ 3,00, que representa o valor gasto para a produção de um sanduíche, e em seguida somar com R$ 150,00, que representa o valor do imposto; com isso, pode-se encontrar o gasto total de Márcia no mês. Iremos representar no esquema sagital a seguir apenas a representação da questão "a". O mesmo se aplica para as questões "b" e "c", mudando apenas a quantidade de sanduíches produzidos.

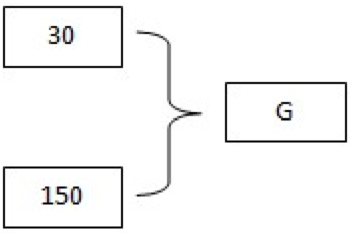


Para a identificação de "V", temos uma relação quaternária de proporção simples *multiplicação um para muitos* da seguinte forma:



Podemos verificar a relação existente entre a quantidade de sanduíches produzidos e o valor pago por eles, em que o gasto de um sanduíche corresponde a três reais, e o de dez sanduíches corresponde a V reais. Algebricamente, podemos representar essa relação da seguinte maneira: $\frac{1}{10} = \frac{3}{V}$, logo $V = 10 \times 3$, sendo $V = 30$.

A relação para a parte final dessa resolução, que pede o gasto total no mês por Márcia, corresponde a uma relação ternária de composição de medidas em que a composição é desconhecida, R$ 30,00 representando uma parte e R$ 150,00 o valor que corresponde à outra parte, como mostra o esquema relacional a seguir:



Assim, a resolução dessa primeira questão recai em: $G = 30 + 150 = 180$. Logo, na questão "a", o gasto total de Márcia no mês ao produzir 10 sanduíches é de R$ 180,00. É possível modelar esse problema na seguinte função afim: $f(x) = 3x + 150$.

A questão "c" foi incluída com o objetivo de identificar se o estudante consegue notar a variável, a regularidade, a dependência e a correspondência presentes nesse problema, para que então ele possa generalizar ao responder a questão "d", assim como foi a proposta do primeiro problema.

As análises *a priori* para esse problema se assemelham com as descritas na situação-problema 1, contidas no Quadro 9; logo, para esse problema consideramos que o estudante possa realizar o algoritmo de multiplicação e soma, multiplicando o número de sanduíches produzidos por 3 e somando com 150. Consideramos todas as ideias-base envolvidas nesse problema, variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização, e a ideia de proporcionalidade envolvida em cada multiplicação realizada. Como possíveis erros que os estudantes pudessem cometer, consideramos uma possível dificuldade em compreender e interpretar a tabela, dificultando o seu preenchimento.

Na sequência, apresentamos os resultados obtidos nesse problema pelos grupos.

4.4.1 *Análise e Discussão dos Resultados do Problema 4*

De acordo com as análises da produção escrita e dos diálogos entre os estudantes, observamos que, na primeira questão do problema 4, os estudantes de três grupos, Grupo 1, Grupo 2 e Grupo 5, conseguiram efetuar os cálculos, chegando à solução do problema.

Percebemos que os estudantes desses três grupos compreenderam a questão *"a"*, do problema 4, como podemos analisar no diálogo do estudante 1, do Grupo 1, com a sua dupla:

Estudante 1: *Ó essa aqui ó... Para cada... é R$* $150{,}00$ *de imposto por mês. Ela já tem o R$* $150{,}00$ *de imposto por mês, aí coloca o imposto por mês, né, que ela já tem, mais os...* 10×3, *que nós vamos fazer a conta pra vê quantos que dá, aí nós vamos somar e vai ver o resultado. Coloca aí* 3×10. *Zero vezes....* 3×0 *é zero,* 3×1 *é* 3. *Deu* 30*! Agora nós vamos colocar* $150 + 30$, $0 + 0$ *é zero,* $5 + 3$ *é 8,* 1 *mais nada é* 1*...* 180 *reais ela gasta por mês se ela produzir 10 sanduíches. Coloca aí... Seu gasto total será de* 180 *reais.*

Nos diálogos dos estudantes do Grupo 5, percebemos que, a princípio, o estudante 9 estava realizando cálculos que não levariam à resposta correta da questão. Ao dialogar com a sua dupla, o estudante 9 percebe o seu erro, admitindo que o raciocínio de sua dupla, estudante 10, estava correto, como podemos verificar a seguir:

Estudante 10: *Ah, é só fazer o* 10 *vezes o* 3, 30*!*
Estudante 9: *Ham?*
Estudante 10: *Por que eu falei* 3×10*?*
Estudante 9: *Também não sei.*
Estudante 10: *É,* 3×10 *porque ela fez* 10 *sanduíches.*
Estudante 9: *É a "b" que é pra responder. A "a" não é pra responder nada.*
Estudante 10: *Como que não é pra responder? Aqui, tá perguntando...*
Estudante 9: *Dá* 1530 *o resultado.*

***Estudante 10**. Não, mas aqui tá perguntando... A Márcia produziu* 10 *sanduíches, qual será o seu gasto total no mês?*
***Estudante 9**: Qual será o gasto total? Tá falando todos os números. Bom, pra mim é assim né.*
***Estudante 10**: O quê?*
***Estudante 9**: A pergunta.*
***Estudante 10**:* $30 + 150$ *ou* 30×150*?*
***Estudante 9**: Não, é... Eu entendi o seguinte, é...* 100×10*?*
***Estudante 10**:* 100 *vezes o* 10*?*
***Estudante 9**: Dá quantos?*
***Estudante 10**:* 500.
***Estudante 9**: Oi?*
***Estudante 10**:* 500.
***Estudante 9**: Calma aí,* 100×10 *dá quanto?*
***Estudante 10**: Ah* 10 *vezes o* 100... 100.
***Estudante 9**: Ah você está brincando fala.... Dá* 1000*! E* 50×10 *dá* 500. 150 *com mais o* 30. *Ela gasta* 3 *reais de ingredientes para cada sanduíche, e* 150 *de imposto por mês, e se Márcia produzir* 10 *sanduíches, qual será o seu gasto total no mês? Ah, então tá errado mesmo. Você está certa. É desse jeito aí...* 180.

Verificamos a produção escrita do Grupo 1 na Figura 24, a seguir, apresentando esquema de solução semelhante dos estudantes do Grupo 2 e do Grupo 5.

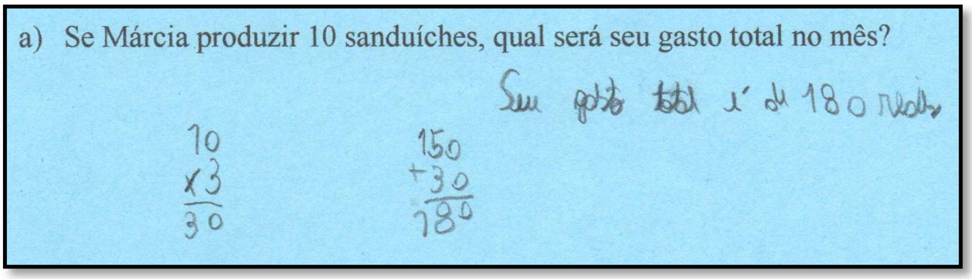


Figura 24: Resolução da questão "a" do problema 4 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os demais grupos, 3, 4 e 6, apresentaram em seus esquemas resoluções que não condizem com a resposta do problema. Os estudantes do Grupo 3 apresentaram, como resposta, 30 sanduíches. Os estudantes desse grupo multiplicaram a quantidade de sanduíches (10) pelo valor dos ingredientes na produção de um sanduíche (R$ 3,00), porém esqueceram-se de somar com o valor do imposto, como podemos verificar na Figura 25 a seguir.

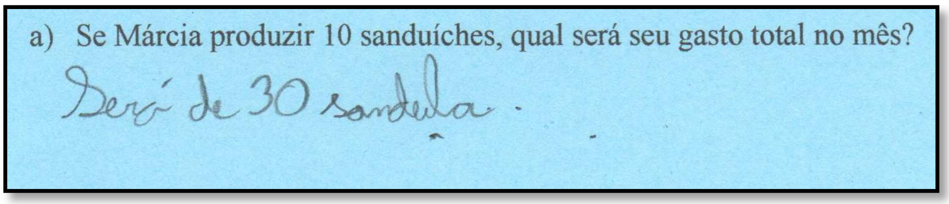


Figura 25: Resolução da questão "a" do problema 4 – Grupo 3
Fonte: arquivo de pesquisa.

As estudantes do Grupo 4 realizaram uma conta de multiplicação e uma conta de adição. Na multiplicação, as estudantes realizaram o valor do imposto pelo valor correspondente na produção de cada sanduíche, ou seja, 150×3; em seguida, as estudantes somaram o resultado que encontraram (450) com a quantidade de sanduíches solicitada na questão (10), como podemos verificar na Figura 26 a seguir.

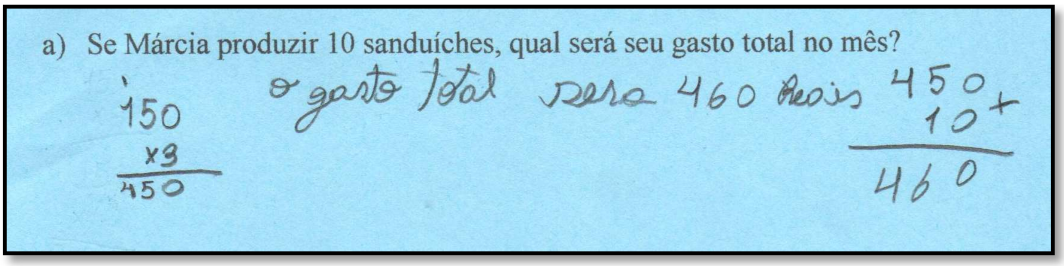


Figura 26: Resolução da questão "a" do problema 4 – Grupo 4
Fonte: arquivo de pesquisa.

As estudantes do Grupo 6 apresentaram como resposta para a primeira questão a multiplicação do valor do imposto (150) pela quantidade de sanduíches produzidos no mês, ilustrada na Figura 27 a seguir.

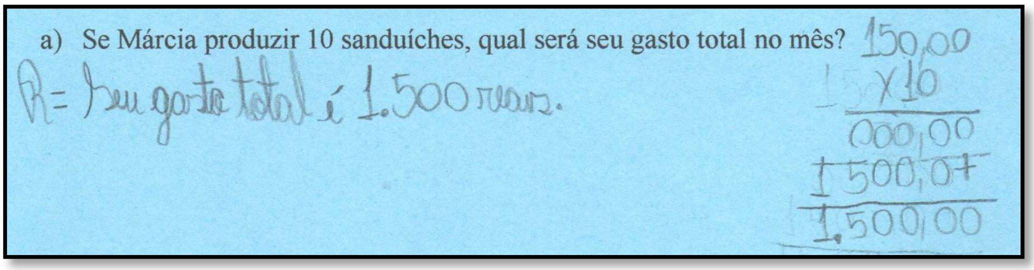
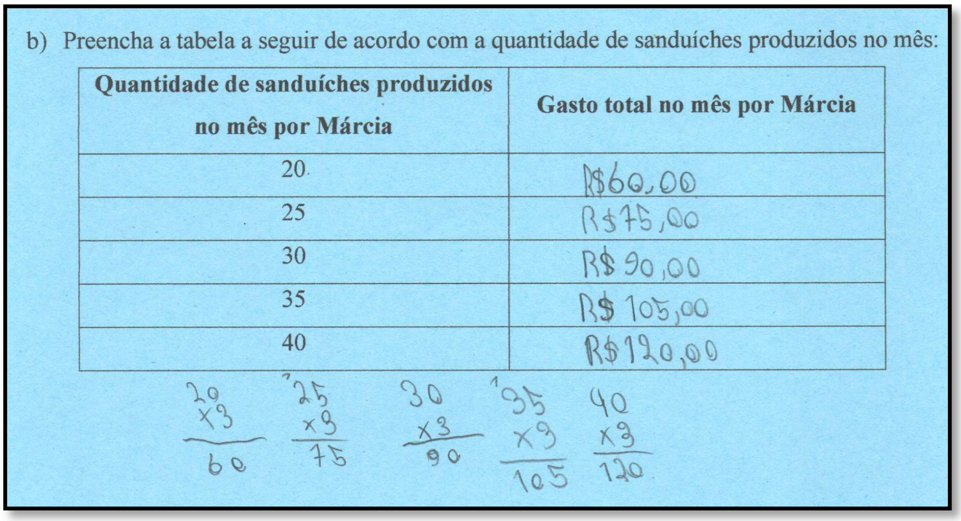


Figura 27: Resolução da questão "a" do problema 4 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

Na questão *"b"*, os estudantes do Grupo 2 preencheram a tabela esquecendo de somar com o valor do imposto, tendo realizado apenas a multiplicação. Embora estes estudantes tenham solucionado a questão *"a"* de forma correta, fazendo a multiplicação da quantidade de sanduíches pelo valor da produção de cada um, e ao final somando com o valor do imposto, na questão *"b"* eles acabaram realizando somente a multiplicação da quantidade de sanduíches por R$ 3,00. Os estudantes do Grupo 3 também realizaram o mesmo procedimento dos estudantes do Grupo 2, como podemos verificar na Figura 28 a seguir.



b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$60,00
25	R$75,00
30	R$90,00
35	R$105,00
40	R$120,00

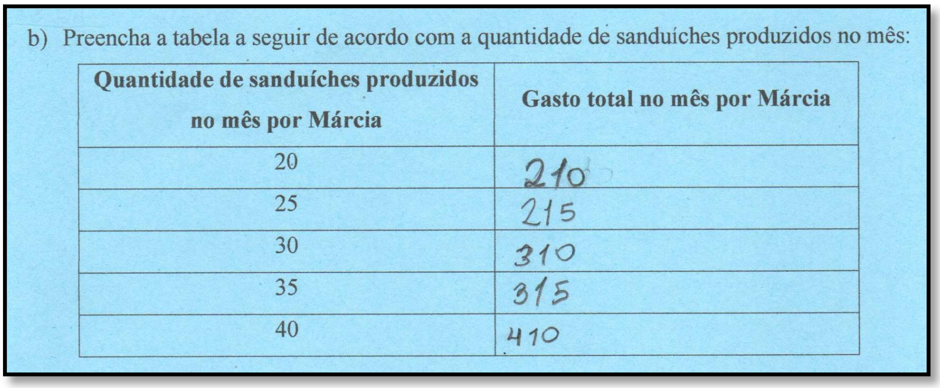
20 ×3 60   25 ×3 75   30 ×3 90   35 ×3 105   40 ×3 120

Figura 28: Resolução da questão "b" do problema 4 – Grupo 2
Fonte: arquivo de pesquisa.

As estudantes do Grupo 4 também preencheram a tabela de forma incorreta. Elas, em suas explicações para a pesquisadora, justificaram que preencheram a tabela colocando o algarismo 1 entre os dois algarismos de cada número representado na tabela, como podemos conferir nos diálogos seguintes.

***Pesquisadora**: Ah, sim. E nessa tabelinha aqui? Como vocês responderam? Como vocês chegaram nesses valores? 210, 215, 310, 315 e 410?*
***Estudante** 7: Nós pegamos aqui e colocamos o número 1 no meio de cada um.*
***Pesquisadora**: Como é que é? Ah, o número 1 no meio? Por exemplo, o 1 no meio de 2 e 0, o 1 no meio de 2 e 5?*
***Estudante** 7: Sim.*
***Pesquisadora**: Ah, por quê?*
***Estudante** 7: Ah, foi da cabeça mesmo.*
***Pesquisadora**: Ah, tá. E tem alguma relação com o que vocês fizeram anteriormente ou não, e vocês fizeram só pra esse?*
***Estudante** 7: Só fizemos pra esse.*

Podemos conferir esses valores na Figura 29 a seguir.



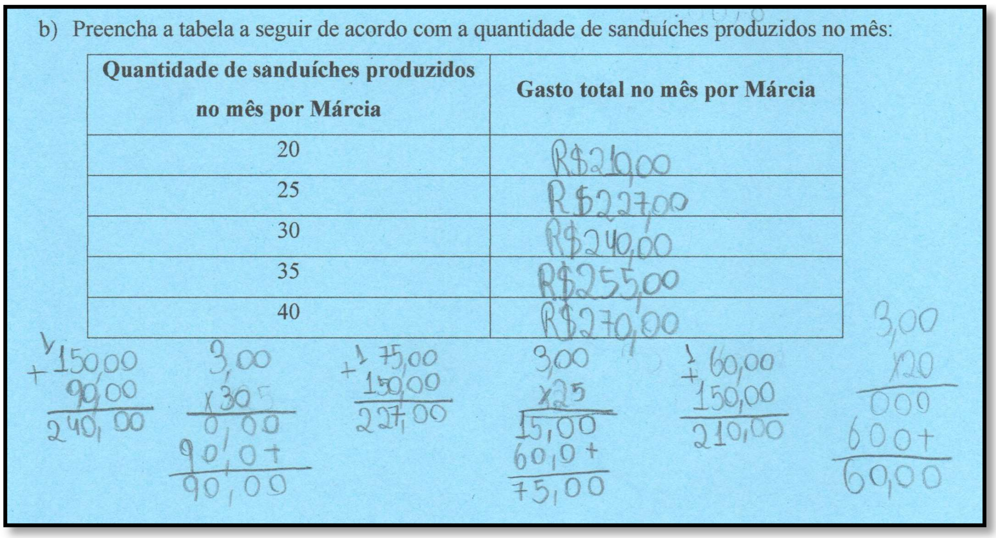
b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	210
25	215
30	310
35	315
40	410

Figura 29: Resolução da questão “b” do problema 4 – Grupo 4
Fonte: arquivo de pesquisa.

As estudantes do Grupo 6 também preencheram a tabela realizando os cálculos que satisfazem a solução da questão *“b”*; elas apresentaram dificuldades para preencher a tabela e, a princípio, estavam realizando somente as operações de multiplicação, esquecendo-se de somar com o valor do imposto. Durante os diálogos entre elas, observamos que uma das estudantes do Grupo 6 perguntou para um estudante do Grupo 1 se a solução delas estava correta; o estudante 1, ao conferir a resposta delas, mencionou que ainda faltava somar com 150.

Podemos perceber, na Figura 30, que houve somente um equívoco ao somarem $75{,}00 + 150{,}00$: as estudantes colocaram como resposta $227{,}00$. Também percebemos que as estudantes do Grupo 6 realizaram em seus esquemas de resolução a multiplicação de R$ 3,00 pela quantidade de sanduíches produzidos.



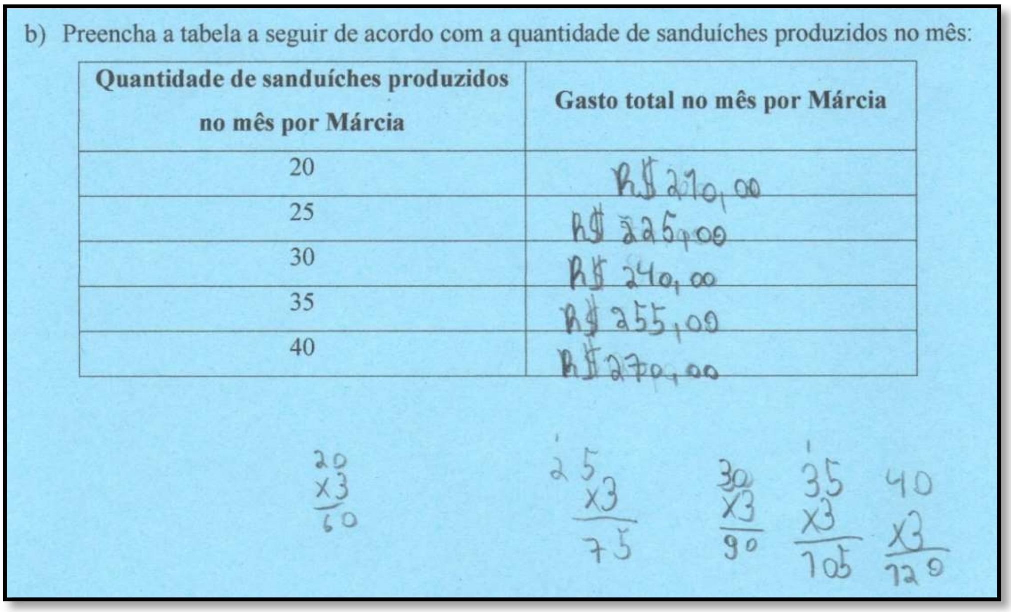
b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$210,00
25	R$227,00
30	R$240,00
35	R$255,00
40	R$270,00

Figura 30: Resolução da questão “b” do problema 4 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os estudantes do Grupo 1 (estudante 1 e estudante 2) e do Grupo 5 (estudante 9 e estudante 10) entenderam a proposta do problema, e podemos perceber, tanto em seus diálogos quanto na produção escrita, que esses estudantes manifestaram ter domínio e certeza ao completarem a tabela. Em seus protocolos escritos, percebemos que os estudantes desses grupos realizaram em seus esquemas de resolução a multiplicação da quantidade de sanduíches por R$ 3,00.

Primeiramente, os estudantes do Grupo 1 estavam preenchendo a tabela realizando somente a multiplicação; ao terminarem de preencher, os estudantes, quando começaram resolver a questão *"c",* perceberam que haviam se equivocado na questão anterior, pois tinham se esquecido de somar com o valor do imposto. Em seguida, eles voltam para a tabela e efetuam os cálculos mentalmente, acrescentando 150 ao resultado obtido em suas multiplicações. Verificamos esse preenchimento na Figura 31 a seguir.



b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$ 210,00
25	R$ 225,00
30	R$ 240,00
35	R$ 255,00
40	R$ 270,00

Figura 31: Resolução da questão "b" do problema 4 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

Em sua explicação à pesquisadora, referente a questão *"b",* o estudante 1 comenta: "[...] *Aí aqui tá falando para preencher a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês. Aí aqui tá as quantias, aí eu fiz três vezes a quantia mais* 150 *reais do imposto*". Essa fala evidencia a compreensão que esse estudante teve dessa questão.

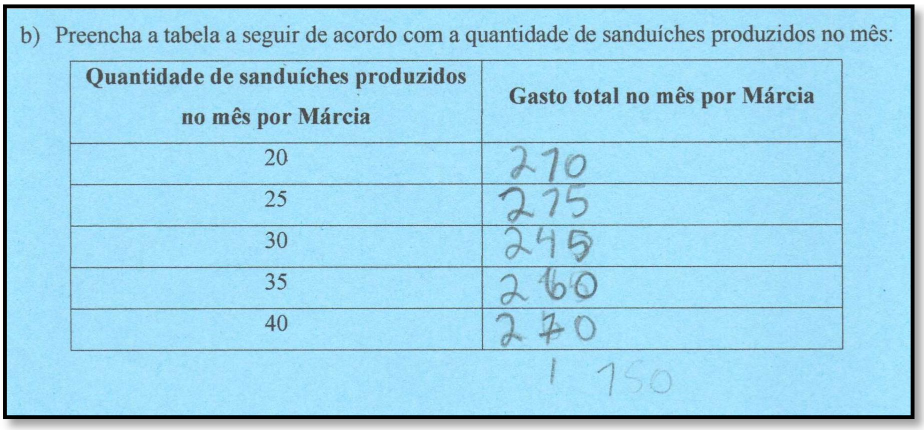
Os estudantes do grupo 5 também apresentam, em suas falas e em suas escritas, dados que comprovam a compreensão da situação dada. Nos diálogos seguintes, percebemos os estudantes tentando interpretar a tabela.

Estudante 10: *Ah, aqui tem que preencher.*
Estudante 9: *Aqui tá meio confuso. Ela fez* 20 *sanduíches... Ah.*
Estudante 10: 3×20.
Estudante 9: *Dá* 60. 60 *com mais...*
Estudante 10: *Será que é 60?*
Estudante 9: *Ah tá tá tá tá, eu entendi. É só ir adicionando o seguinte,* 20×3 *que dá* 60*, e aí adiciona mais o* 150*, que dá* 210.

Os estudantes do Grupo 5 seguiram o mesmo raciocínio para preencher o restante da tabela, como podemos verificar por meio da explicação do grupo para a pesquisadora:

Pesquisadora: *Beleza. E aqui na tabela? Está tudo preenchido, quero saber como que vocês chegaram nesses resultados...* 210, 215, 245, 260 *e* 270.
Estudante 10: *Fizemos* 20×3...
Pesquisadora: *Ah vocês fizeram* 20×3 *que deu* 210*?*
Estudante 9: *Não, fizemos* 20×3 *que deu* 60 *aí somamos o* 60 *com* 150.
Pesquisadora: *Ah, tá, e essas contas vocês fizeram tudo de cabeça?*
Estudante 9: *Eu fiz, ela não.*
Estudante 10: *Eu fiz conta.*
Estudante 9: *Eu nunca fiz conta, sempre faço de cabeça desde o primeiro ano.*
Pesquisadora: *Ah, sim, que legal! Então todas essas contas vocês multiplicaram pelo valor que está aqui...*
Estudante 10: *Por* 3.
Pesquisadora: *E depois somaram com* 150*?*
Estudante 10: *Isso.*

Identificamos que alguns valores foram preenchidos de forma incorreta na tabela pelos estudantes do Grupo 5. O valor correto do gasto total para a produção de 25 sanduíches é $R\$\,225{,}00$, para 30, $R\$\,240{,}00$ e para 35, $R\$\,255{,}00$. Podemos verificar a produção dos estudantes do Grupo 5 na Figura 32 a seguir.



b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	210
25	215
30	245
35	260
40	270

1 150

Figura 32: Resolução da questão “b” do problema 4 – Grupo 5
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os cálculos foram realizados mentalmente pelo estudante 9 e, embora a estudante 10 tenha mencionado que realizou os cálculos, em seus registros não observamos esse procedimento; assim, acreditamos que esse fator deva ter influenciado na valor final. Contudo, compreendemos que estes estudantes manifestaram ter entendimento do problema, e esses erros de cálculos não comprometem a mobilização dos conhecimentos externados por esses estudantes.

Observamos que os estudantes do Grupo 1, Grupo 5 e Grupo 6 manifestaram ideias de *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável* e ideias de *proporcionalidade*. Mesmo com o fato de as estudantes do Grupo 6 terem recebido uma dica ao final da resolução da questão *“b”,* percebemos em seus diálogos que elas mobilizaram as ideias de função supracitadas enquanto resolviam. Embora os estudantes do Grupo 2 tenham se esquecido de acrescentar o imposto na questão *“b”,* assumimos que eles também manifestaram tais ideias de função, uma vez que esses estudantes mostraram ter compreendido a situação ao ler o enunciado da questão *“a”*. Quando o estudante 4 menciona: “*É, tem que fazer 10 × 3 e depois somar com 150?*” e o estudante 3 responde: “*Acho que é. Calma aí... 3 × 1... 30... 150 + 30. 5 + 3, 8... 180!*”, fica evidenciado que as ideias de função supracitadas foram contempladas.

Identificamos as ideias de *correspondência* e *regularidade* quando os estudantes relacionam que, para cada sanduíche produzido, seu custo será de R$ 3,00. E como os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6 apresentaram esses cálculos, concluímos que esses estudantes mobilizaram os conceitos de correspondência e regularidade.

Nesse sentido, se analisarmos somente a parte da proporção simples, podemos observar que os estudantes do Grupo 3 também manifestaram os conceitos de correspondência e regularidade, pois eles resolveram as questões efetuando a multiplicação da quantidade de sanduíches produzidos no mês por R$ 3,00; logo, eles compreenderam que cada sanduíche produzido tem um custo de R$ 3,00, o que evidencia também a mobilização do conceito de *proporcionalidade*.

Desse modo, o conceito de *proporcionalidade* está evidenciado em todas as multiplicações da quantidade de sanduíches por R$ 3,00; logo, os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 5 e Grupo 6 também demonstraram a ideia de *proporcionalidade,* uma vez que eles mostraram ter compreendido que um sanduíche produzido corresponde a R$ 3,00, e assim, tantos sanduíches produzidos correspondem a x reais.

Consideramos a noção de *dependência* mobilizada quando os estudantes reconhecem que o gasto total depende da quantidade de sanduíches produzidos. Nesse caso, consideramos os cálculos de estudantes que efetuaram a multiplicação para encontrar o gasto com a produção dos sanduíches e somaram com o valor do imposto. Com isso, identificamos a ideia de *dependência* nos diálogos e esquemas apresentados pelos estudantes do Grupo 1, Grupo 5 e Grupo 6.

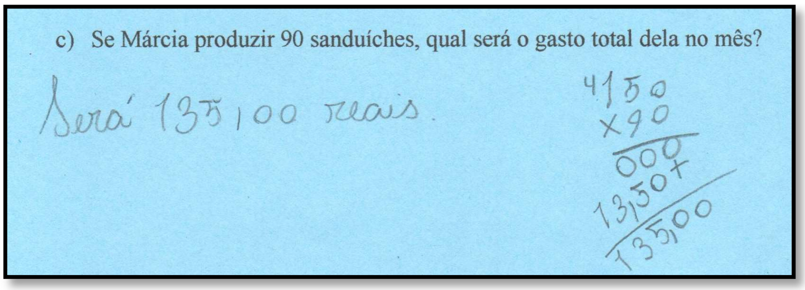
Durante a explicação do problema 4 para a pesquisadora, o estudante 1 esclarece: "*Eu fiz a conta de* 3×10, *que deu 30, e eu somei mais o valor do imposto, que todo mês tem o valor do imposto, aí deu 180 reais. Aí aqui tá falando para preencher a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês. Aí aqui tá as quantias, aí eu fiz três vezes a quantia mais 150 reais do imposto*". Podemos perceber nessa fala as ideias de *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável* e *generalização*, assim como de proporcionalidade, pois o estudante, ao explicar como efetuou os cálculos na tabela para encontrar o gasto total, afirma ter feito a quantia representada em cada linha multiplicada por R$ 3,00 e mais R$ 150,00 de imposto. Essas ideias também foram comprovadas nos diálogos dos estudantes do Grupo 5, no momento em que o estudante 9 menciona: "[...] *fizemos* 20×3, *que deu* 60, *aí somamos o* 60 *com* 150".

Quando o estudante 1 indica "[...] *somei mais o valor do imposto, que todo mês tem o valor do imposto*", ele mostra ter o conhecimento de que sempre terá que somar com R$ 150,00, sendo este a constante da nossa função afim representada por $f(x) = 3x + 150$, sendo x a variável independente, $f(x)$ a variável dependente, 3 a taxa de variação e 150 a constante.

A ideia de *variável* se observa nos diálogos e nas produções escritas dos estudantes do Grupo 1, Grupo 5 e Grupo 6, pois eles seguem os mesmos esquemas de cálculos, mudando apenas a quantidade de sanduíches produzidos

Foi observado, desse modo, que tanto os estudantes do Grupo 1 quanto os estudantes do Grupo 5 e Grupo 6 mobilizaram o pensamento funcional em suas respostas, modeladas por meio da função afim $f(x) = 3x + 150$, sendo $f(x)$ a representação do gasto total de Márcia por mês, encontrado por meio da multiplicação por 3, que representa a taxa de variação da função, com o x, que representa a quantidade de sanduíches produzidos, mais a constante, tendo o valor de 150 como valor do imposto. Com as respostas apresentadas na produção escrita dos estudantes mencionados, podemos indicar que o conhecimento mobilizado por eles pode ser associado ao seguinte *teorema em ação* verdadeiro: Seja f uma relação funcional, então $f(x) = a.x + b$, com a, b, $x \in \mathbb{N}$ (RODRIGUES, 2021), pois os estudantes multiplicaram a taxa de variação da função por x, e o resultado somaram com b para encontrar a $f(x)$.

Para a questão *"c"*, os estudantes de todos os grupos mantiveram o mesmo esquema de resolução da tabela (questão *"b"*) para responderem o gasto total na produção de 90 sanduíches, com exceção das estudantes do Grupo 4, que na tabela inseriram o algarismo 1 entre os números, e na questão *"c"* multiplicaram o valor do imposto por 90 sanduíches, como podemos observar na Figura 33 a seguir.

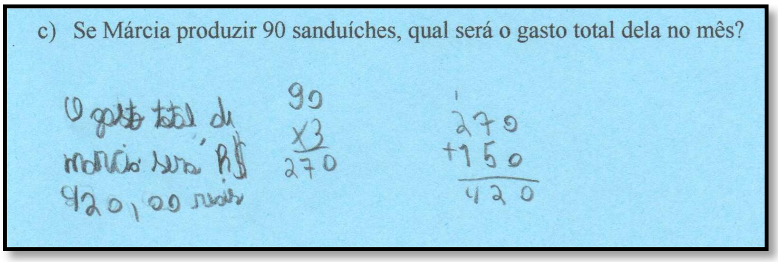

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

Será 135,100 reais.

4150
x90
000
13,50+
135,00

Figura 33: Resolução da questão "c" do problema 4 – Grupo 4
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os estudantes do Grupo 1 e Grupo 5 realizaram o mesmo procedimento das questões anteriores ao resolverem a questão *"c",* ou seja, multiplicaram a quantidade de sanduíches (90) por R$ 3,00, e depois somaram o resultado com 150, como podemos conferir na Figura 34 a seguir.



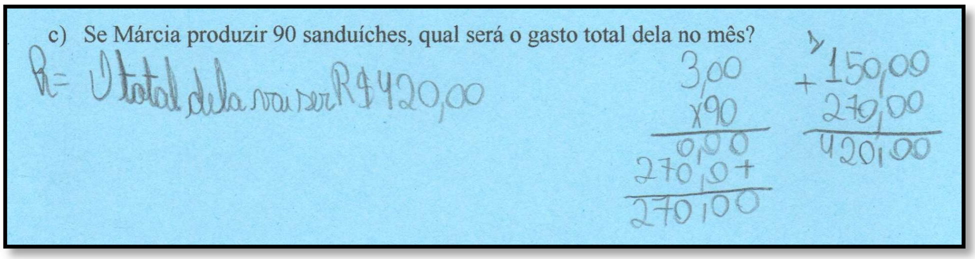
c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

O gasto total de Márcia será R$ 420,00 reais

$$\begin{array}{r} 90 \\ \times 3 \\ \hline 270 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 270 \\ +150 \\ \hline 420 \end{array}$$

Figura 34: Resolução da questão "c" do problema 4 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

As estudantes do Grupo 6 obtiveram a mesma resposta dos grupos 1 e 5, porém, assim como no preenchimento da tabela, as estudantes utilizaram em seus esquemas de resolução a multiplicação de R$ 3,00 pela quantidade de sanduíches produzidos, como podemos verificar na Figura 35 a seguir.



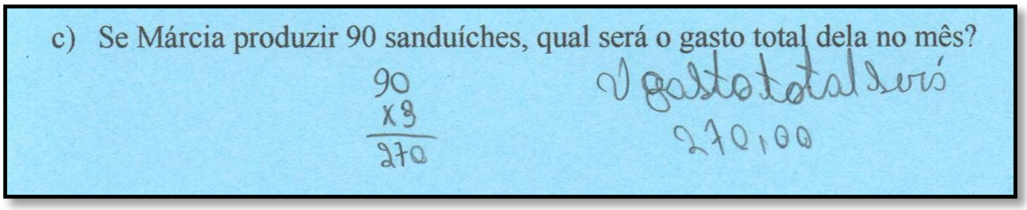
c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

R= O total dela vai ser R$ 420,00

$$\begin{array}{r} 3,00 \\ \times 90 \\ \hline 0,00 \\ 270,0+ \\ \hline 270,00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 150,00 \\ +270,00 \\ \hline 420,00 \end{array}$$

Figura 35: Resolução da questão "c" do problema 4 – Grupo 6
Fonte: arquivo de pesquisa.

Os estudantes do Grupo 2 resolveram a questão *"a"* multiplicando a quantidade de sanduíches por R$ 3,00 e somando com o imposto; na questão *"b"*, preencheram todas as lacunas da tabela efetuando somente a multiplicação da quantidade de sanduíches por R$ 3,00, e mantiveram a mesma estratégia na questão *"c"*. Tal procedimento de resolução foi manifestado também pelos estudantes do Grupo 3. Os cálculos realizados pelos estudantes do grupo 2 podem ser conferidos na Figura 36 a seguir, sendo idênticos aos da resolução do Grupo 3.



c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

$$\begin{array}{r} 90 \\ \times 3 \\ \hline 270 \end{array}$$

O gasto total será 270,00

Figura 36: Resolução da questão "c" do problema 4 – Grupo 2
Fonte: arquivo de pesquisa.

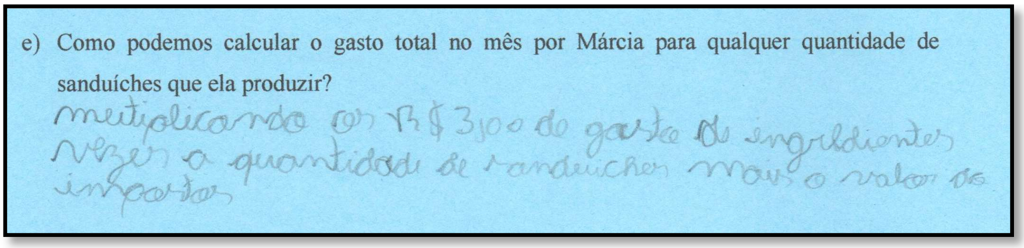
As questões *"d"* e *"e"* foram inseridas, assim como no problema 1, para que pudéssemos investigar se os estudantes conseguiam generalizar o problema. Na questão *"d"*, os estudantes do Grupo 3 mencionaram: "*a questão "a" eu fiz dez vezes três, que deu* 30 *sanduba*". Os estudantes dos demais grupos, Grupo 1, Grupo 2, Grupo 4, Grupo 5 e Grupo 6, apresentaram como resposta que realizaram cálculos de multiplicação e adição. O Grupo 1 apresentou: "*fazendo a conta de adição e multiplicação*", o Grupo 2: "*realizando conta de* $+$ *e de* $\times$", o Grupo 4: "*com contas de* $\times$ *e de* $+$", o Grupo 5: "*multiplicação e adição*", e o Grupo 6: "*utilizando contas de adição e multiplicação*".

Na questão *"e"*, os únicos estudantes que identificamos terem conseguido generalizar o problema foram os estudantes do Grupo 1 e do Grupo 5; os demais grupos apresentaram como resposta a soma de alguns resultados obtidos nas questões anteriores. As estudantes do Grupo 6, por exemplo, apresentaram como resposta a soma de todos os resultados inseridos na tabela da questão *"b";* já os estudantes do Grupo 2 e as estudantes do Grupo 4 apresentaram como resposta a soma dos resultados obtidos nas questões *"a"* e *"c";* os estudantes do Grupo 3 apresentaram como resposta a soma de todos os resultados obtidos nas questões *"a"*, *"b"* e *"c"*.

Como mencionado, os estudantes do Grupo 1 apresentaram uma generalização para o problema 4. O diálogo a seguir explicita o momento em que o estudante 1 explica à pesquisadora como serão realizados os cálculos pra qualquer quantidade de sanduíches produzidos:

Pesquisadora*: Ah, tá, que foram as operações que vocês fizeram. E na letrinha "e"?*
Estudante 1*: Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir? Multiplicando os três reais de gastos de ingredientes vezes a quantia de sanduíches mais o valor do imposto.*
Pesquisadora*: Hum... Então pra qualquer quantidade que ela quiser fazer é só multiplicar pelo valor de cada um depois...*
Estudante 1*: Depois somar com* 150*.*
Pesquisadora*: Pra qualquer um?*
Estudante 1*: Aham.*

Podemos conferir o protocolo escrito do Grupo 1 para a questão *"e",* do problema 4, na Figura 37 seguinte.


e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

multiplicando os R$ 3,00 de gasto de ingredientes vezes a quantidade de sanduiches mais o valor do imposto

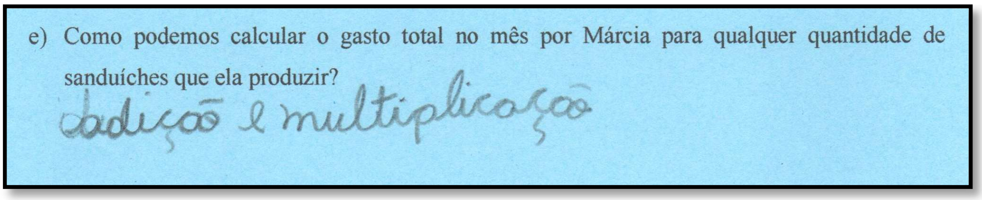
Figura 37: Resolução da questão "e" do problema 4 – Grupo 1
Fonte: arquivo de pesquisa.

Ao apresentarem como resposta "*Multiplicando os três reais de gastos de ingredientes vezes a quantia de sanduíches mais o valor do imposto*", é possível perceber que o estudante 1 reconheceu a variável existente, ou seja, para qualquer quantidade de sanduíches os cálculos sempre seguirão a mesma regra, apresentando então uma generalização para o problema 4. Com isso, garantem-se a mobilização das ideias de *dependência*, *correspondência*, *regularidade*, *variável*, *generalização*, *proporcionalidade* e a modelação da função afim.

Na resolução escrita dos estudantes do Grupo 5, percebemos que "adição e multiplicação" foi indicado como resposta para a questão *"e";* porém, na hora de realizar a explicação para a pesquisadora, o estudante 9 deixa clara a ideia de generalização para o problema:

Pesquisadora: *O que vocês entenderam nessa última pergunta?*
Estudante 9: *Aqui é esse 'podemos' que dá a dica.... Que é multiplicando e somando.*
Pesquisadora: *Mas seria multiplicando e somando o quê?*
Estudante 9: *Tipo, ela fez* 100 *sanduíches, e o gasto de* 3 *reais cada um ia dar* 300 *reais, que é da multiplicação, com mais o* 150*, aí que entra a parte da adição.*
Pesquisadora: *Ah, entendi. Muito bem, pessoal.*

Percebemos que o estudante 9, em sua explicação, faz referência a qualquer quantidade, citando, inclusive, o exemplo de 100 sanduíches produzidos: "*Tipo, ela fez* 100 *sanduíches, e o gasto de* 3 *reais cada um ia dar* 300 *reais, que é da multiplicação, com mais o* 150 *aí que entra a parte da adição*". Percebemos, por essa fala, que o estudante está manifestando todas as ideias-base de função e a ideia de proporcionalidade, pois ele usou uma quantidade qualquer (variável), fez uso da operação de multiplicação (correspondência, dependência, regularidade, proporcionalidade), e somou com o valor do imposto, garantido a generalização do problema, implicando na modelação da função afim. Na Figura 38 a seguir, ilustramos o protocolo escrito dos estudantes do Grupo 5.


e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

adição e multiplicação

Figura 38: Resolução da questão "e" do problema 4 – Grupo 5
Fonte: arquivo de pesquisa.

Desse modo, identificamos no problema 4 as seguintes ideias de função: *correspondência*, *regularidade* e *proporcionalidade,* presentes nas resoluções dos estudantes dos grupos 1, 2, 3, 5 e 6. As ideias de *dependência*, *variável* e modelação da função afim foram identificadas nos grupos 1, 5 e 6, e a *generalização*, nos grupos 1 e 5.

Na análise *a posteriori,* verificamos que os esquemas coerentes previstos nas análises *a priori* foram apresentados pelos estudantes, e também que um erro previsto na análise *a priori* ocorreu: havíamos considerado a hipótese de os estudantes multiplicarem a quantidade de sanduíches pelo seu valor correspondente (R$ 3,00), esquecendo-se de somar com o imposto. Não esperávamos erros ao multiplicar o valor do imposto por R$ 3,00, e, com o resultado, somar com a quantidade de sanduíches produzidos, ou multiplicarem a constante (valor do imposto) pela variável (quantidade de sanduíches produzidos).

Como forma de sintetizar as análises realizadas em todos os problemas, apresentamos a seguir nossas considerações acerca dos problemas 1, 2, 3 e 4.

Considerações Acerca dos Resultados

Para sintetizar as análises realizadas, indicaremos no Quadro 13 as ideias de função que foram manifestadas pelos estudantes de cada grupo ao resolverem os quatro problemas. Para a construção desse quadro, seguimos alguns critérios:

- A resolução das estudantes do Grupo 4 para o problema 2, mesmo que elas tenham apresentado erros de cálculos ao efetuaram a multiplicação 4×9, foi considerada a manifestação de ideias-base de função, pois foi possível identificar em seus diálogos que elas compreenderam o problema; além disso, observamos algumas ideias de função sendo mobilizadas – *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *proporcionalidade*. O mesmo fato ocorreu com os estudantes do Grupo 5 ao preencherem a tabela do problema 4;
- Os estudantes que realizaram uma questão de forma correta, e outra questão, do mesmo problema, de forma incorreta, tiveram suas resoluções consideradas

pertinentes; admitimos também terem sido mobilizadas as ideias de função em ao menos uma das questões, como ocorreu com os estudantes do Grupo 2. Estes estudantes realizaram os cálculos de multiplicação e adição na questão *"a",* tanto no problema 1 quanto no problema 4, porém, nas demais questões, eles se esqueceram de efetuar a adição.

- Para os estudantes que apresentaram o *teorema em ação falso*, assumimos que foram mobilizadas as ideias de *proporcionalidade*, *dependência*, *regularidade*, *correspondência* e *variável*, uma vez os estudantes do Grupo 4 e do Grupo 5 apresentaram os mesmos conceitos de resolução tanto na questão *"a"* quanto na questão *"b"* do problema 1.

Podemos verificar no Quadro 13 as ideias de função que emergiram durante a resolução de cada problema de todos os grupos.

Quadro 13 – Ideias de função mobilizadas pelos grupos

	Problema 1	**Problema 2**	**Problema 3**	**Problema 4**
Correspondência	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 5 Grupo 6
Dependência	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 5 Grupo 6
Regularidade	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 5 Grupo 6
Variável	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Não foi contemplada no problema.	Não foi contemplada no problema.	Grupo 1 Grupo 5 Grupo 6
Generalização	Grupo 1 Grupo 5	Não foi contemplada no problema.	Não foi contemplada no problema.	Grupo 1 Grupo 5
Proporcionalidade	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 5 Grupo 6

Modelação da função afim	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 5 Grupo 6	Grupo 1 Grupo 5 Grupo 6

Fonte: arquivo de pesquisa.

Podemos verificar que a ideia de *generalização* foi a ideia-base de função menos identificada nos grupos, o que é esperado, dadas a sua complexidade e a faixa etária dos estudantes dos Anos Iniciais, tal qual apontam as pesquisas de Nogueira (2014) e Rezende, Nogueira e Calado (2020), ao mostrarem que a *generalização* é ideia-base que mais ocasiona dificuldades de compreensão do conceito de função. Consideramos que os estudantes que resolveram de forma incorreta as questões que antecedem a questão onde a *generalização* é solicitada ficaram impossibilitados de generalizar o problema, uma vez que não reconheciam a *regularidade* existente, e/ou outras ideias-base de função envolvidas.

O problema 2 foi o único em que todas as ideias de função por ele contempladas – *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *proporcionalidade* e modelação *na forma da função afim* – foram identificadas por todos os grupos. Acreditamos que esse fato ocorreu devido ao valor da variável didática envolvida, pois o problema 2 e o problema 3 pertencem à mesma classe, proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas – *com a parte desconhecida*. No entanto, o problema 2 contém valores numéricos pertencente à classe das unidades simples, e o problema 3 contém extensão numérica pertencente à classe dos milhares.

O problema 3 foi solucionado de forma correta pelos estudantes do Grupo1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6, mobilizando as ideias de *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *proporcionalidade* e *modelação na forma da função afim*. Dois grupos (3 e 4) não conseguiram resolver esse problema.

No problema 4, as ideias de *correspondência*, *regularidade e proporcionalidade* foram as que mais estiveram presentes nas resoluções dos estudantes, sendo eles Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 5 e Grupo 6. As ideias de *dependência*, *variável* e a *modelação na forma da função afim* foram manifestadas pelos estudantes do Grupo 1, Grupo 5 e Grupo 6. Já a ideia de *generalização* foi mobilizada pelos estudantes dos grupos 1 e 5.

No problema 1, as ideias de *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável* e *proporcionalidade* foram manifestadas pelos estudantes de todos os grupos. Já a ideia de *generalização* foi identificada na resoluções dos estudantes dos grupos 1 e 5, e a modelação da função afim com os estudantes do Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 6.

Podemos afirmar que as ideias de *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável*, *proporcionalidade* e a modelação da função afim foram mobilizadas pelos estudantes de todos os grupos em ao menos um dos problemas. A ideia de *generalização* foi manifestada pelos estudantes do Grupo 1 e do Grupo 5.

Em relação aos *teorema em ação* manifestados pelos estudantes referentes à modelação da função afim, apresentamos no Quadro 14, a seguir, os que foram identificados.

Quadro 14 – Teoremas em ação identificados nas resoluções dos estudantes

Teoremas em ação	**Grupos**
***Teorema em ação* verdadeiro**: Seja f uma relação funcional, então $f(x) = a.x + b$, com $a,\ b,\ x \in \mathbb{N}$ (RODRIGUES, 2021).	Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 5 e Grupo 6
***Teorema em ação* verdadeiro**: Seja f uma relação funcional $f(x) = a.x + b$, então $b = f(x) - a.x$ com $a, b, x \in \mathbb{N}$,.	Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e Grupo 6
***Teorema em ação* falso**: Seja f uma relação funcional, então $f(x) = a.x + b.x$, com $a,\ b,\ x \in \mathbb{N}$.	Grupo 4 e Grupo 5

Fonte: arquivo de pesquisa.

No que se refere aos esquemas de resolução dos estudantes, observamos entre os grupos, em ao menos um dos problemas:

- Esquemas que envolvem a utilização de algoritmos de multiplicação e adição que permitem uma aproximação com a modelação da função afim da forma $f(x) = ax + b$ – Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e grupo 6.
- Operações Mentais de adição e multiplicação – Grupo 1 e Grupo 5.
- Esquemas com respostas discursivas em linguagem natural explicitando a ideia de generalização – Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e grupo 6.

Na sequência, apresentamos nossas considerações finais a respeito dos resultados desta dissertação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com as análises realizadas, foi constatado que é possível trabalhar com situações envolvendo ideias de função desde os Anos Iniciais, particularmente envolvendo a modelação da função afim. Consideramos importante nesse nível de ensino proporcionar o pensamento funcional para que, com o tempo, o estudante consiga amadurecer e estabelecer relações do objeto estudado com a sua vida cotidiana.

A teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi crucial para o desenvolvimento deste estudo. Com base nela, pudemos elaborar o instrumento de pesquisa e observar os dados produzidos pelos estudantes, analisando-os cautelosamente, e organizando e investigando o conhecimento manifestado pelos estudantes em suas formas escritas ou verbais.

Com base na teoria do Campos Conceituais, pudemos analisar os esquemas dos estudantes ao resolverem os quatro problemas mistos da classe de *proporção simples e composição de medidas,* e como eles explicitavam seus conhecimentos. Analisamos os esquemas e os invariantes operatórios mobilizados por eles. Percebemos também o quanto é importante a troca de informações entre os estudantes, pois eles debatiam acerca do problema, questionavam sobre a solução, e, na maioria das vezes, os construíam juntos com a sua dupla os esquemas de resolução.

Os quatro problemas mistos propostos foram elaborados cuidadosamente, levando em consideração o contexto e a realidade dos estudantes, as variáveis didáticas e seus valores envolvidos. As classes de problemas selecionadas foram: dois problemas – 1 e 4 – pertencentes à classe de proporção *simples multiplicação um para muitos – com o todo desconhecido* –, e dois problemas – 2 e 3 –, pertencentes à classe de proporção *simples multiplicação um para muitos – com a parte desconhecida*.

O total de 13 estudantes participantes foi dividido em cinco duplas e um trio, tendo sido analisadas minuciosamente todas as discussões construídas entre os estudantes, por meio da transcrição dos áudios dos diálogos, da produção escrita dos estudantes, da explicação dada à pesquisadora e das anotações no diário de bordo.

As análises mostram que as ideias-base de função – *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável* e *generalização* –, a ideia de *proporcionalidade* e a modelação da função afim foram mobilizadas nos diálogos e nos protocolos escritos dos estudantes.

Também identificamos a presença de *teoremas em ação* relacionados ao pensamento funcional, mais especificamente associados à função afim.

Para apresentarmos os resultados alcançados, retomamos a questão de pesquisa: *que ideias de função são mobilizadas por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem problemas mistos do tipo de proporção simples e composição de medidas?* Para responder a essa questão, estabelecemos os seguintes objetivos: geral – *identificar ideias de função mobilizadas por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos do tipo proporção simples e composição de medidas* e específicos; *analisar os esquemas apresentados pelos estudantes ao resolverem os problemas mistos*; *identificar teoremas em ação relacionados à modelação da função afim do tipo* $f(x) = ax + b$ *mobilizados nos esquemas dos estudantes*.

Frente às análises, observamos que as ideias-base de função – *correspondência*, *dependência*, *regularidade* e *variável* –, as ideias de *proporcionalidade* e a *modelação da função afim* foram identificadas nas resoluções e nos diálogos dos estudantes em todos os grupos (1 a 6) em ao menos um dos problemas propostos. Também verificamos a presença da ideia de *generalização* manifestada entre os estudantes do Grupo 1 e do Grupo 5. O estudante 1 – Grupo 1 – manifestou a ideia de generalização nos dois problemas de forma explícita, e o estudante 9 – Grupo 5 – explicitou o seu entendimento no momento do diálogo com a pesquisadora sobre o problema 4. No problema 1, o estudante 9 apresenta ideias de generalização de forma implícita, explicitadas depois no problema 4.

Já esperávamos que a ideia de *generalização* seria a ideia mais complexa de ser mobilizada pelos estudantes dos Anos Iniciais, por ser a que gera mais obstáculos na compreensão do conceito de função (NOGUEIRA, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020). No entanto, foi possível observar a manifestação da ideia de *generalização* nos diálogos e nos esquemas de resolução dos estudantes de dois grupos, Grupo 1 e Grupo 5.

Embora o problema 2 e o problema 3 pertençam à mesma classe – proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas – *com a parte desconhecida* –, observamos que o problema 2 foi solucionado pelos estudantes de todos os grupos, enquanto o problema 3 não foi solucionado por dois grupos (3 e 4). Acreditamos que o problema 3 tenha sido mais complexo devido ao valor da variável didática envolvida em seus enunciado, pois esse problema contém valores numéricos pertencentes à classe dos milhares, diferentemente do problema 2, no qual o valor da variável didática pertence à classe das unidades simples.

No problema 2, os estudantes de todos os grupos manifestaram as ideias de função envolvidas: *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *proporcionalidade* e a *modelação na forma da função afim*. No problema 3, estas mesmas ideias foram identificadas nas resoluções dos estudantes do Grupo1, Grupo 2, Grupo 5 e Grupo 6.

Em relação ao problema 1 e ao problema 4, que também pertencem à mesma classe – proporção simples *multiplicação um para muitos* e composição de medidas – *com o todo desconhecido* –, pudemos concluir que no problema 1 foram manifestadas mais ideias de função entre os grupos, quais sejam: c*orrespondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável* e *proporcionalidade* (Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e Grupo 6); g*eneralização* (Grupo 1 e Grupo 5); e m*odelação da função afim* (Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3 e Grupo 6).

Já no problema 4, as seguintes ideias de função foram mobilizadas: c*orrespondência*, *regularidade* e *proporcionalidade* (Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 5 e Grupo 6); d*ependência*, *variável* e a *modelação na forma da função afim* (Grupo 1, Grupo 5 e Grupo 6); e g*eneralização* (Grupo 1 e Grupo 5).

Em relação aos teoremas em ação identificados, observamos a presença de três, sendo dois verdadeiros e um falso, a saber: t*eorema em ação* verdadeiro – Seja f uma relação funcional, então $f(x) = a.x + b$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$ (RODRIGUES, 2021); t*eorema em ação* verdadeiro – Seja f uma relação funcional $f(x) = a.x + b$, então $b = f(x) - a.x$ com a, b, $x \in \mathbb{N}$; e t*eorema em ação* falso – Seja f uma relação funcional, então $f(x) = a.x + b.x$, com $a, b, x \in \mathbb{N}$.

O *teorema em ação* falso foi mobilizado no problema 1 pelas estudantes do Grupo 4 e pelos estudantes do Grupo 5. O *teorema em ação* verdadeiro, $f(x) = a.x + b$, foi mobilizado pelos estudantes dos grupos 1, 2, 3, 5 e 6 nos problemas 1 e 4, tendo sido apresentado em um ou ambos. O *teorema em ação* verdadeiro, $b = f(x) - a.x$, foi identificado em todos os grupos na resolução dos problemas 3 e 4, mobilizado em um ou em ambos.

Observando os esquemas de resolução dos estudantes, identificamos que todos eles utilizaram esquemas que envolvem algoritmos de multiplicação e adição que dão suporte para a modelação da função afim da forma $f(x) = ax + b$; foram identificadas operações mentais de adição e multiplicação – Grupo 1 e Grupo 5; e esquemas com respostas discursivas em linguagem natural explicitando a ideia de *generalização* – Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3, Grupo 4, Grupo 5 e grupo 6.

Tendo em vista que o conceito de função não é simples de ser compreendido, dado o longo processo histórico para termos a sua definição como atualmente conhecemos; e que ideias de função podem ser trabalhadas desde os Anos Iniciais, como comprovam os resultados destas pesquisa, defendemos que sejam propostas, em sala de aula, situações que envolvem ideias de função, guardadas as suas propriedades algébricas, sem envolvimento de letras, para serem desenvolvidas desde os Anos Iniciais. Desse modo, a compreensão de função pelos estudantes ocorrerá no decorrer do processo escolar, até a sua formalização, por meio da modelação algébrica, ao final do Ensino Fundamental.

Mesmo sendo mais complexa a manifestação da ideia de regularidade e de generalização em problemas mistos, conseguimos identificar a presença da ideia de *regularidade* em todos os grupos nas resoluções dos problemas 1 e 2, nas resoluções dos grupos 1, 2, 5 e 6 do problema 3, nas resoluções dos grupos 1, 2, 3, 5 e 6 do problema 4, e a ideia de *generalização* nas resoluções dos estudantes dos grupos 5 e 6 dos problemas 1 e 4.

Desse modo, concluímos que as ideias de função – *correspondência*, *dependência*, *regularidade*, *variável*, *generalização*, *proporcionalidade* e *modelação da função afim* – podem ser mobilizadas por estudantes dos Anos Iniciais mediante a resolução de problemas mistos, possibilitando maiores entendimentos sobre o conceito de função, particularmente da função afim, com a sua estrutura algébrica a ser desenvolvida nos anos posteriores. Para tal, indicamos a importância de analisar as respostas dos estudantes que, na maioria das vezes, trazem conhecimentos implícitos que podem ser modelados na forma de *teoremas em ação*. Consideramos também a relevância da apresentação de situações-problema de diferentes classes para instigar a elaboração de novos esquemas e de possíveis novos *teoremas em ação* pelos estudantes.

Os resultados alcançados na pesquisa foram obtidos em uma escola do campo, com salas de aula menores e com estudantes cujos conhecimentos indicam alto índice no IDEB. Entende-se que as manifestações das ideias-bases de funções identificadas nessa pesquisa podem ser diferentes se forem analisadas em outros contextos, com outras realidades e em salas de aula numerosas, pois tais fatores implicam nos esquemas e na forma como cada estudante organiza o pensamento ao se deparar com uma determinada situação, o que pressupõe a possibilidade de mobilizar ou não as ideias de função.

Ainda em relação aos resultados, reforçamos que os problemas propostos foram pensados minuciosamente para atender a realidade dos estudantes, contribuindo para que eles fossem capazes de interpretar trazendo sentido a eles. Talvez teríamos outros resultados se trabalhássemos com outros tipos de problemas, comuns ou não ao cotidiano de uma sala de aula. Com isso, indicamos que deve-se considerar tanto o contexto envolvido nos problemas quanto as variáveis didáticas com seus respectivos valores, pois a apropriação de um conceito por um indivíduo depende das situações que lhe são ofertadas, implicando na construção e reconstrução desses conhecimentos.

Assim, esperamos que esse trabalho possa trazer contribuições para pesquisadores interessados pelo tema e também aos professores da Educação Básica, para que estes tenham a possibilidade de levar para as suas aulas os resultados desta pesquisa, as situações elaboradas, o reconhecimento de esquemas e teoremas em ação possíveis de serem manifestados pelos estudantes, bem como a possibilidade e importância de se desenvolver ideias de função, particularmente função afim, com estudantes desde os Anos Iniciais. Como possibilidades de pesquisas futuras, indicamos a variação de outras classes de problemas mistos em diferentes níveis de escolaridade, bem como a elaboração de Engenharias Didáticas associadas a problemas mistos e ideias de função e/ou função afim, desde os Anos Iniciais.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira Thompson Learning Ltda, 2001.

BECK, V. C. **Invariantes Operatórios do Campo Conceitual Algébrico Mobilizados por Crianças do Terceiro Ano do Ensino Fundamental**. Tese (Doutorado). 2018, 133 f. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande, 2018.

BERNARDINO, F. *et al.*; Ideias-base do conceito de função mobilizadas por estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. In: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (org.). **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade:** reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de Matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.51-70.

BITTAR, M. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Orgs.). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009, p. 13-35.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, Rosinalda; MONTEIRO, Carlos; BORBA, Rute. (Org.) **Investigações em Didática da Matemática.** Recife: UFPE, 2017. p.100-131.

BLANTON, M. et al. Early Algebra. In: VICTOR, J. K. (Ed.) **Álgebra**: Gateway to a Technological Future. Columbia/USA: The Mathematical Association of America, 2007.

BLANTON, M.; KAPUT, J. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. *In*: **Caderno dá licença**. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense, v. 6, p. 63-76, Niterói, 2007.

BONI, K. T.; FERREIRA, M. P. P.; GERMANO, M. A. P. Caracterização do pensamento algébrico nos Anos Iniciais. **XI Encontro Nacional de educação Matemática – ENEM**, Curitiba, 2013.

BOYER, C. **A history of mathematics**, New York: Wiley & Sons, 1968.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC) -** Ensino Fundamental. Brasília, DF, 2018.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CALADO, T. V. **Invariantes Operatórios Relacionados à Generalização: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim**. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

CALADO, T. V; REZENDE, V. Aspectos Históricos e Epistemológicos do Conceito de Função: um estudo sobre as ideias base. **Revista Eletrônica de Educação**, v. x, n. x, *no prelo*, p. x-x.

CALDART, R. S. A escola do campo em movimento. **Currículo sem Fronteiras**, v. 3, n. 1, p. 60-81, 2003.

CAMPITELI, H. C; CAMPITELI, V. C. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, B. J. de. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa, 1951.

CARRAHER, D., W; SCHLIEMANN, A., D. Powerful Ideas in Elementary School Mathematics. In: **Hamdbook of International Research in Mathematics Education**. Routledge. New York, 2016.

CHAVES, M. I. A. de.; CARVALHO, H. C. de. Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio: Uma Sequência de Ensino-Aprendizagem. *In*: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.** 2004.

COLETTI, S. Pensamento algébrico no Anos Iniciais: o que diz a BNCC?. **Nova Escola**, 2020. Disponível em: < https://novaescola.org.br/conteudo/19749/pensamento-algebrico-nos-anos-iniciais-o-que-diz-a-bncc> . Acesso em: 26 de abril de 2022.

COQUEIRO, V. dos S.; MORAN, M.; DEZILIO, K.; SILVA, S. D.; ALVES, V. **Manual Didático para o uso dos materiais do Laboratório de Matemática do Programa Brasil Profissionalizado**. Campo Mourão, PR: Unespar, 2017.

DANTE, L.R. Ápis Matemática – 1º ano. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017a.

DANTE, L.R. Ápis Matemática – 2º ano. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017b.

DANTE, L.R. Ápis Matemática – 3º ano. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017c.

DANTE, L.R. Ápis Matemática – 4º ano. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017d.

DANTE, L.R. Ápis Matemática – 5º ano. 3ª edição, São Paulo: Editora Ática, 2017e.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. **Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar,** Pro-Posições, Campinas, v. 4, n. 1(10), p.78-91, mar, 1993.

GITIRANA, V. *et al*. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2014.

JESUS, C. C. de; CYRINO, M. C. de C. T; OLIVEIRA, H. M. de. Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa – EMP**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 21-46, 2018.

KAPUT, J. **Teaching and Learning a New Algebra With Understanding**. New York, 1999.

LIMA, E. L *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. ed. 11. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MACHADO, L. C. T. Da Educação Rural à Educação do Campo: conceituação e problematização. **XIII Congresso Nacional de Educação – EDUCERE; IV Seminário Internacional de Representações Sociais, Subjetividade e Educação**, 2017.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 2ª edição. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S.; MERLINI, V.; SANTOS, A. O Desempenho dos estudantes de 4ª Série do Ensino Fundamental frente a Problemas de Estrutura Multiplicativa. In: **X encontro Nacional de Educação Matemática,** 2010, Salvador. Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Ilhéus: Via Literarum, v. 1. p. 1-11, 2010.

MAGINA, S.; MERLINI, V.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa a luz da teoria dos campos conceituais: uma visão com foco na aprendizagem In: Castro Filho *et al*. (Org.) **Matemática, Cultura e Tecnologia: perspectivas internacionais.** Curitiba: CRV, 2016, p. 66-82.

MAGINA, S.; PORTO, R. S. O.. É possível se ter raciocínio funcional no nível dos anos iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. **VII Seminário internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil, 2018.

MIRANDA, C. A. **Situações-problema que envolve o conceito de função afim: uma análise à luz da teoria dos Campos Conceituais**. Dissertação (Educação Matemática/Mestrado PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, 2019.

MORAES, R. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva**. Revista Ciência e Educação,**v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, oensinodeciênciaseapesquisanestaárea**.InvestigaçõesemEnsinodeCiências, v. 7, nº 1, 2002.

NOGUEIRA, C. M. I. Construindo o Conceito de Funções. *In*: Ramos, A.S.; Rejani, F.C. **Teoria e Prática de Funções**. Maringá: Unicesumar, p. 121, 2014.

NUNES, T. É hora de ensinar proporção. **Revista Nova Escola**, São Paulo, n. 161, abr. 2003.

NUNOMURA, A. R. T.; SILVA, K. A. P. da.; VERTUAN, R. E. Pensamento aritmético e pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: o relato de uma experiência. **Encontro Paranaense de educação Matemática**, Londrina, 2019.

OLIVEIRA, V. de.; PAULO, R. M. Pensamento algébrico nos Anos Iniciais: o que pensam os professores?. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – EM TEIA**, v. 12, n. 3, 2021

PARANÁ. Governo do Estado do Paraná; Secretaria de Estado da Educação; Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação do Campo**. Curitiba, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Referencial Curricular do Paraná:** Princípios, Direitos e Orientações. Curitiba, 2018.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP)**. Curitiba, 2021a.

PARANÁ.Resolução SESA nº 977/2021, de 28 de outubro de 2021. Altera o art. 26º, 32º, 34º, 37º, 44º, 53º e revoga outros da Resolução SESA nº 860 de 23 de setembro de 2021. **Governo do Estado do Paraná**, Curitiba, 2021b.

PAVAN, L. R. **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª serie do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas**. 2010. 195 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá – PR, 2010.

PPP. **Projeto Político Pedagógico**. Escola Municipal Luciane Almeida Liberal – Ensino Fundamental, 2021.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. **Educação e Matemática**, 1990, p. 3-9.

QUEIROZ, P. C. G. Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, Tamires Vieira. Função afim na Educação Básica: estratégias e ideias-base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. In: **Alexandria:** Revista de Educação em Ciências e Tecnologia. Florianópolis, v.13, n.2, p.25-50, 2020.

RODRIGUES, C. L. H; REZENDE, V. Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. **Amazônia**, revista de Educação em Ciências e Matemática, v. 17, n. 39, 2021, p. 271-287.

RODRIGUES, C. L. H. **Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental.** 2022. 178f. Dissertação

(Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel - PR, 2021.

ROSSINI, R. **Saberes sobre o tema função: uma investigação das Praxeologias**. 2006. 384 f. Tese (Doutorado) – Programa Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

SILVA, A. de P.**Conceito de função: atividades introdutórias propostas no material de matemática do ensino fundamental da rede pública estadual de São Paulo.** Dissertação de Mestrado. PUC/SP. São Paulo, 2008.

SILVA, L. Del C. P. da. **As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias-base de função**. Tese (Educação Matemática/Mestrado PPGECEM da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE – *Campus* de Cascavel, 2021.

SILVA, V. L. da. **Ensino e aprendizagem de problemas de produtos cartesiano: inter-relações entre diferentes representações**. Dissertação de Mestrado. PUC/SP. São Paulo, 2006.

TORRES, M. R; SIMÕES, W. **Educação do campo: por uma superação da educação rural no Brasil**. Curitiba, 2011. Disponível em: <http://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/38662/R%20-%20E%20-%20MIRIAM%20ROSA%20TORRES.pdf?sequence=1>. Acesso em 27 de abr. de 2022.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de função.** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

TINOCO, L. A. A et al. **Caminhos da álgebra na escola básica.** In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO, 6, 2008, Rio de Janeiro, **Anais...**

TINOCO, Lucia Arruda Albuquerque. **Álgebra:** pensar, calcular, comunicar....2º ed. Rio de Janeiro, Projeto Fundão, 2011.

TRINDADE, J. A. O.; MORETTI, M. T. Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de funções: a mediação. **Revista Zetétiké**, CEPEM-FE/UNICAMP, n.13/14, p.29-50, jan/dez. 2000.

D'AMBROSIO, U. **Apresentação**. Funções. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006. P. 130

VERGNAUD, G. **Multiplicative structures**. In: Acquisition of mathematics concepts and processes. Edited by Richard Lesh and Marsha Landau. Academic Press, NY, 1983.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. Rechercheen Didactiquedes Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage**, vol. 10, n. 2.3, p. 133 a 170, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação do Rio de Janeiro.** Instituto de Matemática da UFRJ. 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In. BRUN, Jean. **Didáctica das matemáticas.** Tradução por Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a.p. 155-191.

VERGNAUD, G. **A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos**. Seminário Campos Conceituais na construção do conhecimento, Porto Alegre: GEEMPA, 1996b.

VERGNAUD, G. O que é aprender. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009a.p. 13-35.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009b.

VERGNAUD, G. **Forma operatória e forma predicativa do conhecimento**. In: 1º I Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. Tradução por Maria Rita Otero, Conicet -Niecyt, UNICEN, Tandil, Argentina, 2013. p. 1-13.

VERGNAUD, G. **Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud:** Teoria dos Campos Conceituais TCC. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function. **Archive for History of Exact Sciences**, vol. 16, n. 1, p. 37-85. 1976.

ZANELLA, M. S.; BARROS, R. M. de O. **Teoria dos Campos Conceituais:** situações problemas da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais. 1. ed. – Curitiba, PR: CRV, 2014.

ZUFFI, E. M. Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função. *In*: **Hipátia**, Campos do Jordão (SP). v. 1, n.1, p. 1-10, dez. 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE I – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ

Credenciada pelo Decreto Estadual n.º 9.538, de 05/12/2013
Recredenciamento pelo Decreto nº 2.374, de 14/08/2019
CNPJ: 05012896/0001-42

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP UNESPAR

Prezado(a) Colaborador(a), ____
____

Você esta sendo convidado (a) a participar da pesquisa intitulada "**IDEIAS DE FUNÇÃO E PROBLEMAS MISTOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**", que faz parte do Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UNESPAR, sob a responsabilidade da Dra. Veriadiana Rezende da instituição Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR e da pesquisadora Karina Dezilio, que terá como objetivo analisar invariantes operatórios mobilizados por alunos dos Anos Iniciais, a partir de uma sequência didática envolvendo problemas mistos e ideias de função.

O presente projeto de pesquisa foi aprovado pelo CEP UNESPAR.

DADOS DO PARECER DE APROVAÇÃO
Emitido Pelo Comitê de Ética em Pesquisa, CEP UNESPAR.
Número do parecer: 4.661.538
Data da relatoria: 20/04/2021

1. **PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA:** A sua participação é muito importante, e ela se daria da seguinte forma: responder a sequência didática envolvendo problemas mistos e ideias de função que serão propostos.

2. **RISCOS E DESCONFORTOS:** Informamos que esta pesquisa traz riscos mínimos, podendo causar desconfortos ou timidez e sentimento de insegurança se o sujeito da pesquisa não conseguir se adaptar com as atividades proposta. Salientamos que em qualquer momento o aluno(a) poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa, se sentir desconfortável.

Lembramos que a sua participação é totalmente voluntaria, podendo você recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa.

3. **BENEFÍCIOS:** Os benefícios esperados são:

- Acreditamos que esta pesquisa poderá fazer com que nós professores repensamos na forma como apresentamos os problemas aos alunos, e que existem diferentes problemas, de classes diferentes, que fazem com que o aluno possa mobilizar diferentes estratégias de soluções.

- Esta pesquisa também contribuirá na identificação de alguns teoremas em ação mobilizados pelos estudantes, sendo estes muito importantes para o conhecimento e aprendizagem em matemática. Os erros, assim como os acertos dos alunos tem que ser muito bem analisados e levar em consideração, pois muitas vezes o conhecimento do aluno sobre algum conteúdo é manifestado implicitamente em suas respostas, sendo este estudo sendo relevante para mostrar alguns desses conhecimentos implícitos.

4. **CONFIDENCIALIDADE:** Informamos ainda que suas as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa, e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Serão utilizados gravadores de áudio ao qual ficará sob os cuidados da pesquisadora Karina Dezilio durante o período necessário para a escrita das análises dos dados, ao qual será mantido sigilo absoluto. Após todas as informações coletados, as gravações serão excluídas.

As suas respostas e dados pessoais ficarão em segredo e o seu nome não aparecerá em lugar nenhum das nossas análises dos gravadores de áudio e escritas, nem quando os resultados forem apresentados.

Além disso, os dados a serem coletados só serão utilizados para fins de publicações científicas, num período de até cinco anos, a partir do ano de 2021. Após este período os dados serão descartados.

5. ESCLARECIMENTOS: Caso você tenha mais dúvidas ou necessite esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas consequências, enfim, tudo o que queira saber antes, durante e depois da sua participação, pode nos contatar nos endereços abaixo ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da UNESPAR, cujo endereço consta deste documento.

Qualquer dúvida com relação aos aspectos éticos da pesquisa poderá ser esclarecida com o Comitê Permanente de Ética em Pesquisa (CEP) envolvendo Seres Humanos da UNESPAR, no endereço abaixo:

CEP UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná.
Avenida Rio Grande do Norte, 1.525 – Centro, Paranavaí-PR.
CEP: 87.701-020
Telefone: (44) 3482-3212
E-mail: cep@unespar.edu.br

6. RESSARCIMENTO DAS DESPESAS: Caso o(a) Sr.(a) aceite participar da pesquisa, não receberá nenhuma compensação financeira.

7.1 CUSTOS: Foi esclarecido de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por sua participação na pesquisa, tendo em vista que sua participação é voluntaria.

PREENCHIMENTO DO TERMO: Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você.

Além da assinatura nos campos específicos pelo pesquisador e por você, solicitamos que sejam rubricadas todas as folhas deste documento. Isto deve ser feito por ambos (pelo pesquisador e por você), como garantia do acesso ao documento completo.

TERMO 1

Pelo presente instrumento que atende às exigências legais, o Sr.(a)____, declara que, após leitura minuciosa do TCLE, teve oportunidade de fazer perguntas, esclarecer dúvidas que foram devidamente explicadas pelo (a) pesquisador(a), ciente dos serviços e procedimentos aos quais será submetido e, não restando quaisquer dúvidas a respeito do lido e explicado, firma seu CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO em participar voluntariamente desta pesquisa. E, por estar de acordo, assina o presente termo.

Paraná do Oeste, ______ de ______________________ de 2021

____

Assinatura ou impressão datiloscópica

TERMO 2

Eu ____ (nome do pesquisador ou do membro da equipe que aplicou o TCLE), declaro que forneci todas as informações referentes ao projeto de pesquisa supra-nominado.

Paraná do Oeste, ______ de ______________________ de 2021

____

Veridiana Rezende

Pesquisadora Responsável

____

Karina Dezilio

Pesquisadora Acadêmica

APÊNDICE II – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ

Credenciada pelo Decreto Estadual n.º 9.538, de 05/12/2013
Recredenciamento pelo Decreto nº 2.374, de 14/08/2019
CNPJ: 05012896/0001-42

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA – CEP UNESPAR

UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná

PARANÁ
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

1. O termo de assentimento não elimina a necessidade de fazer o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) que deve ser assinado pelo responsável ou representante legal do menor de 18 anos ou legalmente incapaz.
2. Incluir que a pesquisa atende e respeita os direitos previstos no Estatuto da Criança e do Adolescente - ECA, Lei Federal nº 8069 de 13 de julho de 1990, sendo eles: à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária.
3. Garantia que será atendido o Artigo 18 do ECA: "É dever de todos velar pela dignidade da criança e do adolescente, pondo-os a salvo de qualquer tratamento desumano, violento, aterrorizante, vexatório ou constrangedor
4. Deve ser construído seguindo os mesmos itens do TCLE.

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(Crianças de 07 a 12 anos)

Nós, Veridiana Rezende (pesquisadora principal) e Karina Dezilio (pesquisadora acadêmica) convidamos você ____ a participar do estudo "IDEIAS DE FUNÇÃO E PROBLEMAS MISTOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL".

Por que estamos propondo este estudo? Por que pretendemos analisar invariantes operatórios mobilizados por alunos dos Anos Iniciais, a partir de uma sequência didática envolvendo problemas mistos e ideias de função.

O que significa assentimento

Assentimento é um termo que nós, pesquisadores, utilizamos quando convidamos uma pessoa da sua idade (criança) para participar de um estudo. Depois de compreender do que se trata o estudo e se concordar em participar dele você pode assinar este documento.

Nós te asseguramos que você terá todos os seus direitos respeitados e receberá todas as informações sobre o estudo, por mais simples que possam parecer.

Pode ser que este documento denominado Termo de Assentimento Livre e Esclarecido contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável (pela pesquisa/atendimento ou à equipe do estudo) para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

Por que estamos queremos fazer este estudo?

Por que queremos analisar invariantes operatórios mobilizados por alunos dos Anos Iniciais, a partir de uma sequência didática envolvendo problemas mistos e ideias de função.

A pesquisa será feita na Escola Municipal Luciane Almeida Liberal E. F, em Paraná do Oeste, distrito de Moreira Sales no período de 01 de dezembro de 2021, no horário das 13h00min às 15h00min onde as crianças resolverão problemas mistos com ideias de função. Para isso, serão usadas atividades impressas e gravadores de áudio. O uso das atividades impressas e dos gravadores de áudio são considerados seguros, mas é possível ocorrer desconfortos ou timidez e sentimento de insegurança se o sujeito da pesquisa não conseguir se adaptar com as atividades proposta. Salientamos que em qualquer momento o aluno(a) poderá solicitar o encerramento dos registros e cancelar a sua participação na pesquisa, se sentir desconfortável.

Mas há coisas boas que podem acontecer, pois acreditamos que esta pesquisa poderá auxiliar os professores a repensarem na forma como são apresentados os problemas para os alunos, além de contribuir para o conhecimentos de diferentes problemas e ajudar a conhecer alguns dos conhecimentos implícitos apresentados pelos alunos. Além disso, esperamos que esta pesquisa proporcione aprendizagens para vocês a respeito de problemas mistos e ideias de função. Também esperamos que os resultados desta pesquisa sirvam de respaldo para pesquisa futuras no campo da Educação Matemática.

Se você ou os responsáveis por você tiverem dúvidas com relação ao estudo ou aos riscos relacionados a ele, você deve contatar a pesquisadora Karina Dezilio (pesquisadora acadêmica) E-mail: karinadezilio@hotmail.com, ou no seguinte endereço: Avenida Rio Grande do Norte, 1525. CEP: 87701-020 – Centro – Paranavaí/PR. Telefone: (44) 35823200

Participante da Pesquisa I ____

Pesquisador Responsável ou quem aplicou o TALE: _____________________

Orientadora: ____

Obs.: Estes espaços para rubricas são destinados às primeiras páginas do TALE – não sendo necessário na última página, pois já contém linha de assinatura.

Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como participante de pesquisa, você pode contatar também o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da UNESPAR, no endereço abaixo:

CEP UNESPAR
Universidade Estadual do Paraná.
Avenida Rio Grande do Norte, 1.525 – Centro, Paranavaí-PR.
CEP: 87.701-020
Telefone: (44) 3482-3212
E-mail: cep@unespar.edu.br

Ninguém saberá que você está participando da pesquisa; não falaremos a outras pessoas, nem daremos a estranhos as informações que você nos der. Os resultados da pesquisa vão ser publicados, mas sem identificar o nome das crianças que participaram.

Se em algum momento não tiver mais interesse em participar da pesquisa, pode pedir para seus pais ou responsáveis comunicarem os pesquisadores.

Você entendeu? Quer perguntar mais alguma coisa?

DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO PARTICIPANTE

Eu li e discuti com o pesquisador responsável sobre este estudo e os detalhes deste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste documento.

Paraná do Oeste, ______ de ___________________de 2021

____

(Assinatura da criança)

(Assinatura do Pesquisador Responsável ou quem aplicou o TALE)

APÊNDICE III – INSTRUMENTO DE PESQUISA DO ESTUDO PILOTO

1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

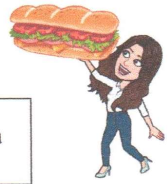
c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

d) Como podemos calcular o gasto total de Pedro para qualquer quantidade de ingressos que ele queira comprar?

2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?

4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.



a) Com essas informações preencha a tabela:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	**Gasto total no mês por Márcia**
5	
10	
15	
20	
25	

b) Se Márcia produzir 80 sanduíches, qual será gasto total dela no mês?

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

d) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

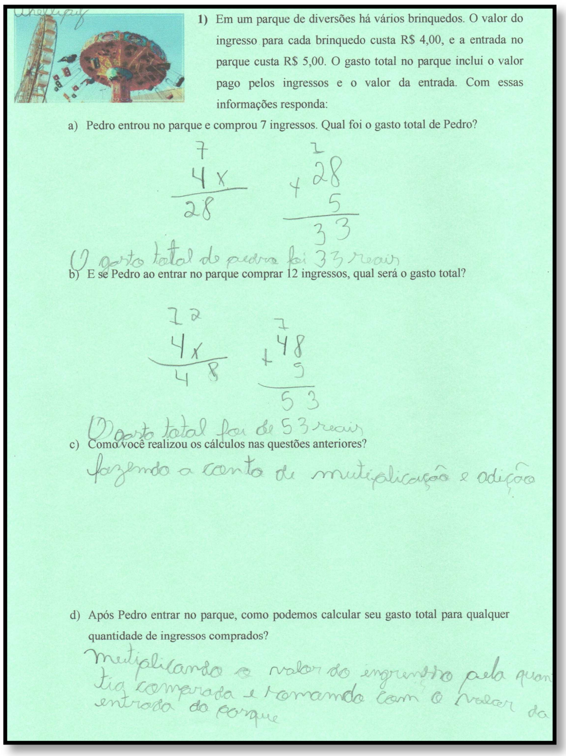
APÊNDICE IV – TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS E PROTOCOLOS ESCRITOS – GRUPO 1

Estudante 1: Eu vou ler a situação e nós resolve! (o estudante 1 lê o problema).
Estudante 2: É... 4×7. Ó... O ingresso é 4 reais.
Estudante1: É, mas só que para ele entrar ele gastou 5 reais dele, não foi?
Estudante 2: É... 4×7 e depois 5...
Estudante 1: Calma! Vou ler de novo para nós entender.
Nesse momento estudante 1 lê novamente o enunciado, ao terminar ele diz:
Estudante 1: Ele entrou no parque, ele gastou 5 reais. Vamos fazer 4×7, o valor mais 5 reais... Não é?
Estudante 2: É!
Estudante 1: 4×7 é... Calma aí! 7 com 7, quatorze, 14 com 14, vinte e oito. O total deu 28! Agora, $28 + 5$. Vamos fazer a conta aqui. Vinte e oito... Mais cinco... Oito mais cinco é igual a...
Estudante 2: 13!
Estudante 1: 13, sobe um aqui em cima. Um mais dois é igual a três... Trinta e três! Vamos fazer a resposta completa aqui... O gasto total de Pedro foi 33 reais. Pronto! Agora nós já resolvemos a primeira! Vamos ver a segunda!
O estudante 1 lê o enunciado da questão "b".
Estudante 1: Mesma coisa será? O cinco reis também vai valer?
Estudante 2: Vai. Porque ó 'e se Pedro entrar no Parque e comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?'.
Estudante 1: É mesmo. Doze vezes quantos mesmo que ta o ingresso?
Estudante 2: Doze vezes sete.
Estudante 1: Doze vezes quatro!
Estudante 2: É.
Estudante 1: O ingresso ta quatro reais né?
Estudante 2: É! 12×4.
Estudante 1: Eu vou fazer quatro vezes o doze. Quatro vezes dois é oito, quatro vezes um é quatro... Quarenta e oito!
Estudante 2: Com mais cinco?
Estudante 1: Quarenta e oito? Então vamos colocar... O gasto total seria...
Estudante 2: Mais cinco, tem que colocar!
Estudante 1: É! Tem que colocar mais cinco né. Errei!
Estudante 2: É só deixar aí. O gasto total vai ser...
Estudante 1: É. Vamos fazer $48 + 5$ ... Oito com cinco, treze, coloco três e sobe um, quatro mais nada com um, cinco! Cinquenta e três! Será que é cinquenta e três mesmo?
Estudante 2: É. O meu deu 53!
Estudante 1: Não.
Estudante 2: É!
Estudante 1: Será? $48 + 5$ é 53. É cinquenta e três mesmo! O gasto total foi de 53 reais.
Estudante 1: Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?(Nesse momento houve uma pausa).
Estudante 2: Eu acho que nos vai ter que colocar ... (ocorreu uma pausa novamente).
Estudante 1: Multiplicando e adicionando! Eu vou colocar fazendo a conta... fazendo a conta de multiplicação e adição.
Estudante 1: Agora a última. Vamos responder a questão "d! (estudante 1 lê o enunciado da questão "d") Peraí. Calma! (O estudante 1 lê novamente o enunciado).
Estudante 2: $12 + 7$.
Estudante 1: Hum... o gasto total? Multiplicando pelo valor do ingresso e somando com a entrada do parque... Multiplicando o valor do ingresso pela quantia comprada... e somando com o valor da entrada do parque, né? E somando com o valor da entrada do parque.
Estudante 2: Comprado? Quantia comprada...
Estudante 1: Não, calma! Quantia comprada e somando com o valor da entrada do parque. Professora, nós acacabamos!
Pesquisadora: Vamos lá meninos, já acabaram? Posso por o gravador no meio pra ficar melhor?
Estudante 1: Huran!
Pesquisadora: Então ta! O que vocês fizeram na questão "a"? Como vocês fizeram?
Estudante 1: É... Nós multiplicamos o valor do ingresso pela quantia comprada e adicionamos mais cinco que foi a entrada do parque pra saber quantos que ele gastou no total.
Pesquisadora: Hum... Entendi! E na letrinha "b"?

Estudante 1: A mesma coisa. Só mudou a quantidade de ingressos daí.
Pesquisadora: E na letra “c”? Como vocês realizaram os cálculos?
Estudante 1: Fazendo conta de multiplicação e adição.
Pesquisadora: E na última?
Estudante 1: Multiplicando o valor do ingresso pela quantia comprada e somando com o valor da entrada no parque.
Pesquisadora: Hum entendi! E vocês então entenderam o que estava pedindo? Acharam fácil?
Estudante 1: Haram. Sim.
Pesquisadora: Tudo bem! Agora coloca os nomes de vocês na folha que eu vou entregar a segunda folha.
Estudante 1: Ta professora, obrigado!
O estudante 2 começa a leiteira do problema 2.
Estudante 1: Pera lá. Vamos ler de novo para interpretar (o estudante 1 lê novamente o problema). Nós vamos fazer aqui, 19 × 4 né? Que é o quilômetro.
Estudante 2: É! 19 × 4.
Estudante 1: 19 × 4... É 4 × 19 fica mais fácil. Fica mais simples. 4 × 9 é... Nove, nove com nove, dezoito, dezoito com dezoito, 36.
Estudante 2: 36.
Estudante 1: É trinta e seis e sobe o três em cima do um. Quatro vezes um é quatro com mais três é sete. Fica 76... 76! Aí nós vamos colocar 82, que é o valor que o motorista cobrou no total... 82 menos 76, que tinha dado ali na nossa conta, igual a dois tira seis não dá né? Nós vamos ter que emprestar do vizinho. O 8 agora virou 7 e o 2 vira 12. 12 tira 6 é 6. 7 menos 7 é zero. Então aqui nós colocamos zero. Então deu 6!
Estudante 2: 6 reais!
Estudante 1: O valor adicional do motorista foi seis... seis reais... Então o valor cobrado pelo motorista foi 6 reais! Professora, acabamos a 2 já.
Estudante 2: A resposta!
Estudante 1: É... Agora nós vamos ter que colocar a resposta completa... O valor adicional... Adicionado pelo motorista foi de R$ 6,00. Pronto! Agora nós conseguimos a 2, vamos chamar a professora. Professora... Acabamos a 2 ta bom. Daqui a pouco você vem pegar.
Estudante 2: O Thile (apelido do estudante 1) tem certeza que foi seis reais? Ele cobra quatro reais por quilômetro, foi 19 quilômetros que percorreu. Será que não é 76 reais?
Estudante 1: Quê?
Estudante 2: É... Aqui ele cobra quatro reais por quilômetro e foi 19 quilômetros que ela percorreu.
Estudante 1: 4... 19... 4 × 19? Ó
Estudante 2: 76.
Estudante 1: Então! 76 né? Então 76 aí 82 que é o que ele cobrou no total, aí tirando seis aí deu... tirando 76 deu 6 reais entendeu?
Estudante 2: Hum!
Estudante 1: Agora nós acabamos. Vamos conferir pra ver se esta certo aqui (alguns segundos depois) ta certo! Eu acho que é essa conta mesmo. Só esperar a próxima folha.
Estudante 2: Eu coloquei vírgula dois zeros... Aqui.
Estudante 1: Hum!
Pesquisadora: Olá meninos. Como vocês fizeram essa?
Estudante 1: Aqui ta falando que o motorista cobra R$ 4,00 a cada quilômetro rodado né? Aí nós fizemos 19 quilômetros, que foi o que a Alice fez, aí 19 × 4 deu 76. Aí nós peamos o valor total que foi 82 menos 76 que deu 6 reais de valor adicional.
Pesquisadora: Hum. Entendi. O 82 você pegou de onde?
Estudante 1: 82?
Pesquisadora: Isso.
Estudante 1: Daqui (mostrando no enunciado).
Pesquisadora: Ah ta.
Estudante 1: Que já ta escrito daí.
Pesquisadora: Você consegue me dizer por que você pensou “ah eu vou pegar esse valor menos esse”? (A pesquisadora aponta para os esquemas dos estudantes na folha).
Estudante 1: Porque daí ia dar o valor adicional certo. Porque daí se ele da o valor adicional e esse já foi o total e deu só 76 reais então significa que o que sobrou ia ser o valor adicional.
Pesquisadora: Hum. Entendi. Ok então, vou recolher essas folhas e entregar a próxima!
O estudante 1 lê o enunciado do problema 3.
Estudante 1: Calma! Então nós vamos fazer aqui... Cada 120... A cada celular que ele vende nós vamos fazer 7 × 120 né? Vamos fazer aqui, 7 × 120.
Estudante 2: 2140.

Estudante 1: Vamos ver aqui. 7×0 dá zero, 7×2 é 14, fica o 4 e sobe 1 em cima do 1, 7×1 é 7 com mais 1 que tinha subido 8... 840! Então agora nós vamos ver aqui... Então nós vamos colocar aqui o 2140 menos o 840 né? Que foi o do celular, que foi extra. Vamos ver aqui então o salário fixo dele... $2140 - 840$, zero menos zero é zero, $4 - 4$ é zero, 1 tira 8 não dá, vai ter que emprestar do vizinho, o 2 virou só 1, o 1 virou 11, $11 - 8$... 8... 9, 10, 11... 3! 1 menos nada é 1.
Estudante 2: Deu 1300 reais.
Estudante 1: 1300 reais. O salário fixo dele é de R$ 1300,00.
Estudante 2: O salário fixo de Roberto é de R$ 1300,00.
Estudante 1: Professora, acabamos aqui!
Pesquisadora: Ok, já estou indo... O que vocês fizeram nessa?
Estudante 1: Olha essa daqui ta falando aqui que o salário fixo dele tem um adicional para cada celular que ele vende. Aí aqui falou que no mês de outubro... é outubro? É no mês de outubro ele ganhou 1400 reais (estudante leu 1400 ao invés de 2140) aí ele vendeu 7 celulares no mês, aí eu fiz 7×120 que é o valor do celular né pra saber quantos valor deu todos o celular que deu 840 de adicional. Aí eu coloquei 840 menos o valor que ele ganhou pra saber o tanto que é o salário fixo dele. O salário fixo dele é de 1300 reais.
Pesquisadora: Entendi! E aqui por que vocês resolveram fazer de menos? Aqui você fez de vezes. Aqui você fez de menos... Esse 2140 você tirou... De onde?
Estudante 1: De 840 que fiz 7 vezes o tanto de celular que ia dar. Aí como deu tantos celulares, não era o salário dele era só o adicional. Ai eu coloquei o salário todo, o total com o adicional menos o adicional aí deu 1300. Que é o salário dele normal.
Pesquisadora: Hum. Entendi.
(A pesquisadora recolhe as folhas e entrega o último problema).
Estudante 1: Lê! Lê alto!
Estudante 2: Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês. a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seus gasto total no mês?
Estudante 1: Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês. a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seus gasto total no mês? Ó essa aqui ó... Para cada... é R$ 150,00 de imposto por mês. Ela já tem o R$ 150,00 de imposto por mês, aí coloca o imposto por mês né que ela já tem, mais os... 10×3, que nós vamos fazer a conta pra vê quantos que dá, aí nós vamos somar e vai ver o resultado. Coloca aí 3×10. Zero vezes.... 3×0 é zero, 3×1 é 3. Deu 30! Agora nós vamos colocar $150 + 30$, $0 + 0$ é zero, $5 + 3$ é 8, 1 mais nada é 1... 180 reais ela gasta por mês se ela produzir 10 sanduíches. Coloca aí... Seu gasto total será de180 reais.
Estudante 1: Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês. Quantidades de sanduíches produzidos por mês. Gasto total no mês por Márcia. 20 reais. Aqui nós vamos fazer aqui embaixo as conta daí. 20 reais, quer dizer, 20 sanduíches...Vai dar 20×3. Coloca aí 3×20.
Estudante 2: Aonde? Lá na "c"?
Estudante 1: É... Não, na "b". Ó... Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês. Aí aqui ta falando que tem 20 sanduíches e é R$ 3,00 a cada sanduíche. Então no mês ela fez 20, então vamos fazer 3×20 né? 3×0 é 0, 3×2 é 6... 60 reais! Vou colocar aqui R$ 60,00 ela gastou. Coloca aqui 25×3 igual a 3×5 é igual a 15 fica o 5 sobe 1 em cima do 2, 3×2 é igual a 6, com 1 é 7... 75 reais! Coloca lá R$ 75,00. Agora 30 sanduíches... 3×30, 3×0 é zero, 3×3 é 9... 90 reais. Coloca lá R$ 90,00. E 35 vamos fazer a conta. 35×3 é igual a, 3×5 é 15 coloca 5 e sobe 1 em cima do 3, 3×3 é 9 com 1, 10... 105 reais. R$ 105,00. E 40, vamos fazer a conta aqui. 40×3, 3×0 é zero, 3×4 é... 12... 120 reais. Coloca lá R$ 120,00. Pronto! Agora nós vamos para a letra "c".
Estudante 1: Vamos fazer a "c". Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês? 3×90 né? 3×90, 3×0 é zero, 3×9 é...
Estudante 2: 27.
Estudante 1: 9 com 9 é 18, 18+9, 27. Então o gasto total será...
Estudante2: 270 reais.
Estudante 1: O gasto total de Márcia será de R$ 270,00.
Estudante 1: Como você realizou os cálculos nas questões anteriores? Multiplicando... Fazendo a conta de multiplicação... e adição. Ó... Nós tem que fazer o 270 mais 150 do imposto! O gasto total dela do mês. Nossa... Professora vem aqui fazendo favor... Professora!
Pesquisadora: Oi.
Estudante 1: Vêm cá... Professora aqui nós tem que somar o 150 do imposto?
Pesquisadora: Então... Esse daqui... O que você acha? Vocês acham que deve somar ou não deve?

Estudante 1: Deve! Porque aqui ta falando o gasto total do mês, aí o imposto tem todo mês né? Então o gasto total no mês vai ser mais o imposto né?
Pesquisadora: Então... Vocês acham que deve ser feito dessa forma? Façam como vocês acham que deve ser.
Estudante 1: Hurum. Vou já arrumar aqui certinho.
Estudante 1: $60 + 150$ é 210... 210. $75 + 150$ é... Calma lá, 175 com mais é... Igual a 225. Aí aqui...
Estudante2: Deu 210 a primeira?
Estudante 2: 225 a segunda.
Estudante 2: Duzentos e quantos? A segunda?
Estudante 1: 225... 90 reais mais 150... 240. A terceira é 240. E a quarta, 105 com mais 150 é... 255. E a última é 120... 270!
Estudante 2: Agora nós vamos ter que fazer a "d".
Estudante 1: Aqui... É... $270 + 150$ que é o imposto... 420! 420.
Estudante 1: Como você realizou os cálculos nas questões anteriores? Fazendo a conta de adição e multiplicação.
Estudante 2: Adição e?
Estudante 1: Multiplicação.
Estudante 1: E aqui... Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir? Hum... Multiplicando três reais de gastos com ingredientes... Coloca aqui! Multiplicando os três reais de gasto de ingredientes... de gasto de ingredientes... Multiplicando os três reais de gastos de ingredientes... Multiplicando os três reais de gastos de ingredientes vezes a quantidade de sanduíches.
Estudante 2: Vezes...
Estudante 1: Vezes a quantidade de sanduíches... Vezes a quantidade de sanduíches mais o valor do imposto.
Estudante 2: Sanduíches mais o valor do imposto?
Estudante 1: É.
Estudante 2: Prontinho!
Estudante 1: Professora, acabamos aqui.
Pesquisadora: Acabou? Já eu vou aí... Vamos lá.
Estudante 1: Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ $3,00$ de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ $150,00$ de imposto por mês. a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seus gasto total no mês? Eu fiz a conta de 3×10 que deu 30 e eu somei mais o valor do imposto que todo mês tem o valor do imposto aí deu 180 reais. Aí aqui ta falando para preencher a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês. Aí aqui ta as quantias, aí eu fiz três vezes a quantia mais 150 reais do imposto.
Pesquisadora: Aqui deu 210?
Estudante 1: Deu.
Pesquisadora: Ah ta! Entendi, então você fez 20×3 e somou?
Estudante 1: Aí eu só somei de cabeça.
Pesquisadora: Ah! Você fez de cabeça.
Estudante 1: Haram, somatório.
Pesquisadora: Entendi. E assim você fez nas outras, até chegar aqui embaixo?
Estudante 1: Haram.
Estudante 1: E se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês? Eu fiz 3×90 que deu 270 mais 150 que já é o gasto do imposto que tem todo mês aí deu 420.
Pesquisadora: Entendi. Então o gasto total no mês de Márcia será de?
Estudante 1: Duzentos e... Não, 420 reais.
Pesquisadora: Ta.
Estudante 1: Como você realizou os cálculos nas questões anteriores? Eu coloquei fazendo a conta de adição e multiplicação.
Pesquisadora: Ah ta, que foram as operações que vocês fizeram. E na letrinha "e"?
Estudante 1: Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir? Multiplicando os três reais de gastos de ingredientes vezes a quantia de sanduíches mais o valor do imposto.
Pesquisadora: Hum... Então pra qualquer quantidade que ela quiser fazer é só multiplicar pelo valor de cada um depois...
Estudante 1: Depois somar com 150.
Pesquisadora: Pra qualquer um?
Estudante 1: Haram.
Fim de gravação.


1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

$7 \times 4 = 28$ $\quad 28 + 5 = 33$

O gasto total de pedro foi 33 reais

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

$12 \times 4 = 48$ $\quad 48 + 5 = 53$

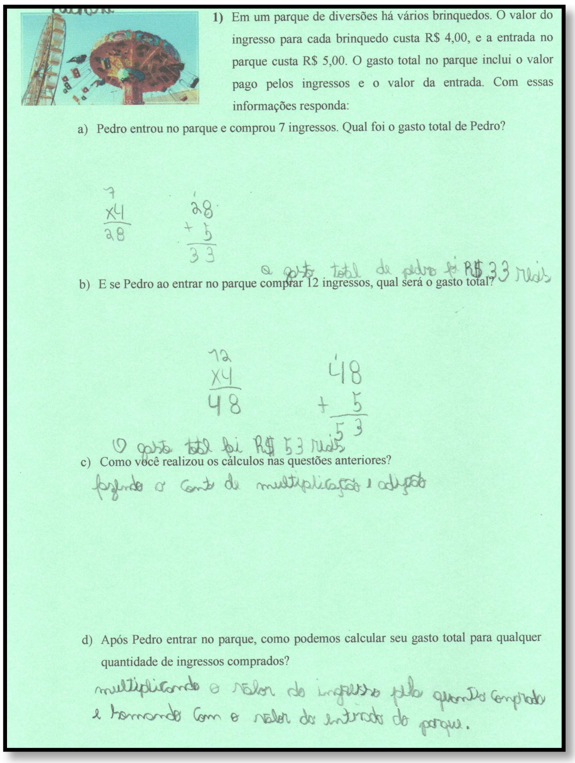
O gasto total foi de 53 reais

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

fazendo a conta de multiplicação e adição

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

multiplicando o valor do ingresso pela quantia comprada e somando com o valor da entrada do parque


1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

$7 \times 4 = 28$ $\quad 28 + 5 = 33$

O gasto total de pedro foi R$ 33 reais

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

$12 \times 4 = 48$ $\quad 48 + 5 = 53$

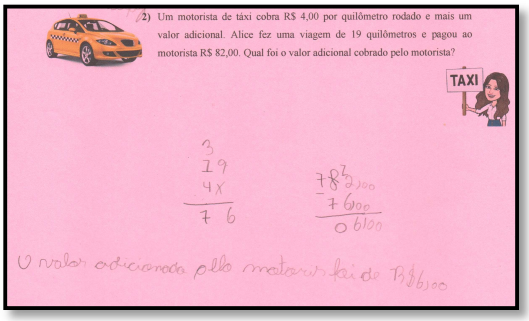
O gasto total foi R$ 53 reais

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

fazendo a conta de multiplicação e adição

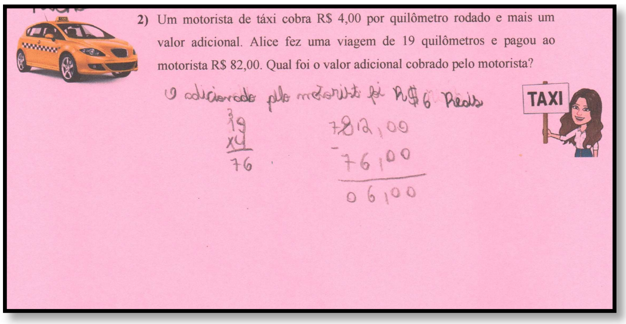
d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

multiplicando o valor do ingresso pela quantidade comprada e somando com o valor da entrada do parque.


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

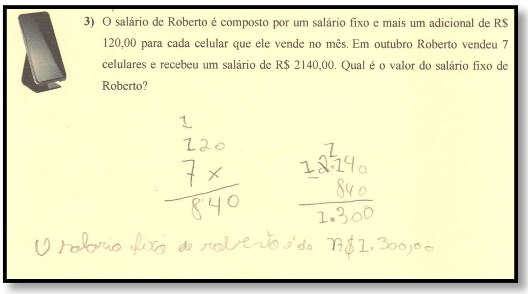
$19 \times 4 = 76$ $\quad 82,00 - 76,00 = 06,00$

O valor adicionado pelo motorista foi de R$ 6,00


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

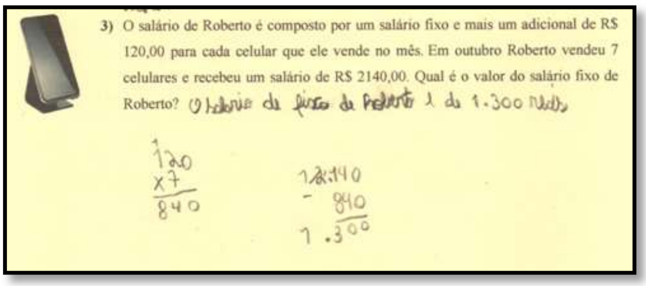
O adicionado pelo motorista foi R$ 6 Reais

$19 \times 4 = 76$ $\quad 82,00 - 76,00 = 06,00$

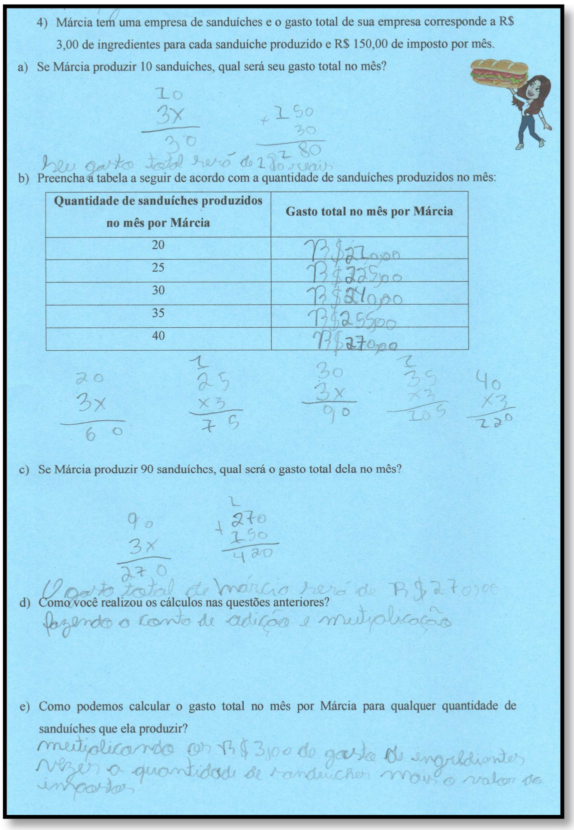

3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?

$120 \times 7 = 840$ $\quad 2140 - 840 = 1.300$

O salário fixo de roberto é de R$ 1.300,00


3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto? O salário do fixo de Roberto é de 1.300 reais

$120 \times 7 = 840$ $\quad 2140 - 840 = 1.300$



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

10 × 3 = 30; 150 + 30 = 180

Seu gasto total será de 180 reais

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$ 210,00
25	R$ 225,00
30	R$ 240,00
35	R$ 255,00
40	R$ 270,00

20 × 3 = 60; 25 × 3 = 75; 30 × 3 = 90; 35 × 3 = 105; 40 × 3 = 120

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

90 × 3 = 270; 270 + 150 = 420

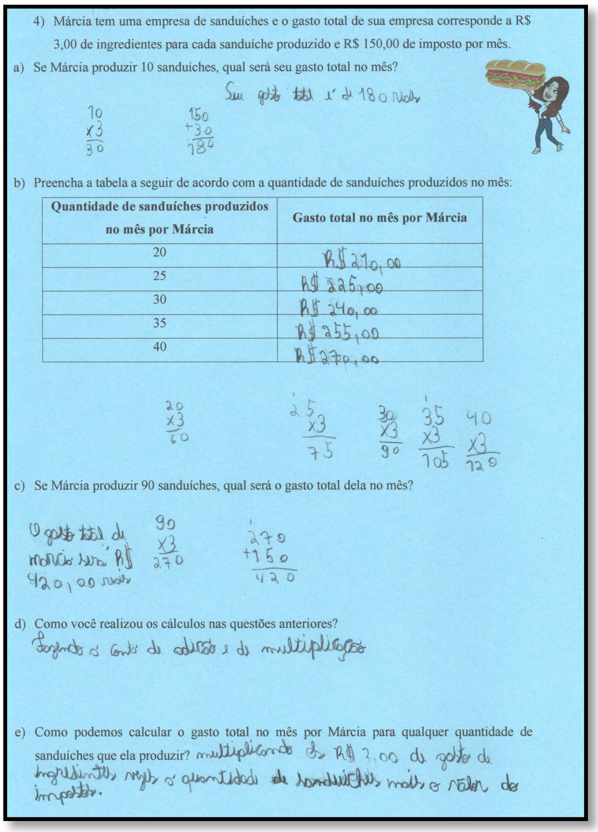
O gasto total de Márcia será de R$ 270,00

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

fazendo o conto de adição e multiplicação

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

multiplicando os R$ 3,00 de gasto de ingredientes vezes a quantidade de sanduiches mais o valor do imposto



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

Seu gasto total é de 180 reais

10 × 3 = 30; 150 + 30 = 180

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$ 210,00
25	R$ 225,00
30	R$ 240,00
35	R$ 255,00
40	R$ 270,00

20 × 3 = 60; 25 × 3 = 75; 30 × 3 = 90; 35 × 3 = 105; 40 × 3 = 120

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

O gasto total de Márcia será R$ 420,00 reais

90 × 3 = 270; 270 + 150 = 420

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

fazendo os contos de adição e de multiplicação

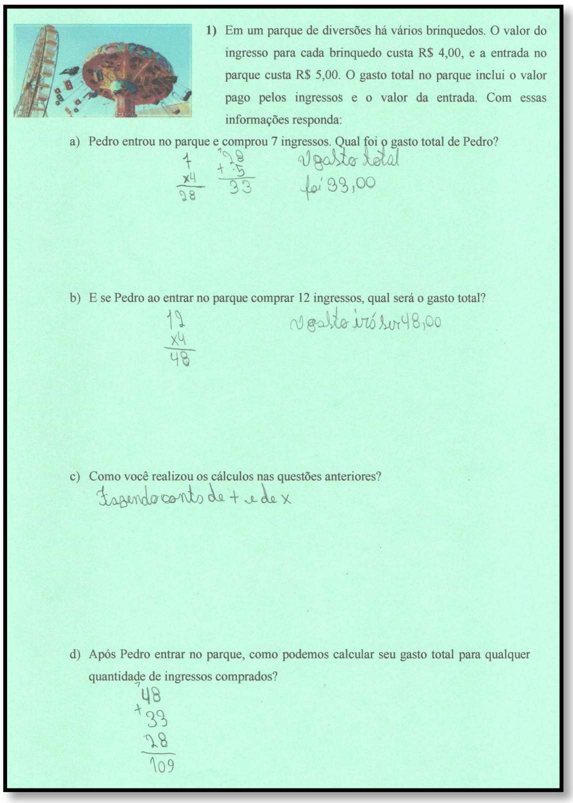
e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir? multiplicando os R$ 3,00 de gasto de ingredientes vezes a quantidade de sanduíches mais o valor do imposto.

APÊNDICE V – TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS E PROTOCOLOS ESCRITOS – GRUPO 2

O estudante 3 e o estudante 4 lêem o enunciado de forma individual e de forma silenciosa.
Estudante 3: Professora pode se ajudar o grupo?
Pesquisadora: Claro! É pra conversar entre vocês para ver como que vão resolver.
Estudante 3: Ó você vai ler, coloca 33. Qual foi o gasto total de Pedro? O gasto total de Pedro foi $28 + 5$. Agora você coloca... O gasto total foi 33. Eu acho que esta certo esta conta. Eu acabei já a primeira.
Estudante 3: Se Pedro ao entrar no parque... (o estudante termina de ler o enunciado em silêncio).
Nesse momento os estudantes resolvem de forma individual, sem diálogos entre eles.
Estudante 3: Como você realizou...? Pensando! Ueh, pensando não é? Fazendo a conta de mais e de menos. Coloca... fazendo a conta de mais e de menos.
Estudante 3: Ó, assim ó, após Pedro entrar no parque...
Estudante 4: Nossa senhora!
Estudante 3: É, $48 + 33 + 28$. Eu acho que tem que pegar o resultado de alguma. 48... Eu vou colocar o 28.
Estudante 4: É pra colocar tudo? Somar todos os resultados?
Estudante 3: É, então calcula.
Estudante 3: Professora acabou!
Pesquisadora: Então ta! O que vocês fizeram na questão 1, letra "a"?
Estudante 3: É... Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos, qual foi o gasto total de Pedro? Aqui colocamos 7×4, que deu 28.
Pesquisadora: Por que vocês colocaram 7×4?
Estudante 3: Porque se cada ingresso é 4, então 7 seria 7×4.
Pesquisadora: Hum, entendi!
Estudante 3: E daí depois pegamos o resultado de 7×4 e colocamos mais 5.
Pesquisadora: Por que vocês somaram com 5?
Estudante 3: Porque a entrada no parque custa 5 reais.
Pesquisadora: Hum! Ok. E a resposta final de vocês foi?
Estudante 3: O gasto total foi de 33 reais.
Pesquisadora: Ok, e na letra "b", como vocês pensaram?
Estudante 4: (lê o enunciado da questão "b") Eu fiz 12×4 que deu 48.
Pesquisadora: Então o gasto total dele seria de 48 reais?
Estudante 4: Haram!
Pesquisadora: Ok!
O estudante 3 lê o enunciado da questão "c" e, na sequência, responde:
Estudante 3: Fazendo a conta de mais e de vezes.
Pesquisadora: Ok. E aqui? (a pesquisadora aponta para a questão "d")
O estudante 3 lê o enunciado e responde:
Estudante 3: Fizemos 48, que foi o que ele pegou... é se ele comprasse 12 ingressos, essa daqui foi $28 + 5$ e... É o 28 no final que foi o resultado de 7×4. O total deu 109.
Pesquisadora: Ah, entendi. Vocês pegaram o resultado de 7×4 e somaram com o resultado de $28 + 5$, e somaram com o resultado dessa de 12×4. Então ok meninos! Podem esperar um pouquinho? Ou já querem fazer a outra?
Estudante 3: Queremos fazer a outra.
Pesquisadora: Ah, então ta.
Estudante 3: É fácil! Achei que fosse mais difícil.
O estudante 3 começa ler o enunciado do próximo problema (problema 2).
Estudante 4: 19×4.
Estudante 3: É 19×4. No caso, 4×9 é?... 36! 4×1 é 4, sete... 76! Agora fazemos 82 é... menos 76, que daí... zero, zero, daí pega 8 não dá... 12 menos 6 é 6. Então ele aumentou 6 reais. O valor adicional foi R$ 6,00. Professora... Acabamos.
Estudante 4: Ta mó fácil, achei que ia ser mais difícil.
Estudante 3: Haram, eu também achei. Ta bem fácil.
Pesquisadora: Pronto meninos, como vocês fizeram?
O estudante 3 lê o enunciado do problema 2.
Pesquisadora: Certo.

Estudante 3: Primeiro a gente fez 19×4 que foi 19... ele cobra 4 reais a cada viagem e aqui foi 19 quilômetros.
Pesquisadora: Ah entendi.
Estudante 3: Ai deu 76. Daí a gente pegou o 82 e... Menos 76 que foi o que deu... Ele adicionou mais 6 reais, o valor adicional foi de 6.
Pesquisadora: Por que vocês fizeram essa continha de menos?
Estudante 3: Para saber o tanto que ele adicionou.
Pesquisadora: Ah pra saber o adicional. Então vocês pegaram o 72 de onde?
Estudante 3: É... Daqui (apontando para o enunciado).
Pesquisadora: Ah entendi, do problema. Beleza gente, vou lá pegar a outra folha pra vocês.
O estudante 3 inicia a leitura do enunciado do problema 3.
Estudante 4: 12×7.
Estudante 3: Calma aí. Calma! (o estudante 3 lê novamente o enunciado). Ta então deve ser 120. Só não faz muito forte porque se tiver errado depois apaga. 120×7. Zero vezes sete é zero, zero vezes sete é zero, zero vezes sete, zero, 7×2 é 14, sobe 1, sete vezes 1 com mais 1, 8... 840! Agora a gente tem que pegar celulares...
Estudante 4: Aqui é menos ou mais?
Estudante 3: Calma aí. (o estudante 3 lê o enunciado do problema 3 novamente)... Eu não sei se esta certo essa conta aqui... Eu acho que deve ser 2140... Qual é o valor do salário fixo? Não é 2140... Eu acho que pode ser 2140, menos... acho que era mais... Ah não, pode ser menos, é.
Estudante 4: É.
Estudante 3: Deixa eu fazer essas vírgulas.
Estudante 4: Eu acho que é mais
O estudante 3 faz os cálculos de $2140 - 3$.
Estudante 3: Deu 1300.
Estudante 4: Professora acabou.
Estudante 3; Não, ainda falta o outro!
Estudante 4: Peraí, peraí, ainda não acabou não.
Estudante 3: O salário fixo é... Não, o valor do salário fixo é de 1300... 1300! Pronto! acabamos.
Estudante 4: Professora, acabamos.
Pesquisadora: Pronto, podem falar como vocês fizeram aqui.
O estudante 3 lê o enunciado do problema 3.
Estudante 3: Primeiro a gente pegou 120 para cada celular que ele vende com mais o 7, que ele vendeu em outubro. Daí a gente fez 120×7 que deu 840. Daí a gente pegou o 2140 menos 840 que deu 1300 reais.
Pesquisadora: Ta. Me expliquem por que vocês pegaram esses dois resultados? O $2140 - 840$? Vocês conseguem me explicar?
Estudante 3: Bom... É porque como a gente já tinha feito o 120×7, a gente resolveu pegar esse daqui menos 840 que dá o resultado do salário fixo de 1300.
Pesquisadora: Ta, vocês falam que o salário fixo é de 1300 reais, certo?
Estudante 3: Huran.
Pesquisadora: Então ta. Primeiro vocês fizeram a conta de vezes e depois subtraíram. E se vocês fizessem de mais, faria sentido?
Estudante 3: Não.
Estudante 4: Não. Pra mim não.
Pesquisadora. Então ta meninos, vou recolher essas folhas e entregar a próxima.
O estudante 3 lê o enunciado do problema 4 e a questão "a".
Estudante 3: 10×3.
Estudante 4: É tem que fazer 10×3 e depois somar com 150?
Estudante 3: Acho que é. Calma aí... 3×1... 30... $150 + 30$. $5 + 3$, 8... 180! Eu acho que nós erramos.
Estudante 4: Não sei
Estudante 3: Porque ó... Eu acho que tinha que fazer... Eu não acho que nós tinha que fazer $150 + 30$. Calma! (estudante 3 lê novamente o enunciado). Eu acho que é assim mesmo.
O estudante 3 começa a ler a questão "b" do problema 4.
Estudante 3: Nos temos que fazer 20×3... 60! O gasto total de Márcia... 20 dá 60, coloca lá. 25×3... 75. 30×3... 90. 35×3... 105. 40×3... 120.
O estudante 3 lê o enunciado da questão "c" do problema 4.
Estudante 3: 90×3, três vezes zero, zero, três vezes nove...
Estudante 4: É 90×30.
Estudante 3: Mas cada valor é 3! 9×3 é 27, então é 270.
Estudante 4: Quantos?
Estudante 3: 270. Qual será o gasto total dela no mês? O gasto total será 270.

O estudante 3 lê a questão “d” do problema 4.
Estudante 3: Conta de vezes e de mais. Eu coloco assim, conta de vezes com um “×” e de mais com “+”.
O estudante 3 lê o enunciado da questão “e” do problema 4.
Estudante 3: Então a gente tem que pegar 180 mais... Não... $270 + 180 + 30$.
Estudante 4: Colocar o que?
Estudante 3: $270 + 180 + 30$... 480! Pronto acabamos... Professora, acabamos. Nossa, aqui não devemos escrever assim, temos que colocar realizando contas de mais e de vezes. Pronto.
Pesquisadora: Vamos lá, como vocês fizeram?
Estudante 3: (o estudante 3 lê o enunciado). Bom, a gente pegou 10×3 que dava 30, porque cada sanduíche custava 3 reais.
Pesquisadora: Haram.
Estudante 3: Depois o resultado desse a gente pegou 150, que foi de impostos, mais 30, que foi o total que deu dos sanduíches que deu 180.
Pesquisadora: Entendi. E aqui vocês precisavam preencher a tabelinha.
Estudante 3: Haram.
Pesquisadora: Como vocês fizeram para preencher?
Estudante 3: É... Colocando todas essas contas aqui... 20×3... os reais para cada sanduíche... pegamos 20×3 que deu 60, depois 25×3 que deu 75, depois 30×3 que deu 90... É 35×3, 105 que colocamos na quarta e 40×3 na última, e todos esses valos é o gasto total no mês por Márcia.
Pesquisadora: Aqui o que vocês entenderam dessa coluna? O que indica o que? Esse 20, 25, 30...
Estudante 3: É... O total de sanduíches.
Pesquisadora: Beleza. E esse valor aqui? O que esta pedindo nessa coluna?
Estudante 4: O gasto total no mês por Márcia.
Estudante 3: É... O gasto total no mês.
Pesquisadora: Ah ta.
O estudante 3 lê o enunciado da questão “c” do problema 4.
Estudante 3: A gente pegou 90×3 que deu 270. O gasto total será de 270 reais.
Pesquisadora: Hum, entendi. E na letra “d”?
O estudante 3 lê o enunciado da questão.
Estudante 3: Realizando conta de mais e de vezes.
O estudante 3 lê o enunciado da letra “d” do problema 4.
Estudante 3: A gente pegou o resultado de 270 que deu a “c” por 90 sanduíches vezes 3, depois colocamos 180 que deu na primeira e 30 que deu na primeira conta que a gente fez... Que deu 480.
Pesquisadora: Ah, entendi. Aí vocês somaram.
Estudante 3: Hurum.
Pesquisadora: Beleza meninos.
Fim de gravação.



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

7 x4 = 28
28 + 5 = 33
O gasto total foi 33,00

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

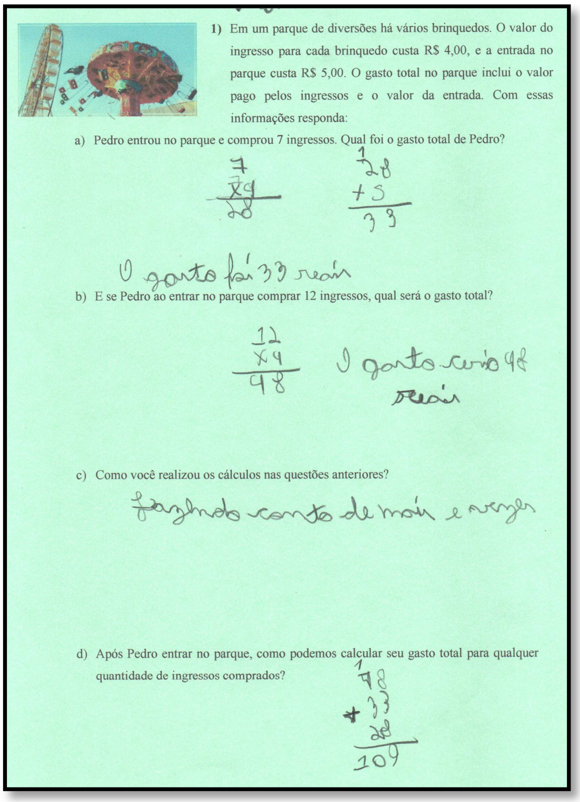
12 x4 = 48
O gasto irá ser 48,00

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Fazendo conta de + e de x

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

48 + 33 + 28 = 109



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

7 x4 = 28
28 + 5 = 33
O gasto foi 33 reais

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

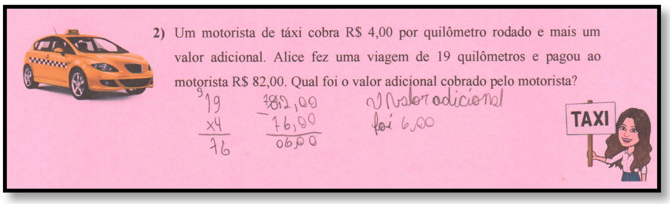
12 x4 = 48
O gasto será 48 reais

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Fazendo conta de mais e vezes

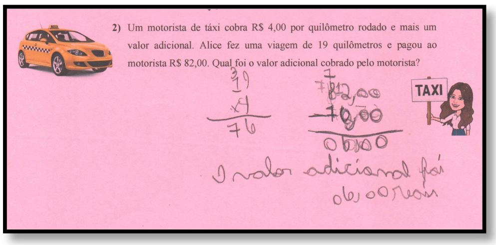
d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

48 + 33 + 28 = 109



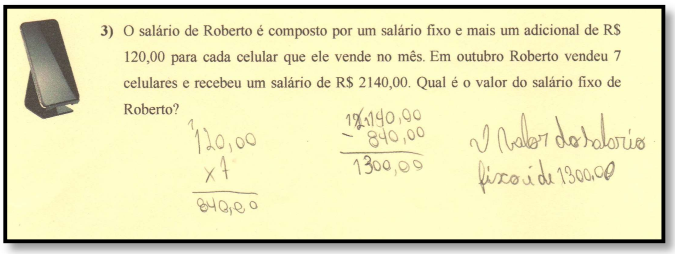
2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

19 x4 = 76
82,00 − 76,00 = 06,00
O valor adicional foi 6,00



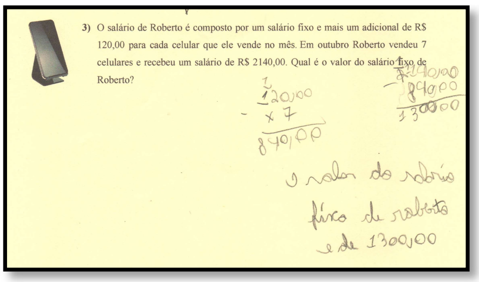
2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

19 x4 = 76
82,00 − 76,00 = 06,00
O valor adicional foi 06,00 reais



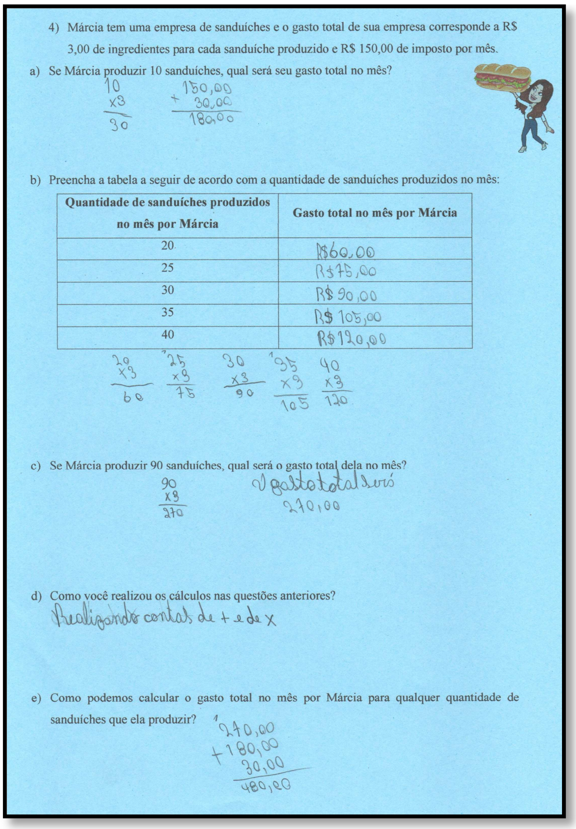
3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?

120,00 x7 = 840,00
2140,00 − 840,00 = 1300,00
O valor do salário fixo é de 1300,00



3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?

120,00 x 7 = 840,00
2140,00 − 840,00 = 1300,00
O valor do salário fixo de Roberto é de 1300,00



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

10 x3 = 30   150,00 + 30,00 = 180,00

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$60,00
25	R$75,00
30	R$ 90,00
35	R$ 105,00
40	R$120,00

20 x3 = 60   25 x3 = 75   30 x3 = 90   35 x3 = 105   40 x3 = 120

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

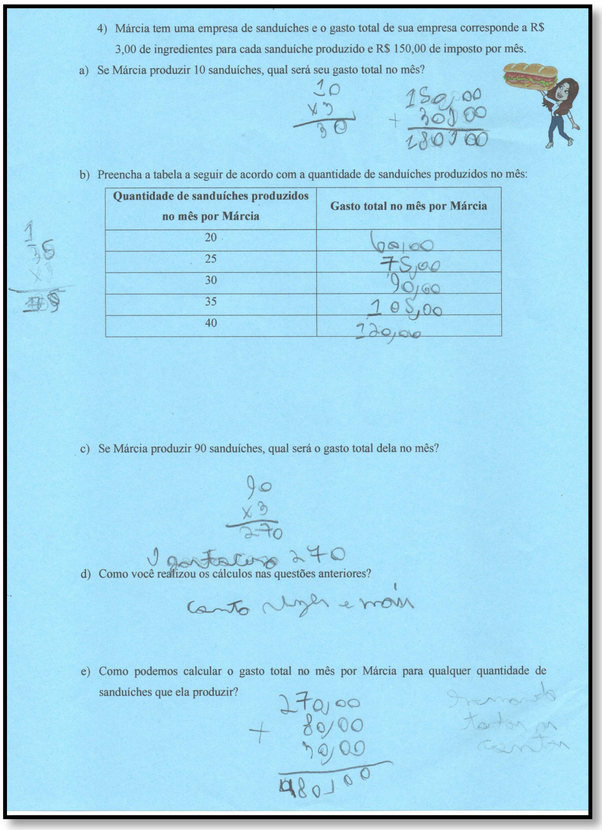
90 x3 = 270   O gasto total será 270,00

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Realizando contas de + e de x

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

270,00 + 180,00 + 30,00 = 480,00



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

10 x3 = 30   150,00 + 30,00 = 180,00

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	60,00
25	75,00
30	90,00
35	105,00
40	120,00

35 x3 = 105

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

90 x3 = 270

O gasto é 270

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Conta vezes e mais

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

270,00 + 180,00 + 30,00 = 480,00

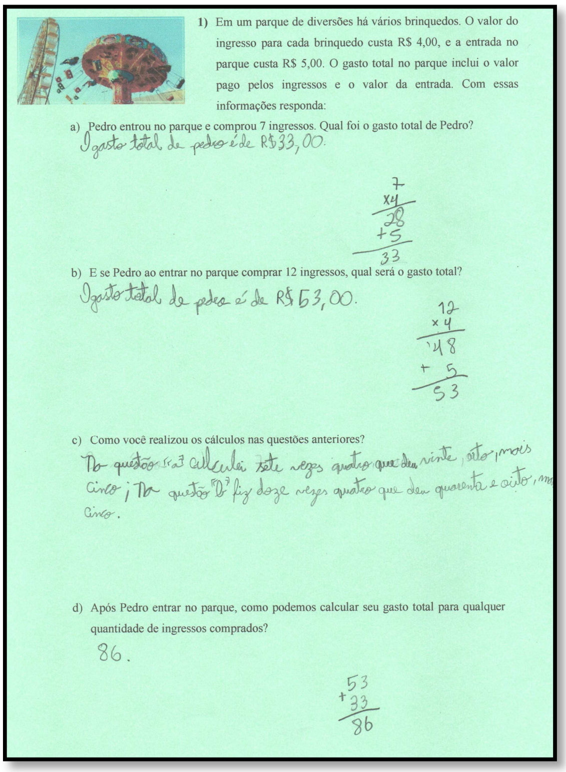
Somando todos os cálculos

APÊNDICE VI – TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS E PROTOCOLOS ESCRITOS – GRUPO 3

O estudante 5 começa ler o enunciado do primeiro problema.
Estudante 5: Calma aí.
Estudante 6: Lê de novo! $4 + 5$?
Estudante 5: 9!
O estudante 5 lê o enunciado três vezes.
Estudante 6: 9 sete vezes.
Estudante 5: Ham?
Estudante 6: 9×7?
Estudante 5: É... 63! Calma aí (o estudante 5 lê novamente o enunciado).
Estudante 5: Ah, entendi, entendi! Então ele gastou... Cada ingresso custa 4 reais, ele comprou 7 ingressos, então ele gastou 4×7. Quanto dá?
Estudante 6: 28. E agora?
Estudante 5: Calma aí.
Estudante 6: $28 + 5$?
Estudante 5: 33... Qual foi o gasto total de Pedro? O gasto total de Pedro é de 33 reais.
O estudante 5 lê o enunciado da questão "b" do problema 1.
Estudante 5: É... 12×4... 48. Qual será o gasto? $48 + 5$... 53! O gasto total de Pedro é de R\$ 53,00. Valos lá (o estudante 5 lê o enunciado da questão "c").
Estudante 5: Coloca lá, na número "a"... Na questão "a" calculei 7×4 que deu 28, mais 5. Na questão "b"... Coloca aí, na questão "b".
Estudante 6: "b"?
Estudante 5: É... Na questão "b" fiz 12×4 que deu 48, mais 5. Pronto, vamos aqui na última.
O estudante 5 lê o enunciado da questão "d" do problema 1.
Estudante 5: Aí nós vamos fazer assim... Nós vamos fazer $53 + 33$.
Estudante 6: Mais quantos?
Estudante 5: 33.
Estudante 6: Vai dar 86.
Estudante 5: É, vai dar 86... Professora, acabamos.
Pesquisadora: Vamos lá meninos, podem me explicar como vocês fizeram.
Estudante 5: Aqui nós vimos que é 7 ingressos, vimos que cada brinquedo custa 4, então 7×4 que dá 28 mais o 5 da entrada que deu 33.
Pesquisadora: Entendi.
Estudante 5: A outra nós fizemos 12 ingressos, aí colocamos 12×4, que é do brinquedo, e a entrada do parque que é 5.
Pesquisadora: Haram. Entendi. Vocês fizeram o mesmo cálculo da questão anterior, só mudaram o 12.
Estudante 5: Sim.
Pesquisadora: E na letra "c"?
Estudante 5: Na questão "a" calculei 7×4 que deu 28, mais 5. Na questão "b" fiz 12×4 que deu 48, mais 5.
Pesquisadora: Ah, entendi? E na questão "d"?
Estudante 5: Aí eu não sei professora se é $53 + 33$, não sei se é isso que responde ali. Se é só os ingressos.
Pesquisadora: Ta. O que vocês entenderam nessa pergunta?
Estudante 5: Não entendi muito bem.
Pesquisadora: Ah sim. Mas pelos cálculos que vocês apresentaram, para calcular qualquer quantidade de ingressos, basta somar os resultados que vocês obtiveram nas questões "a" e "b"?
Estudante 5: Isso.
Pesquisadora: Ah entendi. Beleza gente. Vou recolher estas folhas e entregar a próxima.
O estudante 5 lê o enunciado do problema 2.
Estudante 5: Primeiro nós vamos fazer... Se é 4 reais que o motorista cobra para cada quilômetro rodado, vamos colocar 19×4. Vai dar...
Estudante 6: 9×4?
Estudante 5: Calma aí... $9 + 9$, 18... $28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37$... 37! 4×1... 4... 5, 6 e 7... 77!
Estudante 6: $82 - 77$?
Estudante 5: Calma aí... $18 + 18$... Seis, 36. É seis aqui! É 76.
Estudante 6: 76?

Estudante 5: Ai coloca 76... Não $82 - 76$.
Estudante 6: Então... Corta o 8 fica 7... Zero. Seis reais!
Estudante 5: 6 reais... Qual foi o valor total cobrado pelo motorista? Foi de R$ 6,00. Professora, acabamos!
Pesquisadora: Vamos lá meninos.
Estudante 5: Nós fez assim... Se o motorista de taxi cobra 4 reais, nós pegamos os 19 quilômetros vezes 4 que deu 76, aí nós pegamos o 82 daqui menos 76 que deu 6 reais.
Pesquisadora: Por que vocês pegaram o 82?
Estudante 5: Porque ta aqui ó! (apontando para o enunciado).
Pesquisadora: E por que vocês fizeram a continha de menos?
Estudante 5: Porque no total ela pagou 82 reais. Aí fizemos menos 76 que deu 6.
Pesquisadora: Entendi!
A pesquisadora recolhe as folhas e entrega as folhas do próximo problema.
O estudante 5 lê o enunciado do problema 3.
Estudante 6: 120 dividido por 7?
Estudante 5: Eu acho que é 2140 dividido por 7. Porque ele vendeu 7 celulares que deu 2140.
Estudante 6: Não.
Estudante 5: deixa eu fazer aqui primeiro. 2140 zero zero dividido por 7.
O estudante 5 tenta fazer a divisão de 2140 por 7, porém ele não consegue. Ele lê novamente o enunciado e na sequência menciona:
Estudante 6: É de vezes.
Estudante 5: Valos lá então,120×7, 7×0 é zero, 2×7... 4... 24 mil... Ah eu não sei não. Professora! Professora! Nós não vamos conseguir fazer. Não dá professora, não sei se é de dividir, de vezes ou alguma coisa.
Pesquisadora: Ta... Primeiro vamos ver aqui. Vocês leram o problema e fizeram 120×7 por que?
Estudante 5: Não sei... Porque ele falou vezes 7. Ou pode ser dividido também...
Estudante 6: 2140 dividido por 7.
Estudante 5: Aí eu não sei se aqui é menos 21 mil.
Pesquisadora: Vocês querem ler mais uma vez pra vê se conseguem? Se não sair, não tem problema. Podem ler mais uma vez e depois eu venho aqui ouvir de vocês.
O estudante 5 lê novamente o enunciado do problema 3.
Estudante 5: Mais um adicional!
Estudante 6: Hum entendi.
Estudante 5: mais um adicional!
Houve uma pausa, o estudante 6 tenta fazer uns cálculos.
Estudante 5: Não é 120 mil aqui.
Estudante 6: Calma.
Os estudantes tentam realizar uns cálculos, porém não conseguem. Eles lêem novamente o enunciado e por não conseguirem fazer acabam desistindo desse problema.
Estudante 5: Professora não deu.
Pesquisadora: Aqui vocês leram novamente?
Estudante 5: Sim! Duas vezes.
Pesquisadora: E mesmo assim vocês não entenderam?
Estudante 5: Não.
Pesquisadora: Então ta. Não tem problema. Podem colocar o nome na folha que eu vou recolher.
Estudante 5: Aqui vamos lá (o estudante 5 lê o enunciado do problema 4). Vamos lá, eu acho que é 3×10 (houve uma pausa e na sequência o estudante 5 lê o enunciado da questão “b”).
Estudante 5: $20, 25, 30, 35$ e 40.
O estudante 5 lê o enunciado da questão “c”.
Estudante 5: Eu não sei se cada sanduíche é 153 reais.
Estudante 6: Calma! Calma!
Estudante 5: Ah entendi! Aqui é 3×20. Cada sanduíche é 3 reais. 3×20 é 60. 3×25? 75. 30 vezes o 3... 90. 35×3... 105. 3×40? 80... 90... 100... 120! Agora 3×90?... 270. O gasto total é de 270. Professora! O professora! Eu não sei se cada sanduíche é 3 reais ou 150 ou 153!
Estudante 6: É 3 reais cada sanduíche!
Estudante 5: A “d” como você realizou os cálculos nas questões anteriores? Eu 10×3 que deu 30 sanduíches.
O estudante 5 lê o enunciado da questão “e” do problema 4 e houve uma pausa de alguns minutos com conversas paralelas.
Estudante 5: Professora, não vou fazer mais.
Estudante 6: Eu vou sim.
Pesquisadora: Podem falar meninos.
Estudante 6: Eu não terminei ainda não.

Estudante 5: Professora eu não sei.
Pesquisadora: Podem explicar as que vocês fizeram até aqui, depois vocês fazem a última... Eu tô vendo aqui... Por que deu 30? (Mostrando para a questão "a").
Estudante 5: Porque é 10×3.
Pesquisadora: Ok. E aqui? (Apontando para a tabela).
Estudante 5: Eu fiz todos esses valores multiplicado por 3.
Pesquisadora: Entendi. E aqui? (Apontando para a questão "d").
Estudante 5: Aqui eu fiz 90×3, mas eu não sei porque é mês.
Pesquisadora: E aqui? Como vocês fizeram nas questões anteriores?
Estudante 5: A questão "a" eu fiz 10×3 que deu 30.
Pesquisadora: Essa daqui vocês não fizeram (questão "e") O que vocês não estão entendendo?
Estudante 5: Eu não sei, porque pode ser 150×3 também.
Pesquisadora: Termina o seu raciocínio nessa última questão e me chama.
Estudante 5: Nessa última eu vou somar tudo.
Os estudantes não dialogaram mais e depois de algum tempo a pesquisadora foi até a carteira do grupo.
Pesquisadora: Como vocês fizeram na última? Vocês disseram que iam somar tudo, 30, 60, 75, 90, 105, 120 e 270. Esse 350 é da soma de tudo isso?
Estudante 5: Eu queria somar esse, esse e esse (o estudante aponta para todos os resultados que obteve em cada questão, inclusive os resultados da tabela).
Pesquisadora: Somar tudo?
Estudante 5: É.
Pesquisadora: Mas não somou! Aí o seu colega do grupo resolveu pra você?
Estudante 6: Isso.
Pesquisadora: Então ta pessoal. Vou recolher.
Fim de gravação.

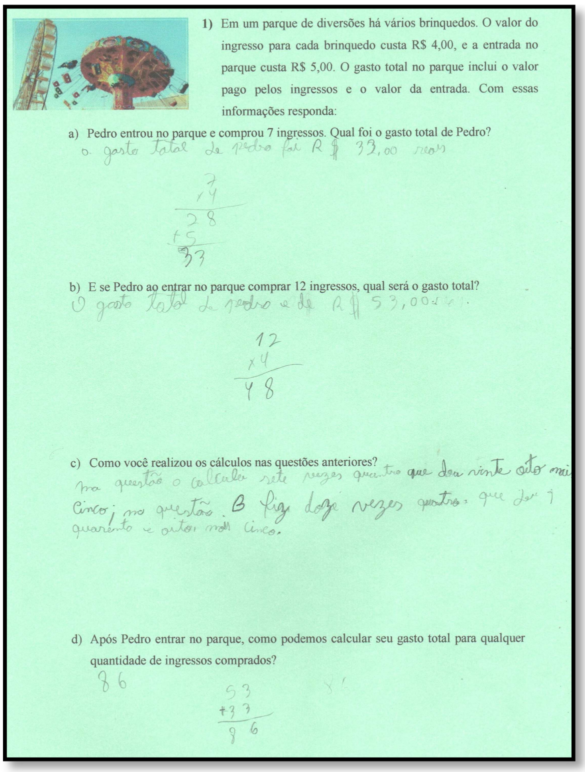

1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?
O gasto total de pedro é de R$33,00.
7 ×4 = 28 +5 = 33

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?
O gasto total de pedro é de R$53,00.
12 ×4 = 48 + 5 = 53

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?
Na questão "a" calculei sete vezes quatro que deu vinte oito, mais cinco; Na questão "b" fiz doze vezes quatro que deu quarenta e oito, mais cinco.

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?
86.
53 +33 = 86

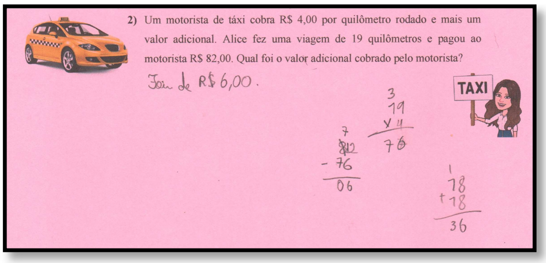

1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?
o gasto total de pedro foi R$ 33,00 reais
7 ×4 = 28 +5 = 33

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?
O gasto total de pedro é de R$ 53,00 reais
12 ×4 = 48

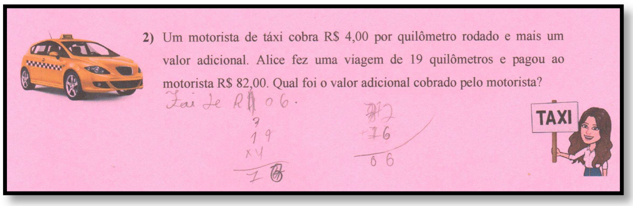
c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?
na questão a calculei sete vezes quatro que deu vinte oito mais cinco; na questão B fiz doze vezes quatro que deu quarenta e oito mais cinco.

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?
86
53 +33 = 86



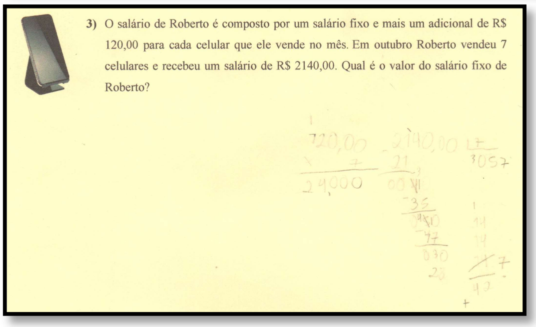
2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

Foi de R$ 6,00.

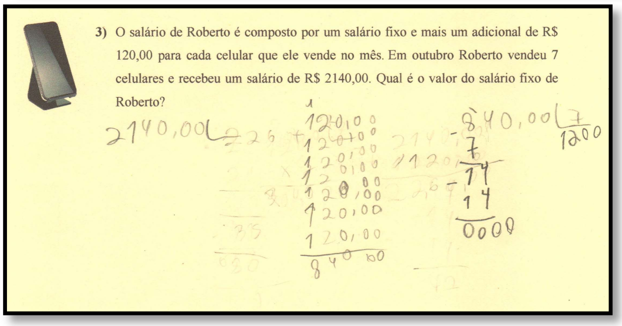


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

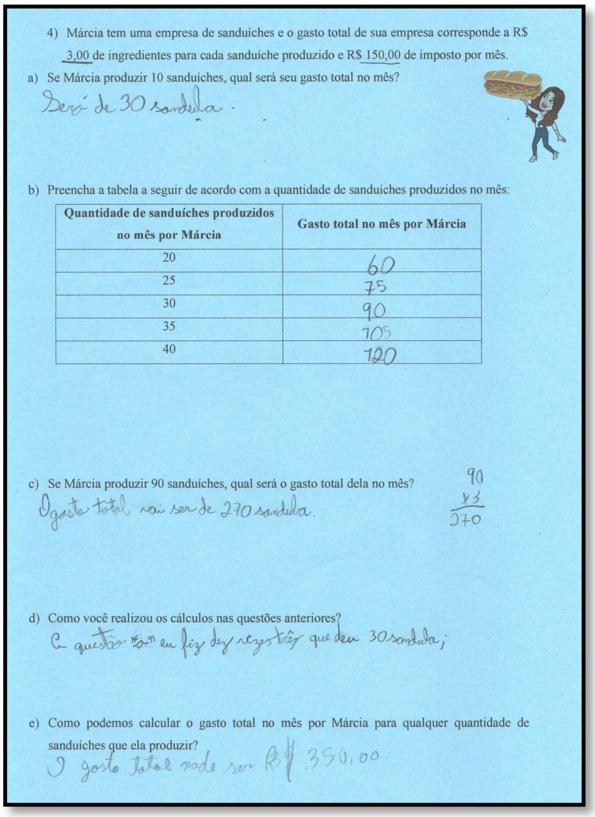
Foi de R$ 06.



3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?



3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

Será de 30 sanduíche.

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	60
25	75
30	90
35	105
40	120

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

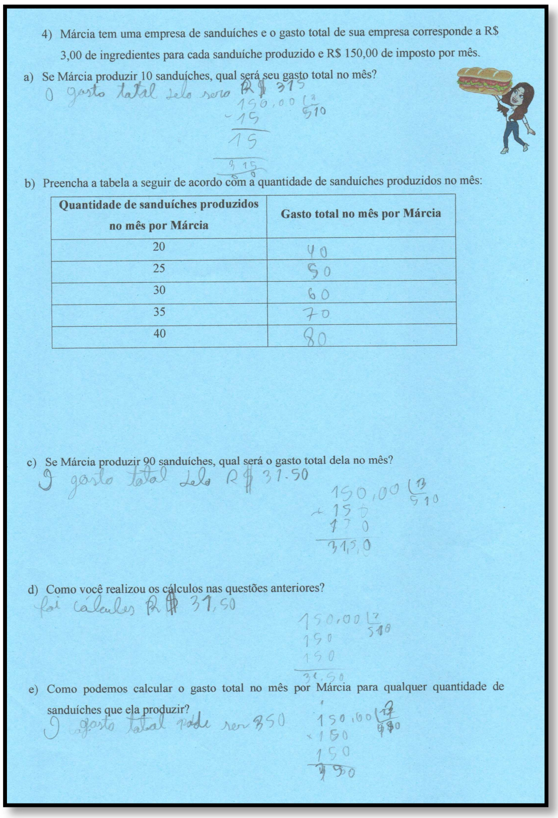
O gasto total vai ser de 270 sanduíche.

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

A questão eu fiz dez vezes três que deu 30 sanduíche;

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

O gasto total pode ser R$ 350,00



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

O gasto total dela seria R$ 315

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	40
25	50
30	60
35	70
40	80

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

O gasto total dela R$ 37.50

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Foi cálculos R$ 37,50

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

O gasto total pode ser 350

APÊNDICE VII – TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS E PROTOCOLOS ESCRITOS – GRUPO 4

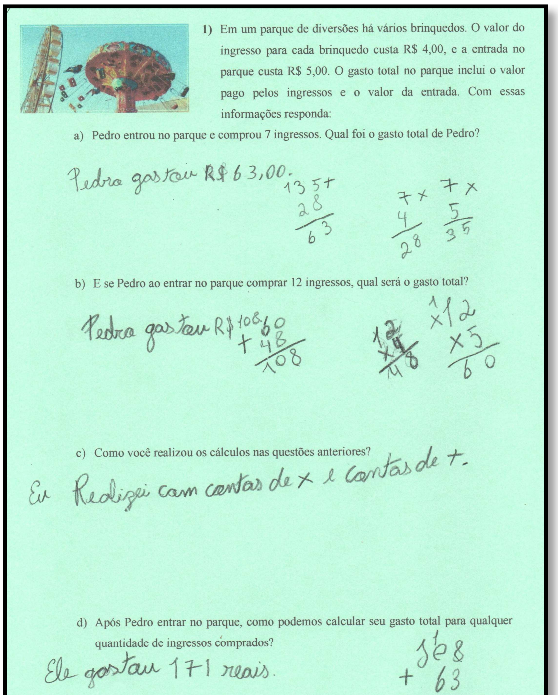
A estudante 8 inicia a leitura do problema 1 em voz alta para o seu grupo.
Estudante 7: Oh eu vou colocar o valor... É 7×5 e 7×4. Ele comprou 7 ingressos!
Estudante 8: Eu sei... 7×5 e 7×4. Tem que colocar o 7 em cima?
Estudante 7: Não sei. É a mesma coisa.
Estudante 8: 5×7?
Estudante 7: É 7×5! 7×5... $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$... É 35!
Estudante 8: 35?
Estudante 7: Haram. Depois vai ter que somar os dois juntos... 7×4... 4 ... 8 ...
Estudante 8: Eu não sei fazer a conta.
Estudante 7: Pode deixar que eu faço essa. Oh... 8... $9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,\ 26,\ 27,\ 28$... 28! Agora vamos somar os dois juntos. $35 + 28$... $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$... 13! Seis... 63 reais. Pedro gastou 63 reais.
Estudante 8: É... Ele... Pedro gastou 63 reais.
Estudante 7: Já foi a primeira!
A estudante 7 inicia a leitura da questão "b" do problema 1.
Estudante 7: É 12×5?
Estudante 8: Não.
Estudante 7: Por que não?
Estudante 8: É divisão. É 12 dividido por 5!
Estudante 7: Não... Espera... (A estudante 7 lê novamente o enunciado). É 12 vezes...
Estudante 8: 12×7.
Estudante 7: É 12×5? Será que esta certo? To com medo de estar errado.
Estudante 8: A professora disse que não importa.
Estudante 7: É 12×5... 5×2 é? 10... Não espera... É 10, cinco, cinco é 10. Olha 2×5 e 5×2 é 10!
Estudante 8: Esse daqui tem que ficar embaixo.
Estudante 7: Por que? Não. O maior é em cima. Se esta falando 12×5 o maior é em cima
Estudante 8: Ham...
Estudante 7: A professora (professora regente) falou que o maior é sempre em cima.
Estudante 8: Ta bom, ta bom.
Estudante 7: 12×5... 5×2 é 10 sobe 1... Vamos fazer assim, se não der certo a conta a gente faz do outro jeito. 5×1... 5 com mais 1... 6... 60! Agora vamos fazer 12×4.
Estudante 8: Calma! Você não fez o 1, esqueceu?
Estudante 7: Claro que eu fiz... 5×1 é 5 com 1 dá 6! Ó... 5×1 dá cinco, com mais 1 que subiu dá 6.
Estudante 8: Ó tem que fazer 2×5 esqueceu?
Estudante 7: Então! Olha aqui, eu fiz 5×2 que deu 10, coloca zero e sobe 1.
Estudante 8: Não é assim. Você não fez as duas conatas!
Estudante 7: Claro que eu fiz!
Estudante 8: Você tem que fazer duas contas embaixo.
Estudante 7: Claro que não. Só faz isso quando tem dois números embaixo. Você esta precisando de um médico, você esta pior do que eu. Porque ó... A professora sempre falou assim quando tem dois números aí tem duas contas, como essa conta é só de um número, tem uma conta só. A professora falou isso.
Estudante 8: Ta, vamos fazer a outra... 4×2?
Estudante 7: 12×4... 48...
Estudante 8: $60 + 48$? Deu 108.
Estudante 7: Pedro gastou 108 reais. Pronto! Como você realizou os cálculos nas questões anteriores? Realizei continha de vezes...
Estudante 8: E de mais.
Estudante 7: De vezes e de mais... Eu realizei com continhas de vezes e de mais. Pronto!
A estudante 7 lê o enunciado da questão "d" do problema 1.
Estudante 8: Nós vamos fazer $63 + 108$ que foi o que ele gastou.
Estudante 7: Ham! $108 + 63$... $8, 9, 10, 11$... 6 ... 7... 171! Ele gastou 171 reais. Gostei!
Estudante 8: Professora, acabamos!
Enquanto as estudantes esperam a chegada da pesquisadora, eles fazem uma releitura de todos os problemas e as estratégias utilizadas para serem explicadas à pesquisadora.

Pesquisadora: Então vamos lá... Como vocês pensaram para resolver a letra “a”?
Estudante 7: A “a”?
Pesquisadora: Isso. Tô vendo alguns cálculos aqui... Eu queria que vocês me explicassem esses cálculos.
Estudante 7: 7×5...
Pesquisadora: De onde vem esse 7×5?
Estudante 8: O 5 é daqui (apontando para o enunciado) e o 7 é daqui (apontando para o enunciado da questão “a”).
Pesquisadora: Ah entendi. E aqui vocês fizeram 7×4... O 7 veio daqui (mostrando no mesmo lugar que haviam indicado) e o 4?
Estudante 8: O 4 eu tirei daqui (apontando para o enunciado da questão 1).
Pesquisadora: Ah ta. Porque vocês fizeram essas duas continhas?
Estudante 7: Para encontrar o resultado que ele gastou, ai a gente fez a continha de mais.
Pesquisadora: Ah vocês fizeram primeiro 7×5 que deu 35 depois fizeram 7×4 que deu 28 e depois vocês somaram esses dois resultados.
Estudante 8: Isso, $35 + 28$ que deu esse resultado.
Pesquisadora: Então se Pedro entrar no parque e comprar 12 ingressos ele irá gastar 63 reais. Ok! E na letrinha “b”?
Estudante 7: A gente fez 12×5 e 12×4. Porque daí ele comprou 12 ingressos né, aí a gente fez vezes 5 que deu esse resultado. Na 12×5 deu 60 e 12×4 deu 48 e fizemos $48 + 60$ que deu 108.
Pesquisadora: Entendi! E na letrinha “c”?
Estudante 8: Na letra “c” esta perguntando como a gente fez os cálculos... A gente realizou continha de vezes e de mais.
Pesquisadora: Entendi. Porque aqui vocês fizeram de vezes e de mais. E na letrinha “d”?
Estudante 7: É... $108 + 63$ que deu 171.
Pesquisadora: Ta... E de onde são esses resultados, 108 e 63?
Estudante 8: A gente pegou o resultado da letra “a” e da letra “b” e somamos.
Pesquisadora: Então vocês pegaram esses resultados e somaram.
Estudante 8: Que deu 171.
Pesquisadora: Então ta. Vou recolher essas folhas e entregar a próxima.
A estudante 8 lê o enunciado do problema 2
Estudante 7: É 19×4. Eu acho. 4×9?
Estudante 8: 9×4.
Estudante 7: É a mesma coisa. Por que você fez o 4 em cima se é 19?
Estudante 8: Ah deixa assim.
Estudante 7: Então vai... 4×9?
Estudante 8: 31!
Estudante 7: 31?
Estudante 8: É... $31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40$. Se 4×10 dá 40, menos 9 é 31!
Estudante 7: $4, 5, 6, 7$... 7! 71.
Estudante 8: Esperai agora... 71. Agora nós vamos fazer... Oxi não vai dar não, porque a gente ia fazer 71 menos 82. Deu errado.
Estudante 7: Não deu errado sabe por quê? Vamos fazer $82 - 71$.
Estudante 8: Ó nós tem que fazer esse daqui... Temos que fazer $71 - 82$.
Estudante 7: Não tem como, porque...
Estudante 8: Ah verdade!
Estudante 7: Vai dar 11 reais. O valor adicional foi 11 reais.
Estudante 8: Acabei. 13!
Estudante 7: Que 13? É 11! $2 - 1$ é?
Estudante 8: 1... Ah é 1 (risos). Eu peguei é... $2 + 1$. É... E agora?
Estudante 7: O valor adicional cobrado pelo motorista é...
Estudante 8: O valor... Cobrado...
Estudante 7: É adicional!
Estudante 8: Ah verdade. O valor...
Estudante 7: Adicional cobrado pelo motorista é 11 reais.
Estudante 8: Professora, acabamos.
Pesquisadora: Vamos lá. O que vocês fizeram nessa?
Estudante 7: Aqui fizemos 19×4 que deu 71 e depos fizemos $82 - 71$ que deu 11.
Pesquisadora: Ok. E por que vocês fizeram essa conta?
Estudante 7: Pra ver qual foi o valor adicional que o motorista cobrou.
Pesquisadora: Hum. Entendi... Beleza. Esse 82 de onde vocês pegaram?

Estudante 7: Daqui (indicando no enunciado).
Pesquisadora: E esse 71? É do resultado que vocês fizeram de 19×4... E por que vocês decidiram pegar o $82 - 71$?
Estudante 8: A gente pegou esses valores pra saber quanto que ele ia cobrar.
Pesquisadora: Ah sim... Do valor adicional. Beleza então. Vou recolher estas folhas e já eu trago as outras.
Estudante 8: Professora tem quantas?
Pesquisadora: Só tem mais uma depois dessa.
A estudante 7 começa a ler o enunciado do problema 3 em voz alta.
Estudante 7: Não sei... Ele recebeu 120 para cada celular.
Estudante 8: Deixa eu falar primeiro... Ímpar ou par?
Estudante 7: Deixa eu falar... Roberto recebeu um salário adicional para cada celular, só isso.
Estudante 8: Temos que fazer aqui ó quanto que é cada celular.
Estudante 7: Cada celular vai dar 120 reais.
Estudante 8: Se nós errar a culpa vai ser de você.
A estudante 7 começa ler o enunciado do problema 3 novamente.
Estudante 8: Ta bom, ta bom.
Estudante 7: Aqui esta perguntando qual é o salário fixo de Roberto.
A estudante 7 lê o enunciado novamente.
Estudante 7: Nós temos que fazer 120 dividido por 7.
Estudante 8: Ah nós nunca mais chupamos sorvete né? Ah segunda-feira vamos chupar sorvete?
Estudante 7: Ah se tiver dinheiro né.
Estudante 8: Eu vou ter dinheiro, eu pago. Vou ganhar cem reais.
Estudante 7: 120... Dividido por 7.
Estudante 8: 120...
Estudante 7: Dividido por 7.
Estudante 8: É?
Estudante 7: É... Não, será que é?
Estudante 8: Professora...
Estudante 7: Não, a professora não pode falar... É 120 dividido por 7, se não der a gente faz 120 vezes 7.
Estudante 8: Ta bom.
Estudante 7: Ta bom... Vamos lá.
Estudante 8: Você vai fazer sozinha, depois eu copio.
Estudante 7: 12 dá pra dividir por 7? Dá.
Estudante 8: Mentira.
Estudante 7: Nós temos que pensar assim... Quantas vezes o 7 que dá 12. 7×1 dá 7... Sete mais sete dá 14, deu mais, então a gente vai ter que fazer...
Estudante 8: 7×2...
Estudante 7: Não... Deixa eu fazer um negócio aqui, depois você copia.
Depois de alguns minutos tentando resolver, a estudante 7 se pronuncia:
Estudante 7: Deu errado! Quanto é 7×5?
Estudante 8: Eu não sei.
Estudante 7: Você não tem tabuada?
Estudante 8: Eu acho que não pode usar.
Estudante 7: Quanto que é 7×6?
Estudante 8: Eu não sei.
A estudante 7 pergunta para um estudante quanto que é 7×6 e ele responde, 42.
A estudante 7 tenta fazer a divisão de 120 por 7 e apresenta como resposta o número 16.
Estudante 8: Professora é mais ou menos?
Pesquisadora: Já terminaram?
Estudante 8: Não.
Pesquisadora: Não estão conseguindo fazer essa?
Estudante 7: Professora a gente não sabe se é de dividir ou de vezes.
Pesquisadora: Espera aí... Aqui vocês não terminaram ainda né? Vou atender o outro grupo então e depois eu venho aqui.
Estudante 7: Não. Professora você tem uma borracha pra apagar?
Pesquisadora: Tenho. Vou pegar pra você.
Estudante 7: Vamos fazer 120 dividido por 7 de novo.
As estudantes não conseguiram realizar os cálculos e desistem de tentar resolver.
Estudante 7: Professora não estamos conseguindo fazer.
Pesquisadora: Porque vocês desistiram?

Estudante 8: Não professora é porque esta muito difícil.
Pesquisadora: O que esta difícil? Qual é a dificuldade de vocês?
Estudante 7: Ah professora nós não sabe se é mais se é menos ou de vezes... Nós não sabe fazer. É isso que a gente não ta entendendo. Eu já li umas cinqüenta vezes e não consigo.
Pesquisadora: Essa continha aqui que você tinham feito e que você apagou. Você fez 120×7 por que?Vocês não querem tentar mais uma vez?
Estudante 7: Não professora, quero desistir.
Pesquisadora: Então ta. Vou recolher as folhas e entregar a última pra vocês.
Estudante 7: Agora essa daqui você vai fazer sozinha.
Estudante 8: Ah é?
Estudante 7: Naquela outra eu estava tentando fazer sozinha e você não me ajudou em nada.
A estudante 7 inicia a leitura do problema 4 para o seu grupo.
Estudante 7: ela tem produzido 150 reais de imposto por mês. Ela fez 10 sanduíches, então vai ter que fazer 10 vezes 150.
Estudante 8: 10×150? Ta bom.
Estudante 7: Aí vai ter que fazer duas contas. Zero vezes zero, zero vezes cinco, zero vezes um, um vezes zero, um vezes cinco e um vezes um... 15 reais.
Estudante 8: Ela gastou só 15 reais?
Estudante 7: Não, aí nós vamos ter que fazer agora... É... mas tem o três ainda. Ó ela gasta na sua empresa 3 reais. Espera, eu não entendi nada.
Estudante 7: A primeira tabela é 210.
Estudante 8: 210?
Estudante 7: Haram. Agora vamos fazer essa.
Estudante 8: É 225.
Estudante 7: 225? Por que é 225?É 215! Não é?Por que ta 220? É 210, depois 215, 310, 315 e 410.
Estudante 8: Pronto.
Estudante 7: Vamos tentar a primeira aqui... 150 dividido pra 3... Vem logo, vamos fazer essa conta. Quanto é 150 dividido pra 3?
Estudante 8: N a primeira?
Estudante 7: É.
Estudante 8: 3×150?
Estudante 7: Quê?É 150 dividido pra 3. É dividido.
Estudante 7: Ó professora eles estão falando que não tem conta de divisão e a gente esta tentando de divisão.
Pesquisadora: Pessoal não pode falar como vocês fizeram para os outros grupos, se não vocês vão atrapalhar as respostas dos outros. É pra guardar pra vocês.
Estudante 7: Vamos lá tentar fazer 150×3. $3 \times$ é zero, 3×5, quinze, 3×1, três, com mais um... 450! Deu 450. Você esta demorando demais.
Pesquisadora: e aí pessoal, estão conseguindo?
Estudante 8: Não.
Estudante 7: Quase... Vamos fazer 450×2... Não... $450 + 10$.
Um dos integrantes do grupo pediu para ir ao banheiro e por isso ficou alguns minutos sem diálogos.
Estudante 7: Já estou na "c".
Estudante 8: Já?
Estudante 7: O gasto total... Você vai ter que fazer duas contas ta? Eu já fiz.
Estudante 8: O gasto total será...?
Estudante 7: 460 reais. Na "c" é 150×90.
Estudante 8: $150 + 90$?
Estudante 7: Não! 450 vezes 90... É... Deu 135 reais!
Estudante 8: Quê?
Estudante 7: Será 135 reais!
Pesquisadora: Quando voes terminarem me chamam ta?
Estudante 7: Huram.
Estudante 7: Faz vírgula zero zero. Ta agora vamos pra "d"... Como vocês fizeram os cálculos anteriores? Com contas de vezes e de mais.
A estudante 7 inicia a leitura do enunciado da questão "e" do problema 4.
Estudante 7: Nós vamos fazer $460 + 135$! 460... mais... 135...
Estudante 8: É... 595!
Estudante 7: Ela vai produzir 595 sanduíches. Acabamos professora.
Pesquisadora: Vamos lá... Como vocês fizeram aqui?Na primeira, letra "a".
Estudante 7: primeira a gente fez 150×3 que deu 450. Depois a gente fez $450 + 10$ que deu 460.

Pesquisadora: De onde vocês tiraram o 450? Foi dessa conta aqui de 150 × 3?
Estudante 7: Haram.
Pesquisadora: E esse 10? De onde saiu?
Estudante 8: De 10 sanduíches.
Pesquisadora: Ah sim. E nessa tabelinha aqui? Como vocês responderam? Como vocês chegaram nesses valores? 210, 215, 310, 315 e 410?
Estudante 7: Nós pegamos aqui e colocamos o número 1 no meio de cada um.
Pesquisadora: Como é que é? Ah, o número 1 no meio? Por exemplo, o 1 no meio de 2 e 0, o 1 no meio de 2 e 5?
Estudante 7: Sim.
Pesquisadora: Ah por quê?
Estudante 7: Ah foi da cabeça mesmo.
Pesquisadora: Ah ta. E tem alguma relação com o que vocês fizeram anteriormente ou não e vocês fizeram só pra esse?
Estudante 7: Só fizemos pra esse.
Pesquisadora: Ah ta. E na letrinha "c"? Aqui você fez uma continha... Tô vendo 150 × 90.
Estudante 7: Deu 135 reais.
Pesquisadora: Esse 150 de onde vocês tiraram ele?
Estudante 7: Do enunciado.
Pesquisadora: Beleza. E o 90?
Estudante 7: Daqui (mostrando para o enunciado da questão "c").
Pesquisadora: Ah sim. E na letrinha "d"?
Estudante 8: Na "d" resolvemos os cálculos com conta de mais e de vezes e na "e" calculamos de mais, 460 + 135 que deu 595.
Pesquisadora: Que foram os resultados da letra "a" e "c"?
Estudante 7: Haram.
Pesquisadora: Entendi... Ok!
Fim de gravação.



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

Pedra gastou R$ 63,00.

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

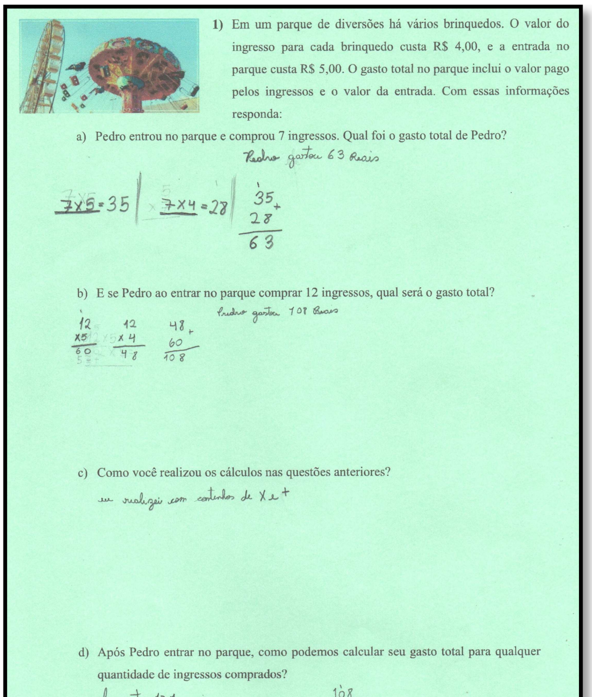
Pedra gastou R$ 108

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Eu Realizei cam contas de × e contas de +.

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

Ele gastou 171 reais.



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

Pedro gastou 63 Reais

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

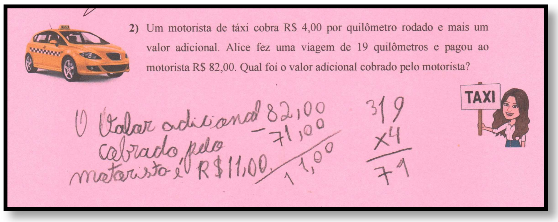
Pedro gastou 108 Reais

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

eu realizei com contas de × e +

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

ele gastou 171 reais.

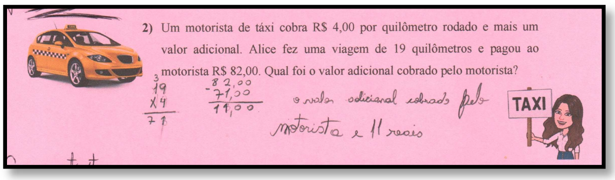


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

O valor adicional cobrado pelo motorista é R$ 11,00.

82,00 − 71,00 = 11,00

19 × 4 = 71

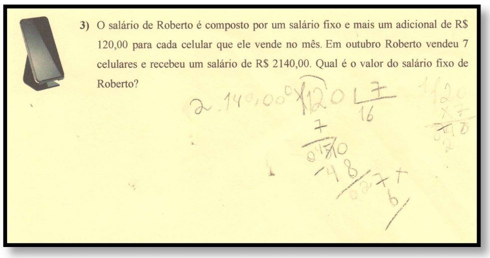


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

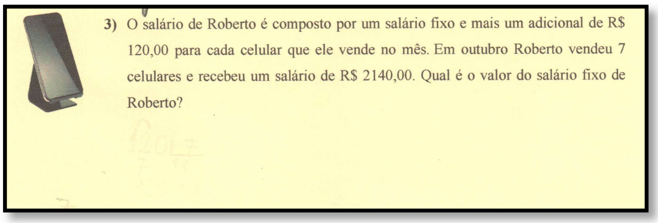
19 × 4 = 71

82,00 − 71,00 = 11,00

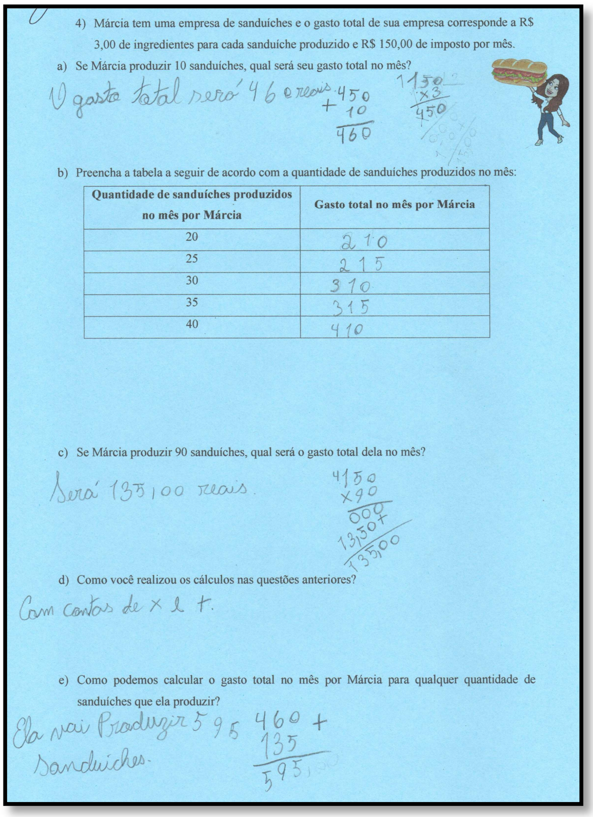
o valor adicional cobrado pelo motorista e 11 reais



3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?



3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

O gasto total será 460 reais

450 + 10 = 460

150 × 3 = 450

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	210
25	215
30	310
35	315
40	410

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

Será 1350,00 reais.

150 × 90 = 13500

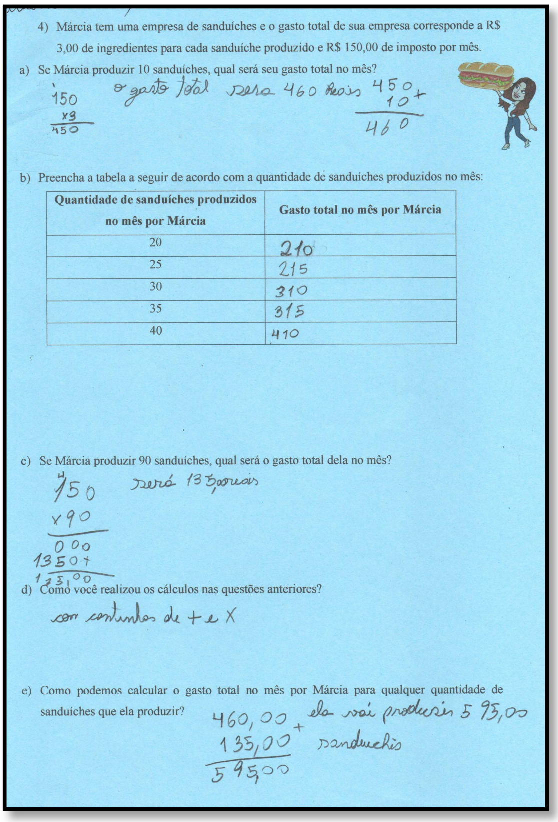
d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Com contas de × e +.

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

Ela vai Produzir 595 Sanduiches.

460 + 135 = 595



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

150 × 3 = 450

o gasto total sera 460 Reais

450 + 10 = 460

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	210
25	215
30	310
35	315
40	410

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

150 × 90 = 1350,00

será 1350 reais

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

com continhas de + e X

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

460,00 + 135,00 = 595,00

ela vai produzir 595,00 sanduichs

APÊNDICE VIII – TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS E PROTOCOLOS ESCRITOS – GRUPO 5

Os estudantes fazem a leitura do primeiro problema de forma individual.
Estudante 9: Você entendeu?
Estudante 10: Entendi. E você?
Estudante 9: Eu também. Então qual é a sua resposta pra ver se é a mesma?
Estudante 10: É só fazer 5×7. Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro? A entrada no parque custa... É... 4 vezes o 7.
Estudante 9: Eu fiz diferente... Mas eu acho que o resultado é o mesmo.
Estudante 10: Como você fez?
Estudante 9: Eu somei os dois e multipliquei por 7.
Estudante 10: Somou esses dois?
Estudante 9: É. Deu 63.
Estudante 10: É mesmo né? Por que como que ele vai entrar de graça.
Estudante 9: Então... É só fazer o seguinte, 4×7 e depois 5×7 e somar os dois.
Estudante 10: Mas eu acho melhor a gente fazer 7×4, porque se não falava assim é... Pedro entrou no parque, pagou pela entrada e comprou 7 ingressos. Ta falando dos ingressos.
Estudante 9: Isso já ta na pergunta de baixo.
Estudante 10: Oi?
Estudante 9: Você esta na pergunta de baixo.
Estudante 10: Não, essa daqui ó.
Estudante 9: Essa daqui é de 7 a de baixo é de 12.
Estudante 10: Então. Eu to falando se, por exemplo, falasse... É... A entrada seria 5 reais.
Estudante 9: Não. Aqui é o seguinte... O valor do ingresso para cada brinquedo é 4 reais e pra entrar no parque é 5, então pra você andar em um brinquedo só você gasta 9 reais e se ele comprou 7 ingressos... Só se for 7 de cada né. Aí dá 63 do mesmo jeito. É 63!
A estudante 10 lê novamente o enunciado.
Estudante 10: Porque se fosse assim, se fosse colocar o 5 reais e o 4 reais, seria ele entrou no parque pagou 5 reais e comprou ingressos. Seria, eu acho, comprar só 12 ingressos.
Estudante 9: Bom, mas de qualquer jeito a resposta é 63! É só multiplicar o 5×7 e 4×7. Ó, o 5×7 dá 35 e o 4×7 dá 28, aí soma tudo... 63.
Estudante 10: Fazer o 7×5?
Estudante 9: É.
Estudante 9: 12 ingressos... Essa daqui eu já li e já entendi também.
Estudante 10: É só fazer 12×5 né? Não... 4.
Estudante 9: Não. É tudo.
Estudante 10: Não é 12×4.
Estudante 9: 12×5 e 12×4.
Estudante 10: Não, porque aqui ta falando depois de entrar no parque... Então vai ter que fazer 12×4.
Estudante 9: Bom nas minhas contas, e eu perdi as contas mas ta bom, é... Fica 40, 48 aqui da 50, 60... $50 + 48$... 108 então 108 reais!
Estudante 10: Como você realizou os cálculos anteriores? Oxi de mais.
Estudante 9: Claro que não... De multiplicação e adição.
Estudante 10: Ah!
Estudante 9: Lá em São Paulo caia muita pegadinha assim, por isso que eu tô esperto.
O estudante 9 lê o enunciado da questão "d" do problema 1.
Estudante 9: A última também é complicada, mas...
O estudante 9 lê novamente o enunciado.
Estudante 9: Então no caso ele comprou 19 ingressos... Adição ou somando. Né? Você já esta na última?
Estudante 10: Tô.
Estudante 9: Ah então é a mesma resposta?
Estudante 10: Só essa daqui que eu fiz 12×4.
Estudante 9: Ah então essa daqui ou eu estou errado ou é você! Bom eu entendi o seguinte nessa daqui... 12×5 e o 12×4.
Estudante 10: Porque essa aqui que o Pedro entrou não tem nada a ver.

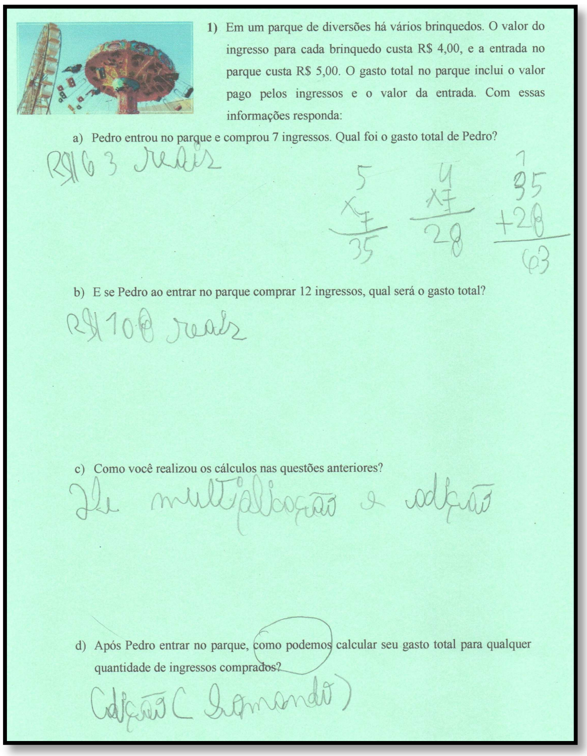
Estudante 9: E se Pedro ao entrar no parque e comprar 12 ingressos de cada. Aqui falta palavra, mas se colocar um ‘cada’ aqui dá uma dica.
Estudante 10: Deu 108 o seu?
Estudante 9: É o meu deu 108. E essa daqui você entendeu? Eu já entendi.
A estudante 10 lê o enunciado da questão “d”.
Estudante 10: Ah essa daqui é pra juntar?
Estudante 9: Não, se fosse pra juntar estaria escrito diferente. Mas aqui esta perguntando após Pedro entrar no parque como podemos calcular, COMO PODEMOS, não ta falando quanto que é o gasto total dele, ta falando como podemos.
Estudante 10: Ó você é bom heim.
Estudante 9: Eu estudei bastante. Estudei cinco anos da minha vida... Não, foi oito. Foi oito? Ah não sei, só sei que comecei estudar com quatro anos.
Estudante 10: Eita.
Estudante 9: Agora... Adição.
Estudante 10: Só adição né?
Estudante 9: Ou somando né. Porque adição e somando é a mesma coisa. Deixa a professora né...
Estudante 10: Tem outra?
Estudante 9: Tem. São quatro.
Estudante 10: Aqui professora, acabamos.
Pesquisadora: Acabaram?
Estudante 10: Haram.
Estudante 9: Então, agora que eu percebi uma coisa. Qual é a sua resposta da “c”? Por que a “c” é importante.
Pesquisadora: Gente como vocês fizeram nessa? Pode falar os dois ou qualquer um. Na letra “a” vamos lá. Vocês fizeram aqui 5×7 e aqui vocês fizeram... Como é que é?
Estudante 9: 4×7.
Pesquisadora: Então espera lá. A primeira conta que vocês fizeram é 5×7?
Estudante 9: É.
Pesquisadora: Ta. Por que vocês fizeram 5×7? Só pra eu saber.
Estudante 10: Porque se Pedro entrou quer dizer que ele já pagou um tanto e depois ele comprou os ingressos.
Pesquisadora: Ah ta, então espera lá, vamos voltar. Esse 5 do que você esta considerando?
Estudante 10: Da entrada.
Pesquisadora: Beleza. E esse 7?
Estudante 10: Dos ingressos.
Pesquisadora: Ah ok, que deu 35, beleza. E aqui essa continha?
Estudante 10: É dos brinquedos e dos ingressos. Eu juntei os dois.
Pesquisadora: Ah somou os dois beleza. Entendi agora o que vocês fizeram. E na letra “b” o que vocês pensaram pra resolver?
Estudante 9: Eu meio que não fiz conta né. Lá em São Paulo eu não fazia conta, fazia tudo de cabeça.
Pesquisadora: A é? Que legal... E como você fez a sua conta de cabeça?
Estudante 9: Eu fiz praticamente do mesmo jeito daqui, só que ao invés de 7 eu multipliquei por 12.
Pesquisadora: O que vocês multiplicaram por 12?
Estudante 10: O 5 e o 4.
Pesquisadora: Vocês estão falando que a letra “b” é igual a letra “a”, só que na letra “b” vocês fizeram a mesma coisa e colocaram 12 no lugar de quem?
Estudante 10: Do 7.
Pesquisadora: Há então vocês fizeram igual a anterior, só que no lugar de 7 vocês colocaram 12. Beleza, e na “c”?
Estudante 9: Eu coloquei de multiplicação e adição. Que nessa daqui usa adição.
Pesquisador: Entendi. E na última?
Estudante 9: A última é adição e somando.
Pesquisadora: O que vocês entenderam nessa pergunta?
Estudante 9: É aqui ó.
Estudante 10: Ele que me ajudou na “b”.
Pesquisadora: O que vocês fizeram?
Estudante 9: Esse ‘podemos’ aqui já da uma certa dica de ‘como podemos’, se fosse qual o valor total, aí teria que fazer o $63 + 108$.
Pesquisadora: Entendi. Então ta, é isso então né. Beleza, eu vou recolher e entregar o próximo problema.
A estudante 10 inicia a leitura do problema 2.
Estudante 9: Lê de novo que...
Estudante 10: É só fazer...

Estudante 9: Ah ta ta ta. Entendi também.
Estudante 10: 19×4
Estudante 9: É! Aí depois... Você entendeu?São duas contas.
Estudante 10: É. Aí depois eu vou fazer...
Estudante 9: 9 primeiro, depois vezes 4. 4×9 dá 36, sobre aqui, 4×1... 7. É $82 - 76$, dá sete, oito, seis.... Pronto!
Estudante 10: Qual o valor adicionado? Seria o todo?
Estudante 9: Não. Quer que eu te explico? Bom esse qual é o valor adicional aqui eu não li não, e por isso eu já fiz. Aqui é o seguinte, você já fez o 19×7?... O 4, 19×4?
Estudante 10: Haram.
Estudante 9: Aí agora você vai ter que colocar o 82 menos o 76, porque deu 76...
Estudante 10: Ah... Qual o valor que o motorista cobrou de adicional.
Estudante 9: É... Qual o valor do adicional. Aqui ó, um motorista de taxi cobra 4 reais por quilômetro rodado e mais um adicional.
Estudante 10: Você gosta de futebol?
Estudante 9: Gosto.
Estudante 10: Então toda manhã, amanhã e terça, lá no ginásio sabe onde é?
Estudante 9: Não.
Estudante 10: É... Não tem a entrada de Paraná do Oeste?
Estudante 9: Hurum.
Estudante 10: Então, não tem um barracão grandão lá?
Estudante 9: Tem.
Estudante 10: Então, lá que é o ginásio, você vai lá porque lá que vai ter treino de futebol. Toda $09:00$ horas da manhã. Quinta e terça.
Estudante 9: Caramba. Que legal.
Estudante 9: Você já fez?
Estudante 10: Tô escrevendo.
Estudante 9: Caramba, aqui tem até televisão.
Estudante 10: Pronto, acabamos.
Estudante 9: Professora.
Pesquisadora: Vamos lá pessoal. Podem falar como vocês fizeram.
Estudante 9: Agora é você.
Estudante 10: Ah não.
Pesquisadora: Ta, to vendo aqui que tem uns cálculos. Como vocês fizeram esses cálculos?
Estudante 10: Esse daqui foi o primeiro que a gente fez, 19×4, aí eu vou ter que fazer4 vezes o 19 que será os quilômetros do motorista. Aí ele pagou ao motorista 82 reais, aí com esse daqui eu vou tirar menos 82, $82 - 76$.
Pesquisadora: Esse 82 você tirou de onde?
Estudante 10: Daqui (apontando para o enunciado).
Pesquisadora: Ah entendi. Aí você viu que o adicional é de?
Estudante 10: 6 reais.
Pesquisadora: Beleza então. Vou recolher essas folhas e entregar o próximo problema pra vocês.
Os estudantes começam ler o enunciado do problema 3 de forma individual.
Estudante 10: Eu não entendi, será que tem que fazer vezes o sete? 7×120?
Estudante 9: Ah, agora que eu entendi. Pra mim aqui que era 214, mas é 2140, eu não vi o zero. Então eu já entendi. É pra fazer 7×120.
Estudante 10: É. Aí esse será que eu vou ter que diminuir?
Estudante 9: 2140 menos oito, quatro, zero.
Estudante 10: $1300!$
Estudante 9: Isso.
Estudante 10: Agora você que vai ter que explicar.
Estudante 9: Mas nem fala que a gente acabou ainda pra gente confirmar. Mas eu acho que esta certo sim.
Pesquisadora: Acabaram?
Estudante 9: Sim.
Pesquisadora: Ta, o que vocês fizeram nessa daqui?
Estudante 9: A gente multiplicou o 7 por 120 .
Pesquisadora: Por que vocês fizeram isso?
Estudante 9: Porque o salário dele é fixo e ele ainda ganha um adicional de 120 para cada celular que ele vende.
Estudante 10: Então provavelmente o fixo seria mais.
Pesquisadora: Hum, então ta. Então vocês fizeram o120×7 e chegou nesse resultado, beleza.
Estudante 9: Aí a gente pegou o 2140 colocou aqui e subtraiu com o 840 e deu 1300 o resultado.

Pesquisadora: E por que vocês fizeram a conta de menos?
Estudante 9: Ah porque se fosse de mais daria um valor a mais do que ele recebeu.
Pesquisadora: Hum, e qual foi o valor que ele recebeu no final?
Estudante 9: Ele recebeu 2140.
Pesquisadora: Ah, entendi. Muito bem gente, podem entregar, essa daqui é a última ta bom!
Os estudantes iniciam a leitura do enunciado do problema 4.
Estudante 10: Ah é só fazer o 10 vezes o 3, 30!
Estudante 9: Ham?
Estudante 10: Por que eu falei 3×10?
Estudante 9: Também não sei.
Estudante 10: É, 3×10 porque ela fez 10 sanduíches.
Estudante 9: É a "b" que é pra responder. A "a" não é pra responder nada.
Estudante 10: Como que não é pra responder? Aqui ta perguntando
Estudante 9: Dá 1530 o resultado.
Estudante 10. Não, mas aqui ta perguntando... A Márcia produziu 10 sanduíches, qual será o seu gasto total no mês?
Estudante 9: Qual será o gasto total? Ta falando todos os números. Bom, pra mim é assim né.
Estudante 10: O quê?
Estudante 9: A pergunta.
Estudante 10: $30 + 150$ ou 30×150?
Estudante 9: Não, é... Eu entendi o seguinte, é... 100×10?
Estudante 10: 100 vezes o 10?
Estudante 9: Dá quantos?
Estudante 10: 500.
Estudante 9: Oi?
Estudante 10: 500.
Estudante 9: Calma aí, 100×10 dá quanto?
Estudante 10: Ah 10 vezes o 100... 100.
Estudante 9: Ah você esta brincando fala.... Dá 1000! E 50×10 dá 500. 150 com mais o 30. Ela gasta 3 reais de ingredientes para cada sanduíche e 150 de imposto por mês, e se Márcia produzir 10 sanduíches qual será o seu gasto total no mês! Ah então ta errado mesmo. Você esta certa. É desse jeito aí... 180.
O estudante 9 inicia a leitura da questão "b" do problema 4.
Estudante 10: Ah, aqui tem que preencher.
Estudante 9: Aqui ta meio confuso. Ela fez 20 sanduíches... Ah.
Estudante 10: 3×20.
Estudante 9: Dá 60. 60 com mais...
Estudante 10: Será que é 60?
Estudante 9: Ah ta ta ta ta eu entendi. É só ir adicionando o seguinte, 20×3 que dá 60, e aí adiciona mais o 150, que dá 210.
Estudante 10: Não. Vai ser o 20×3, 25×3...
Estudante 9: É o seguinte, indo por mês. 3×3 dá 9, 90, 14 dá 140 dá... 240. Opa opa, tem alguma coisa errada aqui.
Estudante 10: 245.
Estudante 9: É. 15 aqui dá 260, aí aqui40, 40 com 40 dá 100, 120 com mais 50... 70, 170, com mais... 270!
Estudante 10: Como assim:
Estudante 9: O quê?
Estudante 10: O 35 é o que?
Estudante 9: 35 é 260.
Estudante 10: Por quê?
Estudante 9: Porque é só adicionar 15 aqui. Qual foi o seu?
Estudante 10: Ó, primeiro 15, 210.
Estudante 9: Ta.
Estudante 10: 25, 215, 30, 240.
Estudante 9: E o 5?
Estudante 10: 45?
Estudante 9: É. È só ir adicionando o valor. Aí o de 35 deu quantos?
Estudante 10: Então o meu tinha dado 45... 245.
Estudante 9: Ah ta. E o de 40 deu?
Estudante 10: Vou fazer a conta.
Estudante 9: 270. Só pra adiantar.

Estudante 10: Não era 15 a mais?
Estudante 9: Não. Aí já é um negócio diferente... Aí você faz $4 + 4$?
Estudante 10: 8.
Estudante 9: Mais 4?
Estudante 10: 12.
Estudante 9: 12 com mais 5?
Estudante 10: 17.
Estudante 9: Adiciona o zero na frente fica 170... 170 com mais 100?
Estudante 10: Quanto?
Estudante 9: 170 com mais 100.
Estudante 10: 270.
Estudante 9: Então é esse o resultado!
O estudante 9 inicia a leitura da questão "c" do problema 4.
Estudante 9: 90 sanduíches dá... 9×3 dá 27... 270. 270 com mais 150...
Estudante 10: Meu Deus, você parece uma calculadora.
Estudante 9: (Risos).
Estudante 10: 90?
Estudante 9: 90×3 dá 270. 270 com mais 150... 330... 430!
O estudante 9 inicia a leitura da questão "d" do problema 4.
Estudante 10: O meu aqui deu 320.
Estudante 9: Ham?
Estudante 10: O meu aqui deu 320.
Estudante 9: Dá não.
Estudante 10: 90×3 dá 270.
Estudante 9: Haram.
Estudante 10: Aí eu fiz mais 150.
Estudante 9: Sabe por que dá 430? Só se as vezes eu adicionei um número a mais. Aqui é 3×9 que dá 27, no caso dá 270. 270 com mais 50 dá quantos?
Estudante 10: É que eu fiz assim, 270 com mais 150.
Estudante 9: Há ta.
Estudante 10: Que seria esse.
Estudante 9: Agora você vai concordar comigo, já que você fez conta... Zero mais zero dá nada, $5 + 7$?
Estudante 10: 12.
Estudante 9: 12? 12 mesmo?
Estudante 10: 7... 8, 9, 10...
Estudante 9: Ah ta, só pra confirmar mesmo. 12 dá 120 então. Aqui já dá 3 com 120... É até eu errei. Coloquei 430... É 420.
Os estudantes lêem a questão "e".
Estudante 9: Multiplicando e somando.
Estudante 10: É. Eu acho que é adição.
Estudante 9: Não, adição é a mesma coisa que somando.
Estudante 10: Ah é verdade.
Estudante 9: Pronto. E nem cansei.
Estudante 9: Boa sorte!
Estudante 10: Eu não sei explicar.
Pesquisadora: Vamos lá? Tô vendo aqui na conta de vocês $150 + 30$ eu queria saber de onde vocês tiraram o 150 e o 30.
Estudante 9: O 150 a gente tirou daqui ó (apontando para o enunciado).
Pesquisadora: Ta, do enunciado.
Estudante 10: E o 30 é de 10×3
Pesquisadora: Ah entendi.
Estudante 9: A gente somou e deu esse resultado aqui.
Pesquisadora: Beleza. E aqui na tabela? Esta tudo preenchido, quero saber como que vocês chegaram nesses resultados... 210, 215, 245, 260 e 270.
Estudante 10: Fizemos 20×3...
Pesquisadora: Ah vocês fizeram 20×3 que deu 210?
Estudante 9: Não, fizemos 20×3 que deu 60 aí somamos o 60 com 150.
Pesquisadora: Ah ta e essas contas vocês fizeram tudo de cabeça?
Estudante 9: Eu fiz, ela não.
Estudante 10: Eu fiz conta.

Estudante 9: Eu nunca fiz conta, sempre faço de cabeça desde o primeiro ano.
Pesquisadora: Ah sim, que legal! Então todas essas contas vocês multiplicaram pelo valor que esta aqui...
Estudante 10: Por 3.
Pesquisadora: E depois somaram com 150?
Estudante 10: Isso.
Pesquisadora: Ok. E na letra "c"?
Estudante 9: Na "c" a gente fez o seguinte, 9 × 3 que dá 27 aí pra não ficar uma conta muito confusa eu não faço com 90, é... Só com o primeiro número.
Pesquisadora: Entendi.
Estudante 9: Dá 270 aí...
Estudante 10: Mais 150...
Estudante 9: Que deu...
Estudante 10: 420.
Estudante 9: É.
Pesquisadora: Vocês continuaram multiplicando e depois somaram.
Estudante 9: É.
Pesquisadora: Como vocês realizaram os cálculos nas questões anteriores?
Estudante 9: Multiplicando e somando.
Pesquisadora: E na última pergunta?
Estudante 9: Multiplicando e somando também.
Pesquisadora: O que vocês entenderam nessa última pergunta?
Estudante 9: Aqui é esse 'podemos' que dá a dica.... Que é multiplicando e somando.
Pesquisadora: Mas seria multiplicando e somando o quê?
Estudante 9: Tipo, ela fez 100 sanduíches e o gasto de 3 reais cada um ia dar 300 reais que é da multiplicação com mais o 150 aí que entra a parte da adição.
Pesquisadora: Ah entendi. Muito bem pessoal.
Fim de gravação.



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

R$ 63 reais

5 × 7 = 35; 4 × 7 = 28; 35 + 28 = 63

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

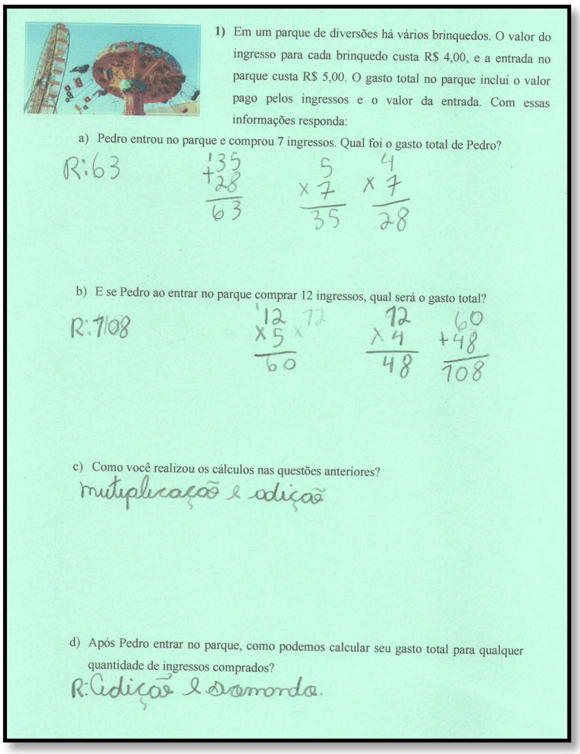
R$ 108 reais

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Ele multiplicação e adição

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

Adição (somando)



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

R:63

35 + 28 = 63; 5 × 7 = 35; 4 × 7 = 28

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

R:108

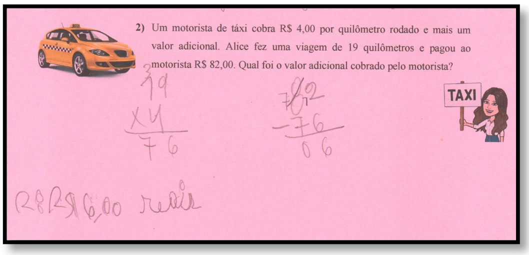
12 × 5 = 60; 12 × 4 = 48; 60 + 48 = 108

c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

multiplicação e adição

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

R: Adição e somando.

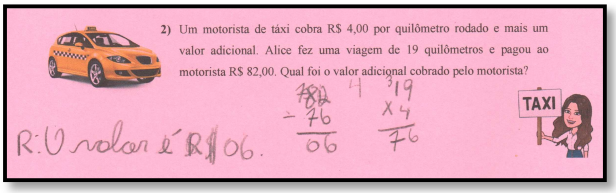


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

19 × 4 = 76

82 − 76 = 06

R$ R$ 6,00 reais

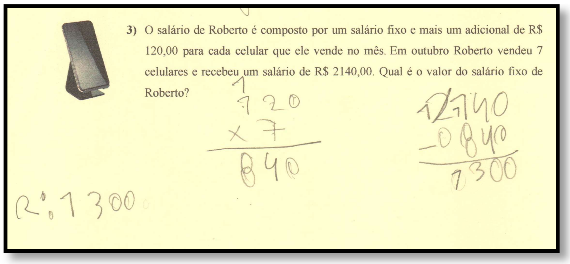


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?

R: O valor é R$ 06.

82 − 76 = 06

19 × 4 = 76

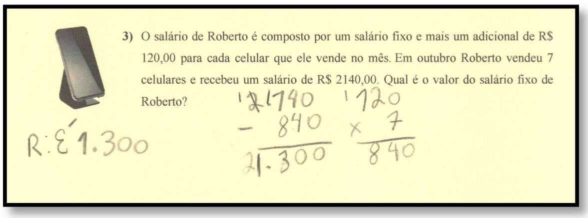


3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?

120 × 7 = 840

2140 − 0840 = 1300

R: 1300

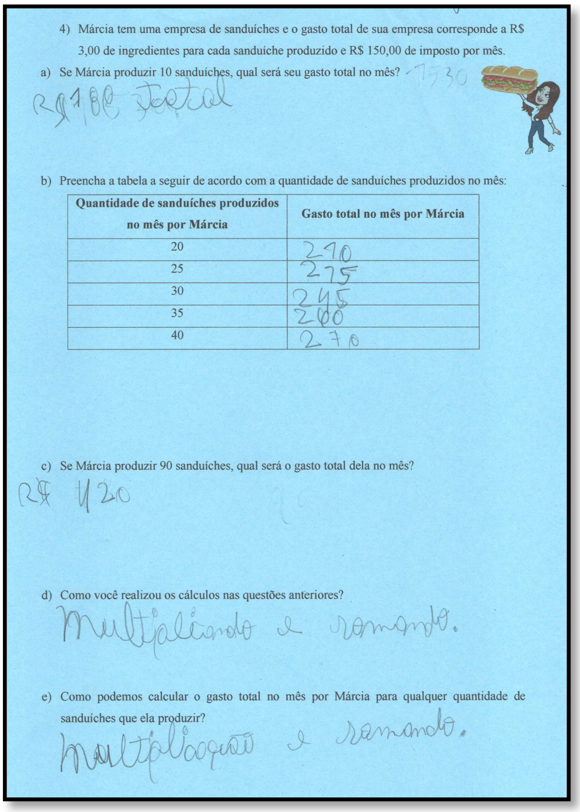


3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?

R: É 1.300

2140 − 840 = 1.300

120 × 7 = 840



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

R$ 180 total

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	210
25	215
30	245
35	260
40	270

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

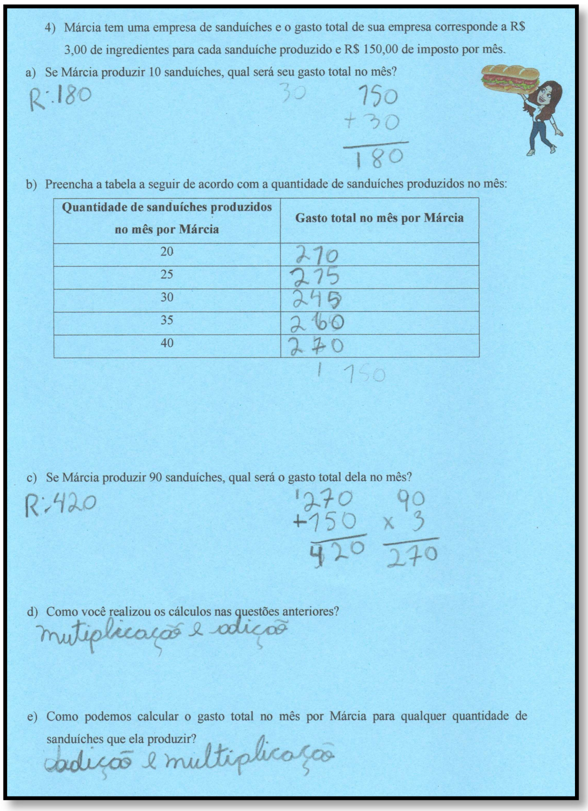
R$ 420

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Multiplicando e somando.

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

Multiplicação e somando.



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

R: 180

150 + 30 = 180

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	210
25	215
30	245
35	260
40	270

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

R: 420

270 + 150 = 420

90 × 3 = 270

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

multiplicação e adição

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

adição e multiplicação

APÊNDICE IX – TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS E PROTOCOLOS ESCRITOS – GRUPO 6

A estudante 13 inicia a leitura do problema 1 para o seu grupo.
Estudante 12: Primeiro a gente vai ter que resolver.
Estudante 11: 4×7. É 4 vezes o 7, mas vai que não é, vai que vocês acham que não é. Vocês não acham que é 4×7?
Estudante 13: Ó a gente tem que ver os ingressos. Cada ingresso custa 4 reais e ele comprou 7.
Estudante 12: Não... A é ta certo ta certo. Ele entrou no parque e comprou 7 então é 7×4.
Estudante 13: 4 vezes o 7 embaixo.
Estudante 11: 4 reais vezes o 7.
Estudante 13: 7 vezes o 4?
Estudante 11: 28.
Estudante 13: Como assim a resposta?
Estudante 11: O gasto total de Pedro foi... Não.
Estudante 13: O quê?
Estudante 11: Apaga, apaga tudo. Não esta certo. Ele entrou no parque e comprou 7 ingressos, aqui custa 5 reais.
Estudante 13: Mais 5 tem que fazer.
Estudante 11: $28 + 5$. $8 + 5$ é 13. 33 reais aqui. O gasto total de Pedro foi 33 reais.
Estudante 13: O gasto foi de 33 reais.
Estudante 11: Eu coloquei 'o gasto total de Pedro foi 33 reais'.
Estudante 12: O gasto total de Pedro?
Estudante 13: Eu esqueci de colocar 'total'.
Estudante 13: Pedro com letra maiúscula ta?
A estudante 11 lê o enunciado da questão "b" do problema 1.
Estudante 11: É 12×7 mais 5.
Estudante 13: Não, vezes 4.
Estudante 11: Ô, ô, vezes 12. É porque eu confundi com o 7.
Estudante 13: 48.
Estudante 11: Agora $48 + 5$. Aí depois o resultado vai dar 53.
Estudante 13: 53 né?
Estudante 11: Haram.
Estudante 13: O que eu coloco na resposta?
Estudante 11: O gasto total será 53 reais.
Estudante 11: Como que nós vamos responder a "c"?
Estudante 13: Primeiro a gente leu a questão e foi fazendo a conta e depois a gente percebeu que ele já tinha entrado no parque...
Estudante 11: Interpretamos a questão...
Estudante 13: Vamos fazer a "d", depois a gente volta para essa daqui.
A estudante 13 lê o enunciado da questão "d".
Estudante 13: $53 + 33$.
Estudante 11: Ham? Ah é verdade.
Estudante 13: O total dá 86.
Estudante 11: O gasto total... (a estudante termina de responder a questão "d" em silêncio).
Estudante 11: Na "c" coloca... Ah já colocou? Interpretamos a questão...
Estudante 13: Espera aí.
Estudante 11: Ó, aí a gente viu que... Multiplicou os ingressos mais 5. A gente multiplicou os ingressos e depois adicionou... Multiplicamos os ingressos e depois juntamos com mais 5 da entrada. O valor que ele gastou...
Estudante 13: Como se escreve 'questão'?
Estudante 11: 'Q' 'u' 'e' 's' 't' 'a' 'o'.
Estudante 13: Ham...
Estudante 11: Multiplicamos... E acento.
Estudante 13: Multiplicamos o valor dos ingressos... Pela quantidade dos ingressos e juntamos com 5 reais da entrada e descobrimos o valor total... Só isso.
Estudante 11: E juntamos mais 5...
Estudante 13: E chegamos no resultado... Professora terminamos!

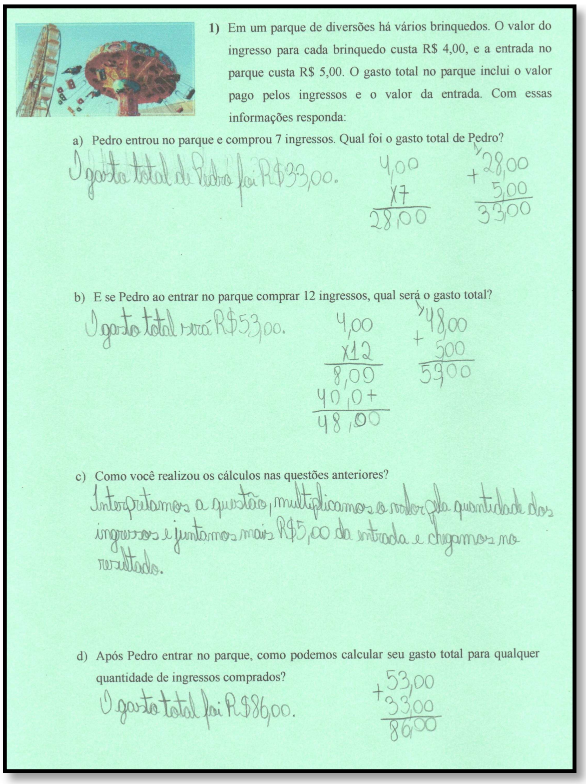
Pesquisadora: Vamos lá meninas. O que vocês fizeram na número 1? Tô vendo aqui que vocês fizeram uns cálculos...
Estudante 11: Como ele comprou 7 ingressos e o valor do ingresso é 4 reais a gente fez isso pra saber quanto que dá o valor de 7 ingressos aí depois a gente colocou mais 5 reais porque Pedro entrou no parque e custa 5 reais, aí a gente fez pra saber quanto que ele gastou.
Pesquisadora: Entendi. E na letra "b
Estudante 11: A mesma coisa só que mudou os números. Aí aqui é 12.
Pesquisadora: Ah entendi. E na letra "c"?
Estudante 11: A gente interpretou a questão, multiplicamos o valor pela quantidade dos ingressos e juntamos mais 5 reais da entrada e chegamos no resultado.
Pesquisadora: Entendi. E na letra "d"? Tô vendo aqui que vocês somaram os resultados da letra "a" e "b" e deu 86 reais. Por que vocês fizeram assim?
Estudante 11: Nós somamos $53 + 33$ porque estava perguntando qual é o gasto total, então a gente somou esses dois resultados.
Pesquisadora: Ah entendi. Beleza então gente.
Estudante 11: Posso ler agora?
Estudante 13: Haram.
A estudante 11 lê o problema 2 pra o seu grupo.
Estudante 13: 19×4 e depois menos.
Estudante 11: Menos 82?
Estudante 13: Haram.
Estudante 13: 9×4?
Estudante 11: 36... Aí agora menos 82.
Estudante 13: Dá...
Estudante 11: 76.
Estudante 13: 76 né... 82 vírgula zero zero menos...
Estudante 12: $76 - 82$?
Estudante 11: $82 - 76$.
Estudante 13: Não dá pra tirar 6 de 2 então vai ter que riscar, fica 7...
Estudante 11: Deu 6 reais.
Estudante 12: Deu 8 reais.
Estudante 13: Por quê?
Estudante 11: Ó, $12 - 6$ é 6... O valor adicional cobrado pelo motorista... Pronto agora ta certo.
Estudante 13: A resposta, como faz a resposta?
Estudante 11: O valor adicional cobrado pelo motorista foi 6 reais.
Estudante 13: Professora, terminamos.
Pesquisadora: Terminaram? Ta só um pouquinho.
A estudante 13 revisa o que foi realizado na resolução do problema para apresentar à pesquisadora. A estudante 11 ajuda a estudante 13 na revisão.
Estudante 13: A taxa cobrada pelo motorista é de 4 reais e a Alice fez uma viagem de 19 quilômetros aí nós multiplicamos 19 por 4...
Estudante 11: Pra saber.
Estudante 13: Pra saber. Aí depois a gente fez 82 que é o valor que ela pagou menos 76 e o resultado deu 6.
Estudante 11: Então o valor...
Estudante 13: Então o valor adicional foi 6 reais.
Estudante 11: O valor adicional cobrado pelo motorista...
Estudante 13: Ta. O valor adicional foi 6 reais.
Pesquisadora: Vamos lá meninas, demorei mas cheguei. Quem que vai explicar?
Estudante 11: Ela.
Pesquisadora: Então vamos lá.
Estudante 13: Professora a gente leu o problema, interpretou, a gente viu que o quilômetro rodado era 4 reais e a gente viu também que ela andou 19 quilômetros, então a gente multiplicou 19 quilômetros por 4 e o resultado deu 76. Aí a gente fez 82, que ela pagou, menos 76 reais, aí a gente colocou que o valor adicional cobrado pelo motorista foi 6 reais.
Pesquisadora: Meninas, por que vocês fizeram $82 - 76$. O que levaram vocês pra fazer essa conta? Vocês sabem me dizer?
Estudante 11: Porque tipo assim, pra gente saber... Que adicionou um pouquinho mais alto do preço... Tipo assim como se ela fosse pagar 76, aí ele adicionou mais 6 que deu 82, no caso $82 - 76$.
Pesquisadora: Entendi. Ok meninas. Podem entregar que eu vou entregar a número 3, essa amarelinha.
A estudante 12 faz a leitura do problema 3 para o seu grupo.

Estudante 12: Nós vamos ter que fazer assim, 7 vezes o 120 e diminuir de 2140.
Estudante 13: Vamos lá então.
Estudante 11: Espera aí... Ou não é que ele recebe um salário fixo e mais um adicional?Aí ele ganhou 7 vezes... Espera... Qual é o valor do salário fixo de Roberto?
Estudante 12: Vamos fazer do jeito que eu falei, vai que ta certo. Eu tinha falado 120×7 o total que der menos 2140.
Estudante 11: É porque 120 é o que ele adiciona no salário, então por que vezes 7?
Estudante 12: Pra diminuir com o 2140 pra saber o salário entendeu.
Estudante 13: Vamos fazer assim, cada um faz um e depois cada um explica o seu.
Estudante 11: Calma... Faz, eu vou fazer assim.
Estudante 12: Será que não de dividir? 7 dividido por 2140 ou 7 dividido por 120?
Estudante 11: Ó se 120 é o que ele adicionou no salário... Vamos fingir que ele recebe 120 de salário fixo e o adicional foi 120 reais, ele fica com 240 de salário. Mas ó, será que esse daqui é junto com o adicional que ele recebeu? Porque eu não sei, ele vendeu 7 celulares e recebeu....
Estudante 13: Olha aqui, em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário, ele já recebeu uma quantia, entendeu?
Estudante 12: Que é 120.
Estudante 13: Então, aí a gente vai fazer essa conta aqui e o que der aqui a gente vai fazer menos esse daqui... Menos 2140 pra saber...
Estudante 11: O salário dele.
Estudante 13: Exatamente.
Estudante 11: O salário fixo.
Estudante 12: Viu, vai eu estava certa.
Estudante 11: Mas eu não falei que estava errado, eu só falei que ia fazer...
Estudante 13: Mas eu expliquei melhor do que ela, porque ela falou faz isso daí e pronto.
Estudante 11: É, isso é.
Estudante 13: 7×2 igual a 14... Sete, oito, nove... Ta, dá 940.
Estudante 12: Espera eu.
Estudante 11: Dá 840.
Estudante 13: 940.
Estudante 11: 7×1 7com 1 que subiu, 8.
Estudante 13: 7×2 é 14!
Estudante 12: Dá 8840.
Estudante 11: Por que 2? É 24?
Estudante 12: Dá 840.
Estudante 13: É mesmo. Agora a gente vai fazer esse valor aqui menos esse daqui. Como é de menos eu coloco o maior em cima.
Estudante 12: Deu 1300.
Estudante 11: 130.
Estudante 12: Por quê?
Estudante 11: Por causa dos reais.
Estudante 13: 1300 e vocês?
Estudante 12: O meu também deu 1300.
Estudante 11: Mas por quê? O meu deu 130!
Estudante 12: Como que vai dar 130 de $2140 - 840$?
Estudante 11: $2140 - 840$... Ta zero menos zero, zero, zero zero, $4 - 4$, 0, $11 - 8$... 8, 9, 10, 11... 8... 3... Um menos nada um.
Estudante 12: Viu.
Estudante 11: Tinha esquecido de colocar o zero.
Estudante 13: Agora a resposta. O valor do salário fixo de Roberto...
Estudante 11: Espera, eu vou fazer uma... Uma.... Como é que chama? Uma correção pra ver se esta certo mesmo. Na conta de dividir, se ele recebe 120. Vamos fazer $1300 + 120$ pra vê se fica 2140, pra ver se esse é o valor fixo dele mesmo.
Estudante 13: Não precisa não, vamos pra resposta.
Estudante 11: Ah então ta, eu não.
Estudante 12: Vamos deixar ela fazer... Vai que ta errado...
Estudante 11: O que eu falei que eu ia fazer?
Estudante 12: $1300 + 120$, pra vê se dá 2140, pra ver se o resultado ta certo.
Estudante 13: Não dá.
Estudante 11: Não dá.

Estudante 12: Dá 420... Não, 520.
Estudante 11: Dá 420... Mas talvez, talvez, não esteja certo, mas isso foi o que a gente conseguiu.
Estudante 12: O salário fixo de Roberto é...
Estudante 13: O valor do salário fixo...
Estudante 11: O valor do salário fixo de Roberto é...
Pesquisadora: Mais alguém terminou?
Estudante 13: Nós, professora.
Estudante 11: Não, eu to escrevendo ainda.
Estudante 12: Professora estava perguntando assim que o salário de Roberto é composto por um salário fixo e um adicional, esse 120 é adicionado no salário. Aí a gente resolveu fazer assim, 120×7 pra ver se dava um valor tipo perto de 2 mil, aí deu 840. Aí a gente resolveu fazer uma conta assim, uma conta de subtração, de menos, que é $2140 - 840$ pra ver se dava o salário fixo mesmo de Roberto, aí deu 1300 de salário fixo do Roberto.
Estudante 11: Talvez não esteja certo porque a gente achou muito difícil. A gente lutou muito pra conseguir... (Risos).
Pesquisadora: E qual foi a dificuldade de vocês meninas?
Estudante 13: Porque a gente achou que não era esse resultado, aí a gente fez outra conta que ficou pior ainda.
Pesquisadora: Mas vocês olharam esse resultado e acharam que era esse por quê?
Estudante 11: Bom porque assim, se o salário fixo dele, ele recebe mais 120, aí a gente ficou meio em dúvida se é 7×120 mesmo, aí a gente fez assim.
Estudante 12: Porque assim, a gente viu que não era nem de mais e nem de dividir, ela fez ali de mais e não deu e a gente viu que de dividir não ia dar também, então a gente resolveu fazer de menos
Estudante 11: Eu fiz de mais pra ver se o resultado estava certo e ficou pior ainda.
Pesquisadora: Entendi. O que significa pior ainda?
Estudante 11: Porque a gente fez $1300 + 120$ pra ver se esse era o salário dele mesmo e deu pior ainda.
Pesquisadora: Entendi... Então vocês concluíram que o salário fixo de Roberto é de 1300 reais?
Estudante 11: Hurum.
Pesquisadora: Então ta meninas, beleza. Podem entregar essas folhas e eu vou entregar o último problema.
A estudante 13 inicia a leitura do problema 4 para o seu grupo.
Estudante 12: Ó Márcia tem uma empresa de sanduíches né e o gasto total da sua empresa, tipo assim, o gasto total correspondente do sanduíche é 3 reais...
Estudante 13: 150×10 vai.
Estudante 11: Não, esperai, deixa eu ver se esta certo, porque eu não sei se eu tenho certeza. Ó, se ela produz 3 reais e dá 150 todo mês e se ela produzir 10 sanduíches, então é 150×10... 150×10 ok!
Estudante 12: Deu 15 mil.
Estudante 13: Dá 15 mil?
Estudante 12: Eu acho que é 1500.
Estudante 11: É 1500 e não 15 mil.
Estudante 13: Gente o meu deu 15 mil também.
Estudante 11: Dá 1500.
A estudante 11 lê o enunciado da questão "b" do problema 4.
Estudante 11: Nossa, lê a "b" pra vê se vocês entendem....
A estudante 12 lê o enunciado.
Estudante 11: Ah é 3 reais de ingredientes, se ela fez 20 tem que fazer 3×20?
Estudante 13: É.
Estudante 11: Vamos ver se vai dar mesmo.
Estudante 12: É.
Estudante 11: Espera aí.
A estudante 11 pede ajuda para o estudante 1 para ver se essa questão esta correta. O estudante 1 responde que não lembra a resposta mas menciona que elas teriam que somar com 150.
Estudante 11: Ó tem que fazer 20×3 mais 150...
Estudante 13: Que conta tem que fazer aqui?
Estudante 11: 3 reais vezes 20, depois tem que fazer mais 150.
Estudante 13: Dá 60?
Estudante 11: Sim. Agora mais 150... É 210.
Estudante 13: Ta certo.
Estudante 11: Agora tem que fazer 3 reais vezes 25 e mais 150. (Alguns segundos depois) Vai dar 75 a de 25.
Estudante 13: Aí depois a gente vai fazer $75 + 150$.
Estudante 11: Isso...
Estudante 13: Ta muito complicado.

Estudante 11: Vai dar 227 ta... Você quer que eu te ajude?
Estudante 13: Quero.
Estudante 11: Ó 25×3... (a estudante 11 sai do seu lugar para ajudar a estudante 13 nos cálculos). Esta conseguindo fazer?
Estudante 12: Sim.
Estudante 11: É só fazer na primeira 20×3 mais 150, dá 210. A do 25 dá 227. Agora 30×3... 9... 90.
Estudante 12: 90.
Estudante 13: Qual que é do 30 amiga?
Estudante 11: Eu to fazendo. Ainda tem que somar 150 com mais 90... Você não somou (a estudante 11 estava se dirigindo à estudante 12). Deixa que eu somo.
Estudante 12: Ta. Eu vou fazendo a do 35×3.
Estudante 11: Ta.
Estudante 12: A do 35 é 255.
Estudante 11: A do 35 é quanto?
Estudante 12: 255.
Estudante 11: A do 30 deu 240.
Estudante 13: 270, a do 40.
Estudante 11: Ta.
Estudante 13: Vocês já fizeram a do 35?
Estudante 11: Já, é 255.
Estudante 13: E a do 30?
Estudante 11: É... 240.
A estudante 11 inicia a leitura do enunciado da questão "c" do problema 4 para o seu grupo.
Estudante 11: Então é 90 sanduíches vezes 3 mais 150.
Estudante 12: Não.
Estudante 11: Sim, porque ela paga 150 de imposto.
Estudante 12: 270... $270 + 150$.
Estudante 13: 9×3 é quanto gente?
Estudante 11: 27.
Estudante 12: 27.
Estudante 11: Agora $150 + 270$.
Estudante 12: 420.
Estudante 11: Ta bom. Só vou terminar de fazer.
Estudante 13: $150 + 270$?
Estudante 11: Haram.
Estudante 12: É, que dá 420.
Estudante 11: Qual será o gasto total dela no mês? O gasto total dela vai ser 420 reais.
A estudante 13 inicia a leitura da questão "d" e é interrompida pela estudante 11.
Estudante 11: Espera aí menina... Vamos fazer a letra "e" primeiro igual aquela hora?
Estudante 12: Vamos.
A estudante 11 lê a questão "e" do problema 4.
Estudante 12: Fazendo a conta de mais.
Estudante 11: Não precisa fazer tudo, é como calcular, não ta perguntando quanto que foi.
A estudante 13 lê o enunciado novamente.
Estudante 11: Então, não é pra calcular. (A estudante 11 lê o enunciado da questão "e" novamente).
Estudante 12: Professora, esse daqui é só escrever?
Estudante 11: A gente não pode perguntar.
Pesquisadora: Mas podem falar o que vocês estão pesando.
Estudante 11: Ó, a gente não sabe se é pra fazer...
Pesquisadora: Qual questão vocês estão?
Estudante 13: Aqui, na última.
Estudante 11: Aí a gente não sabe se é pra fazer a conta, ou se é pra escrever que conta que tem que fazer.
Pesquisadora: Ta, primeiro, o que vocês entenderam que esta pedindo aqui?
Estudante 11: Como que a gente pode fazer a conta do gasto total no mês por Márcia pra qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir.
Pesquisadora: Certo. Como que a gente pode fazer?
Estudante 11: Com a conta de adição. Vai ter que fazer a conta daí?
Pesquisadora: Deixa eu tentar entender, vocês não sabem se é pra fazer a conta ou se é pra escrever, é isso?
Estudante 11: Isso.

Pesquisadora: Então ta, deixa eu entender o que vocês estão querendo somar e o que vocês querem escrever sem as contas? O que vocês estão querendo somar?
Estudante 11: Somar...
Estudante 13: Todos.
Estudante 11: Esses daqui e esses... Ah não acho que é só esses daqui (apontando para os valores preenchidos na tabela).
Estudante 13: E o 120.
Estudante 11: Não, espera, mas o gasto total dela é esse.
Pesquisadora: O que vocês estão entendendo por gasto total?
Estudante 11: Todo o gasto que ela tem no mês.
Pesquisadora: Entendi. A tabelinha vocês preencheram, como vocês fizeram para preencher?
Estudante 11: A gente fez 20 vezes 3 reais, que foi o que ela gasta com ingredientes, aí mais 150 que é o imposto que ela paga no mês.
Pesquisadora: Entendi. E isso vocês fizeram para todos da tabela, com 25, 30, 35 e 40?
Estudante 11: Sim.
Pesquisadora: Beleza, entendi. E na letra "c" como vocês fizeram?
Estudante 11: 3 reais vezes 90 sanduíches, 3 reais é o que ela gasta, aí a gente somou aqui com 150, por causa do imposto dela.
Pesquisadora: Ah entendi. E nessa daqui? Como vocês realizaram os cálculos nas questões anteriores?
Estudante 11: Usando conta de multiplicação e adição.
Pesquisadora: Ok. E na letra "e" é o que vocês estavam discutindo né?
A estudante 11 lê novamente o enunciado da questão "e".
Estudante 11: Aqui esta falando se Márcia produzir 10 sanduíches, então vamos fingir que esse daqui não existe.
Estudante 12: Não é melhor a gente escrever que conta fazer ao invés de fazer todas contas?
Estudante 13: Mas se a gente não sabe que conta fazer, como vamos escrever?
Estudante 11: Somando todos os resultados da "b".
Estudante 13: Somando tudo.
Estudante 11: Como podemos falar dos resultados da "b"?
Estudante 13: Somando tudo. Somando a "b" e a "c".
Estudante 11: Mas não é tudo, é só da "b" porque a "c" também é 'se ela produzir'.
A estudante 12 lê novamente o enunciado da questão "e".
Estudante 11: Usando os resultados... Não... Somando todos os resultados...
Estudante 12: Da "b".
Estudante 11: Da "b".
Pesquisadora: Só pra ver se eu entendi o raciocínio de vocês... Vocês acham que nessa daqui o gasto total vai ser somando esse porque na letra "a" e na letra "b" é só se ela produzir, então vocês estão considerando que ela produziu somente os sanduíches que estão contidos na tabela?
Estudante 11: Sim, porque aqui esta escrito os sanduíches produzidos por Márcia, e nos outros é se ela produzir.
Pesquisadora: Ah entendi meninas. Beleza então meninas, podem colocar os nomes de vocês aí na folha e entregar. Muito obrigada!
Fim de gravação.



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

O gasto total de Pedro foi R$33,00.

4,00 x 7 = 28,00
28,00 + 5,00 = 33,00

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

O gasto total será R$53,00.

4,00 x 12
8,00
40,0+
48,00

48,00 + 5,00 = 53,00

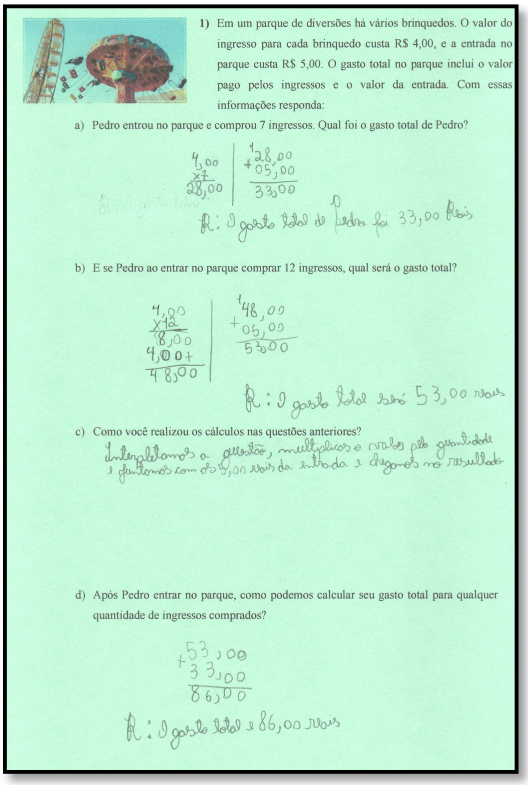
c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Interpretamos a questão, multiplicamos o valor pela quantidade dos ingressos e juntamos mais R$5,00 da entrada e chegamos no resultado.

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

O gasto total foi R$86,00.

53,00 + 33,00 = 86,00



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

4,00 x 7 = 28,00 | 28,00 + 05,00 = 33,00

R: O gasto total de Pedro foi 33,00 Reais

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

4,00 x 12
8,00
4,00+
48,00

48,00 + 05,00 = 53,00

R: O gasto total será 53,00 reais

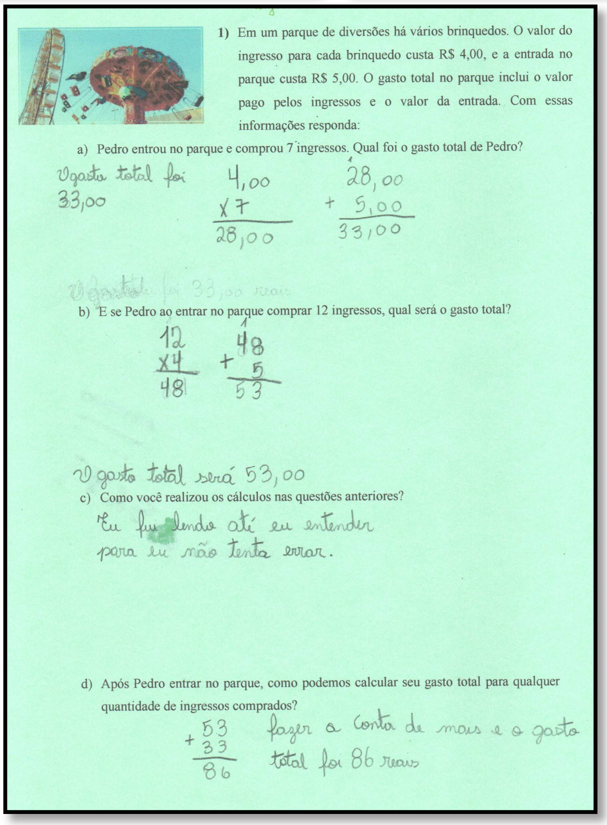
c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Interpretamos a questão, multiplicamos o valor pela quantidade e juntamos com os 5,00 reais da entrada e chegamos no resultado

d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

53,00 + 33,00 = 86,00

R: O gasto total é 86,00 reais



1) Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?

O gasto total foi 33,00

4,00 x 7 = 28,00
28,00 + 5,00 = 33,00

O gasto total foi 33,00 reais

b) E se Pedro ao entrar no parque comprar 12 ingressos, qual será o gasto total?

12 x 4 = 48
48 + 5 = 53

O gasto total será 53,00

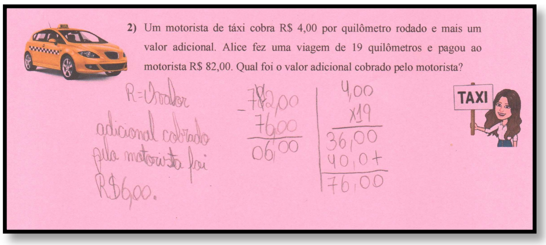
c) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

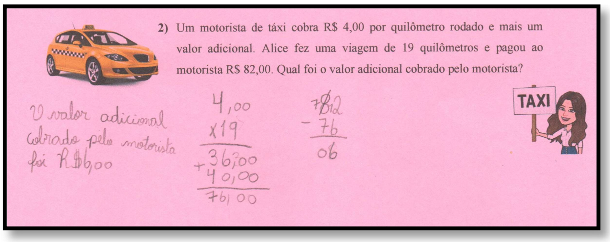
Eu fui lendo até eu entender para eu não tenta errar.

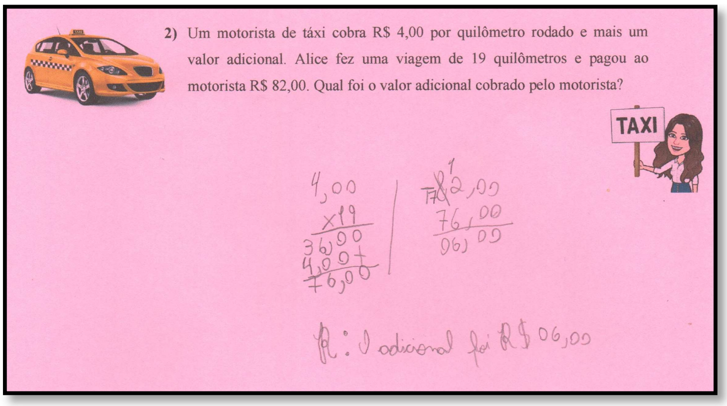
d) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular seu gasto total para qualquer quantidade de ingressos comprados?

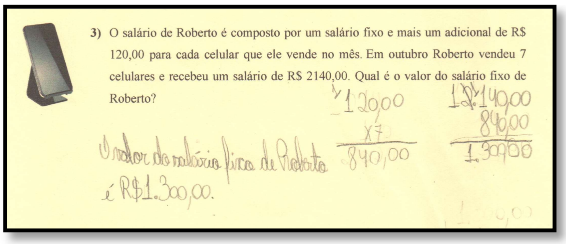
53 + 33 = 86

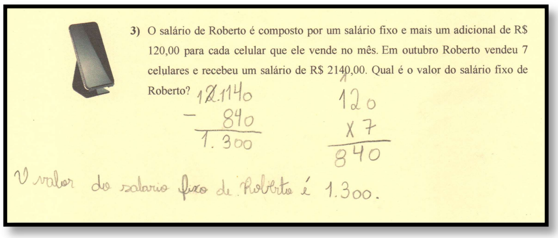
fazer a conta de mais e o gasto total foi 86 reais

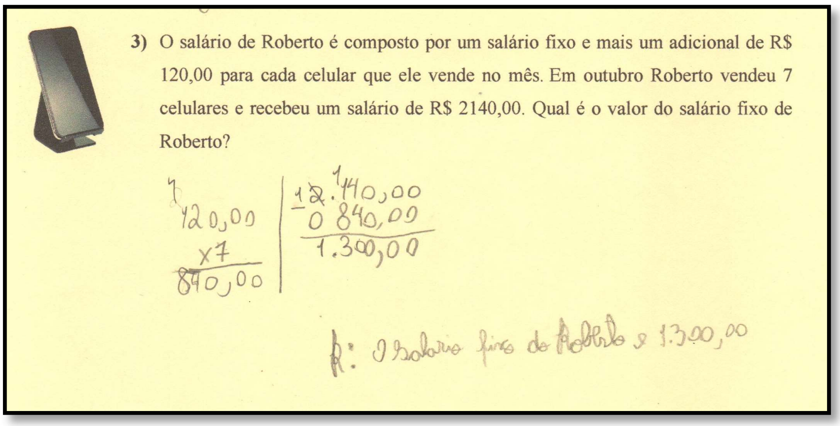

2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?
TAXI
R= O valor adicional cobrado pelo motorista foi R$6,00.

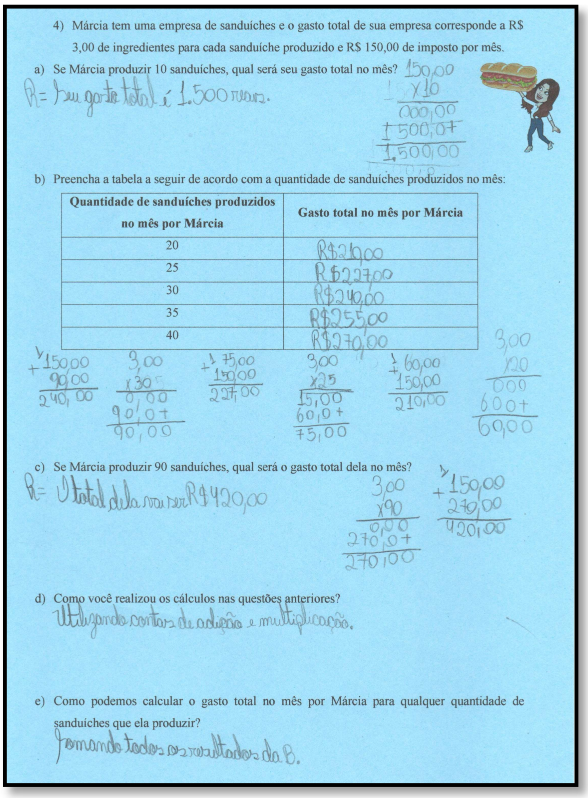

2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?
TAXI
O valor adicional cobrado pelo motorista foi R$6,00


2) Um motorista de táxi cobra R$ 4,00 por quilômetro rodado e mais um valor adicional. Alice fez uma viagem de 19 quilômetros e pagou ao motorista R$ 82,00. Qual foi o valor adicional cobrado pelo motorista?
TAXI
R: O adicional foi R$ 06,00


3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?
O valor do salário fixo de Roberto é R$1.300,00.


3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?
O valor do salario fixo de Roberto é 1.300.


3) O salário de Roberto é composto por um salário fixo e mais um adicional de R$ 120,00 para cada celular que ele vende no mês. Em outubro Roberto vendeu 7 celulares e recebeu um salário de R$ 2140,00. Qual é o valor do salário fixo de Roberto?
R: O salario fixo de Roberto é 1.300,00



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

R= Seu gasto total é 1.500 reais.

150,00 x 10 = 1.500,00

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$210,00
25	R$227,00
30	R$240,00
35	R$255,00
40	R$270,00

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

R= O total dela vai ser R$420,00

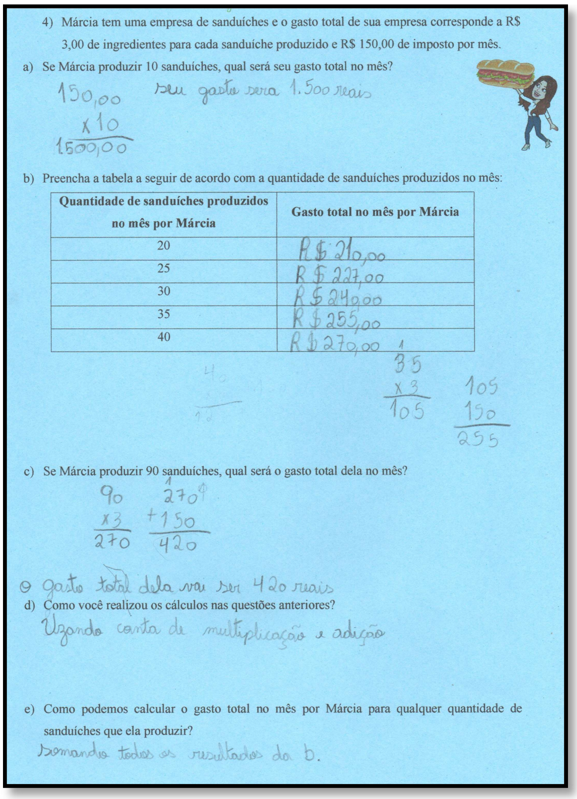
3,00 x 90 = 270,00; 150,00 + 270,00 = 420,00

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Utilizando contas de adição e multiplicação.

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

Somando todos os resultados da B.



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

150,00 x 10 = 1500,00

seu gasto sera 1.500 reais

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$ 210,00
25	R$ 227,00
30	R$ 240,00
35	R$ 255,00
40	R$ 270,00

35 x 3 = 105; 105 + 150 = 255

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

90 x 3 = 270; 270 + 150 = 420

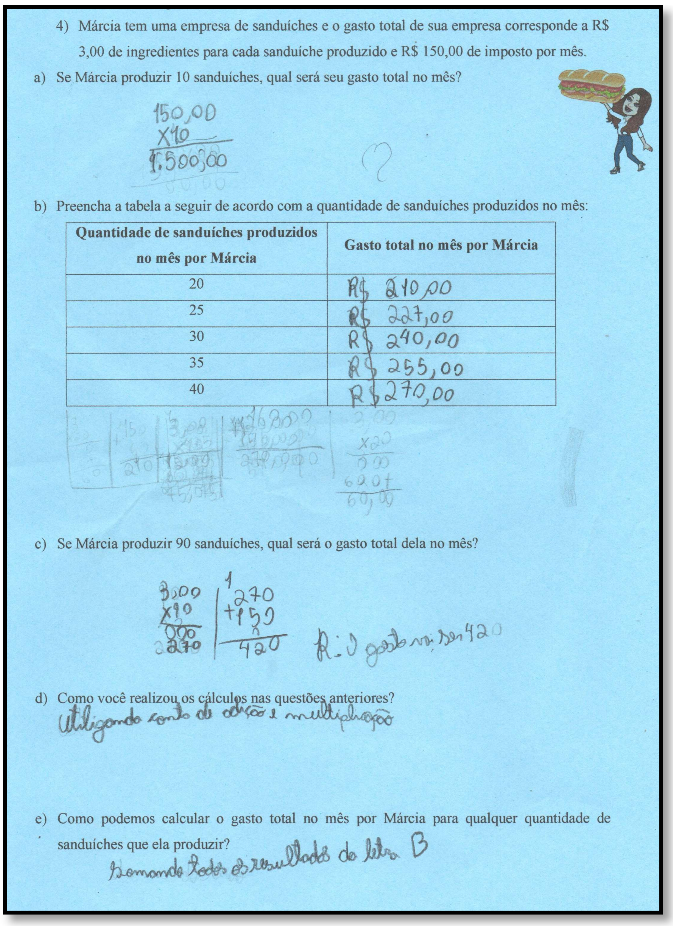
o gasto total dela vai ser 420 reais

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Uzando conta de multiplicação e adição

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

Somando todos os resultados da b.



4) Márcia tem uma empresa de sanduíches e o gasto total de sua empresa corresponde a R$ 3,00 de ingredientes para cada sanduíche produzido e R$ 150,00 de imposto por mês.

a) Se Márcia produzir 10 sanduíches, qual será seu gasto total no mês?

150,00 x 10 = 1.500,00

b) Preencha a tabela a seguir de acordo com a quantidade de sanduíches produzidos no mês:

Quantidade de sanduíches produzidos no mês por Márcia	Gasto total no mês por Márcia
20	R$ 210,00
25	R$ 227,00
30	R$ 240,00
35	R$ 255,00
40	R$ 270,00

c) Se Márcia produzir 90 sanduíches, qual será o gasto total dela no mês?

3,00 x 90 = 270; 270 + 150 = 420

R: O gasto vai ser 420

d) Como você realizou os cálculos nas questões anteriores?

Utilizando conta de adição e multiplicação

e) Como podemos calcular o gasto total no mês por Márcia para qualquer quantidade de sanduíches que ela produzir?

Somando todos os resultados da letra B