UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA PARA A CONSTRUÇÃO DE MEDIDAS DE PERÍMETRO E ÁREA DO FRACTAL ILHA DE KOCH

Vinícius Murilo Fratucci

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

PRPGEM

PRPGEM

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNESPAR

Universidade Estadual do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARANÁ - UNESPAR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - PRPGEM

UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA PARA A CONSTRUÇÃO DE MEDIDAS DE PERÍMETRO E ÁREA DO FRACTAL ILHA DE KOCH

Vinícius Murilo Fratucci

Orientadora:
Profa. Dra. Mariana Moran

Apoio: Capes

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná, linha de pesquisa: Conhecimento, linguagens e práticas formativas em Educação Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Mourão
Março/2022

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UNESPAR e Núcleo de Tecnologia de Informação da UNESPAR, com Créditos para o ICMC/USP e dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Fratucci, Vinícius Murilo
Uma organização praxeológica para a construção de medidas de perímetro e área do fractal Ilha de Koch. / Vinícius Murilo Fratucci. -- Campo Mourão-PR,2022.
146 f.: il.

Orientador: Mariana Moran.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Paraná, 2022.

1. Educação Matemática. 2. Praxeologia Matemática. 3. Geometria Fractal. 4. Didática. I Moran, Mariana (orient). II - Título.

Vinícius Murilo Fratucci

UMA ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA PARA A CONSTRUÇÃO DE MEDIDAS DE PERÍMETRO E ÁREA DO FRACTAL ILHA DE KOCH

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Mariana Moran - Presidente da Comissão Examinadora
Universidade Estadual Do Paraná – Unespar

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud - Membro da Banca
Universidade Federal do Pará – UFPA

Veridiana Rezende

Profa. Dra. Veridiana Rezende - Membro da Banca
Universidade Estadual do Paraná – Unespar

Resultado: APROVADO

Campo Mourão
Março/2022

Sapere aude! Tem coragem de fazer uso de seu próprio entendimento, tal é o lema do esclarecimento.

Immanuel Kant

AGRADECIMENTOS

Agradeço à agência de fomento Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo financiamento e apoio dessa pesquisa de mestrado.

Agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Mariana Moran, pelo carinho, atenção, suporte e auxílio durante a escrita da dissertação.

Agradeço a banca examinadora, Professor Doutor Saddo Ag Almouloud e Professora Doutora Veridiana Rezende, pelo auxílio e o cuidado que tiveram durante o processo de construção da pesquisa.

Agradeço aos meus familiares, que deram suporte para que eu conseguisse pleitear e continuar no mestrado em educação matemática.

Agradeço aos integrantes do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG, por estar presente e auxiliar na dissertação. Em especial, aos membros, Professora Mestre Vanessa Cristina Rhea, Valdirene Maria dos Santos e a acadêmica Maria Clara Sampaio Rodrigues, por estarem presentes e auxiliando durante a implementação da pesquisa.

Agradeço aos amigos e a todos que, de maneira direta ou indireta, me auxiliaram e se mantiveram presentes durante o desenvolvimento dessa pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da agência de fomento CAPES.

RESUMO

Esta pesquisa de mestrado objetiva-se em investigar, por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD), as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas de cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch, em que estamos norteados na seguinte questão de pesquisa: Quais as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas para o cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch? Consideramos que a pesquisa se constitui de uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo e, como aporte teórico da investigação, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual permitiu modelar o conhecimento por meio de OP e como metodologia, empregaremos a Engenharia Didática, uma vez que ela nos auxilia na construção e delineamento desta pesquisa. Desse modo, realizamos uma análise praxeológica de algumas situações em que o *software* GeoGebra pode ser utilizado para conduzir estudantes do 2º ano do Ensino Médio a construir e explorar o fractal proposto. Buscamos elaborar e analisar a Organizações Praxeológicas, identificando as praxeologias mobilizadas pelos estudantes. Como resultado, pudemos identificar tais praxeologias durante o desenvolvimento da pesquisa. Pudemos constatar os fatores que possibilitaram o desenvolvimento da OP em uma sala de aula. Portanto, a elaboração de uma Organização Didática para o ensino e aprendizagem de uma Organização Matemática possibilitou a identificação de conhecimentos prévios dos estudantes, como é o caso de noções básicas de geometria, a pertinência da (re)introdução da Geometria Fractal na Educação Básica e, também, a validade das Organizações Praxeológicas construídas para esta pesquisa.

Palavras-chave: Educação Matemática. Teoria Antropológica do Didático. Praxeologia Matemática e Didática. Geometria Fractal.

ABSTRACT

This master's research aims to investigate, through the Anthropological Theory of Didactics (ADT), the praxeologies mobilized by high school students during the construction of formulas for calculating measures of perimeter and area of the Island of Koch Fractal, in which we are guided by the following research question: What are the praxeologies mobilized by high school students during the construction of formulas for calculating measures of perimeter and area of the Island of Koch Fractal? We consider that the research is a qualitative approach of interpretive nature and, as theoretical support of the investigation, we use the Anthropological Theory of Didactics (ADT), which allowed modeling the knowledge through OP and as methodology, we use didactic engineering, since it helps us in the construction and design of this research. Thus, we conducted a praxeological analysis of some situations in which the GeoGebra software can be used to lead 2nd year high school students to build and explore the proposed fractal. We tried to elaborate and analyze Praxeological Organizations, identifying the praxeologies mobilized by the students. As a result, we could identify such praxeologies during the development of the research. We were able to verify the factors that enabled the development of the PO in a classroom. Therefore, the development of a Didactic Organization for teaching and learning a Mathematical Organization enabled the identification of students' previous knowledge, such as basic notions of geometry, the relevance of the (re)introduction of Fractal Geometry in Basic Education and, also, the validity of the Praxeological Organizations built for this research.

Keywords: Mathematics education. Anthropological Theory of Didactics. Mathematical Praxeology and Didactics. Fractal Geometry.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CREP – Currículo da Rede Estadual Paranaense

DCE – Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná

OD – Organização Didática

OM – Organização Matemática

OP – Organização Praxeológica

TAD – Teoria Antropológica do Didática

t - Tarefa

T – Tipo de Tarefa

τ – Técnica

θ – Tecnologia

Θ - Teoria

LISTA DE EQUAÇÕES

INTRODUÇÃO

Qual a razão de ser educador matemático? Por que a Educação Matemática? Entendo que esses questionamentos não são triviais para apresentar-se uma resposta, uma vez que a escolha por essa profissão está intrinsecamente ligada àquele que a escolhe, demandando reflexões profundas acerca de suas decisões.

Ao questionar-me[1] a respeito, compreendo que um educador matemático não é corriqueiro de ser ou algo que está pronto e acabado, mas sim, que está em constante evolução e se aprimorando cada vez mais para o ensino e aprendizagem da matemática. Desse modo, é possível pressupor que um educador matemático é um *exotérico*, pois este tem que estudar e aprender infinitamente, e ainda assim, não será detentor de todo o conhecimento (CHEVALLARD, 2012).

Com isso, um educador matemático deve permanecer estudioso para que possa aprimorar-se continuamente. Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 3) afirmam que um educador matemático "tende a conceber a matemática como um meio ou um instrumento importante à formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos, e do professor de matemática do ensino fundamental e médio e, por isso, tenta promover a educação *pela* matemática". Ou seja, quando o educador realiza uma relação entre a educação e a matemática, há um processo em que coloca a matemática a serviço da educação.

Para tanto, entendo que a minha razão de ser educador matemático está estritamente relacionada com o que foi apresentado, um ser *exotérico*, em que estou preocupado em realizar estudos que visem o desenvolvimento de conhecimentos e de práticas pedagógicas para contribuir para uma formação crítica e contínua, do professor e do estudante. Com isso, o motivo de escolher a Educação Matemática advém do entendimento apresentado, pois ela pode "*caracterizar-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos relativos* [...] *do saber matemático escolar* (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 4, grifo do autor).

Desse modo, entendemos que as ideias apresentadas anteriormente vão ao encontro da Teoria Antropológica do Didático (TAD), uma vez que o estudo da matemática está relacionado com todas as atividades humanas e instituições sociais existentes (CHEVALLARD, 1999).

---

[1] A fim de descrever percursos pessoais e profissionais do pesquisador, utilizamos os verbos conjugados na primeira pessoa do singular. Posteriormente a essa descrição, passamos a utilizar a primeira pessoa do plural considerando o pesquisador e sua orientadora como autores do presente trabalho.

Partindo dessa compreensão, Chevallard (1999) designa que há organizações (ou praxeologias) que são relacionadas a um estudo matemático, sendo destacadas por dois tipos: Matemática e Didática. A Organização Matemática refere-se à realidade matemática que pode ser construída numa disciplina de matemática a respeito de um conteúdo específico. No que se refere à Organização Didática, ela se associa à maneira como pode ser estudada a construção desta realidade matemática, ou seja, a forma como se pode realizar o estudo desse conteúdo específico.

À vista disso, a noção de praxeologia apresentada pela teoria envolve dois termos gregos: *práxis*, que significa "praticar" e *logos*, que significa "razão", "discurso fundamentado", de maneira que nos permite realizar análises desde uma situação de perspectiva teórica do saber com a sua perspectiva prática (saber-fazer).

Em razão do exposto, entendemos que a TAD é uma teoria relevante para os processos de ensino e aprendizagem, a qual adotaremos como embasamento teórico-metodológico dessa pesquisa, uma vez que possibilita a realização de outras pesquisas no âmbito de um estudo de Organizações Praxeológicas. Nesse sentido, "quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, deve-se em primeiro lugar observar os objetos, depois descrevê-lo, analisá-lo e avaliá-lo, para finalmente, desenvolver atividades que têm o objetivo de ensino e a aprendizagem desse objeto" (CHEVALLARD, 2002, *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 123).

Além do mais, com o desejo de abordar um objeto geométrico não euclidiano, que possibilite a aprendizagem de diversos assuntos matemáticos, a fim de consolidar a sua exploração. E, motivados pelo artigo de Silva e Almouloud (2013), que apresentam um estudo de uma Organização Didática para a construção de fórmulas para a medida de volumes de sólidos. Assim, propomos um estudo acerca da Geometria Fractal com especificidades no objeto matemático Fractal Ilha de Koch.

Uma vez que estamos nos amparando nos documentos oficiais Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008), Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), o Referencial Curricular do Paraná – RCP (PARANÁ, 2018) e o complemento deste documento, o Currículo da Rede Estadual do Paraná – CREP (PARANÁ, 2021), compreendemos que o estudo da Geometria Fractal, com base nos documentos oficiais, se torna um aliado para o ensino da Matemática por meio de sua inserção na Educação Básica.

Esses documentos dispõem que devem ser apresentadas, na Educação Básica, noções básicas da Geometria Não Euclidiana. As DCE descrevem que, no Ensino Médio, devem ser aprofundados "os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica", recomendando a exploração do

Floco de Neve de Koch e a Curva de Koch, como parte dos direcionamentos a respeito da Geometria Fractal (PARANÁ, 2008, p. 57).

O Referencial Curricular do Paraná (PARANÁ, 2018) é um documento que regionaliza os objetivos de aprendizagem apresentados pela BNCC, como forma de dar maior clareza ao RCP, organiza-se um documento complementar, o Currículo da Rede Estadual do Paraná (PARANÁ, 2021) com o intuito de dar suporte para o ensino do estado. Dessarte, ambos apresentam que no 9º ano do Ensino Fundamental, os estudantes devem "Identificar formas fractais e as características de autossimilaridade e complexidade infinita" (PARANÁ, 2018, 2021)[2].

No que concerne à BNCC do Ensino Médio, as competências específicas de Matemática, de acordo com a organização curricular, apresentam uma habilidade identificada neste documento por EM13MAT105[3], que objetiva "Utilizar as noções de transformações isométricas [...] e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras)" (BRASIL, 2018, p. 545).

Partindo dessa afirmação, observamos que os fractais são mencionados de modo breve e sucinto. Entretanto, essa maneira sintética de apresentar os fractais reafirma a necessidade de novos estudos com os fractais, em especial, nas aulas de Matemática, pois, conforme observamos nos documentos curriculares supracitados, os fractais apresentam poucas indicações para serem implementados em sala de aula.

Deste modo, propomos nesse texto de dissertação, promover "representatividade" aos fractais, isto é, mostrar que existe uma diversidade de estudos que podem ser promovidos por meio dos fractais. Para além, estabelecer um "lugar ao sol" para os fractais no que diz respeito ao estudo na Educação Básica. Assim, com essa pesquisa, podemos analisar que com a Geometria Fractal, podem ser trabalhados e explorados diversos conteúdos matemáticos por meio de um Fractal.

Ao nos depararmos com o currículo proposto para a educação, refletimos que o ensino da Geometria Não Euclidiana na Educação Básica enfrenta dificuldades para serem inseridas

---

[2] No caso do CREP, existe um código, assim como na BNCC, para identificar os objetivos de aprendizagem. Nesse caso, temos o seguinte código: PR.EF09MA17.d.9.64.

[3] As duas primeiras letras indicam a etapa do Ensino Médio. O primeiro par de algarismos (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio. Depois, MAT significa a componente curricular de Matemática e suas Tecnologias. E os algarismos finais, 105, indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência.

nessa etapa de formação dos estudantes. Pesquisas realizadas ao longo do tempo vêm constatando essas afirmações, como podemos verificar nas em Pavanello (1993), Perez (1991), Lorenzato (1993, 1995), Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), Gazire (2000), Passos (2000), Nacarato e Passos (2003), Vasconcellos (2008), Santos (2009) e Vejan e Franco (2009).

De acordo com Vejan e Franco (2009),

> Percebe-se que as noções de geometrias não-euclidianas têm sido negligenciadas nas aulas de matemática pela maioria dos professores, tanto no ensino fundamental como no ensino médio, não pelo descaso do professor, mas sim pelo fato dos mesmos não terem tido contato com essas geometrias em sua formação, considerando que a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática, não contempla este conteúdo em suas estruturas curriculares (VEJAN; FRANCO, 2009, p. 2-3).

Santos (2009) segue o mesmo entendimento, evidenciando a dificuldade de se abordar as Geometrias Não Euclidianas, pois “o problema com o ensino das Geometrias não-euclidianas envolve um problema mais amplo, já que os professores estão se formando, sem ao menos ter disciplinas voltadas à geometria no seu curso” (SANTOS, p. 121).

A respeito dessa temática, Clemente *et. al.* (2015) realizaram análises de 3 periódicos que tem relação com a área de Educação Matemática, sendo eles: Bolema, Gepem e Zetetiké, e constataram que, a partir do ano de 2010, houve um aumento considerado de trabalhos publicados na área de ensino de matemática Entretanto, ainda existem lacunas acerca de conhecimentos iniciais de geometrias, como é o caso da noção de reta, ponto, figura, dentre outras, a serem preenchidas e problemáticas a serem investigadas e discutidas. Deste modo, verifica-se que há ainda uma defasagem no que diz respeito ao ensino de Geometria.

Respaldando-nos em tais situações, a decisão pela abordagem da Geometria dos Fractais foi baseada em três características que Krause (1986) justifica como (1) ser muito próxima à geometria euclidiana em sua estrutura axiomática, (2) ter aplicações significativas, e (3) ser compreensível a qualquer um que tenha conhecimentos básicos em geometria euclidiana” (KRAUSE, 1986, *apud* RIBEIRO, 2012, p. 31).

Nesse sentido, entendemos que a Geometria dos Fractais traz contribuições significativas para o ensino da Matemática. Sallum (2005) acrescenta que essa Geometria é importante também para tratar outros conceitos matemáticos:

> A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma idéia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas (SALLUM, 2005, p. 1).

Assim, nos amparando nos documentos oficiais e nas pesquisas mencionadas, compreendemos que a utilização da Geometria dos Fractais se torna uma aliada relevante para o ensino da Matemática e sua inserção na Educação Básica, pois apresentará uma nova perspectiva do ensino de Matemática em sala de aula.

Por consequência, a nossa pesquisa, propõe que o *software* GeoGebra seja o ambiente de estudo dos Fractais, podendo favorecer as representações do objeto de estudo no contexto das Geometrias Não Euclidianas, além da possibilidade de construções, explorações e conjecturas.

Como forma de direcionar e subsidiar teoricamente a exploração do Fractal Ilha de Koch, abordaremos aspectos relacionados à Teoria Antropológica do Didático (TAD). Com essa teoria, procuramos realizar um estudo de Organizações Praxeológicas que dizem respeito a Organizações Matemáticas e Organizações Didáticas, em que realizaremos a construção de fórmulas de medidas de área e perímetro do Fractal Ilha de Koch, com alunos do Ensino Médio.

Nesse sentido, com tais apontamentos e contextualizações, realizamos uma construção de Organizações Praxeológicas compostas por uma Organização Didática e, consequentemente, uma Organização Matemática, à compreensão de fórmulas para a medida de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch sob a perspectiva da TAD. Tais fórmulas emergiram das técnicas mobilizadas pelos alunos durante a construção e a exploração do Fractal proposto. Buscamos responder o seguinte problema de pesquisa: Quais as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas para o cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch?

Para mobilizar uma resposta a esse questionamento, elencamos como objetivo geral: investigar, por meio da Teoria Antropológica do Didático, as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas para o cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch. Para alcançar tal objetivo, elencamos que o objetivo específico consiste em realizarmos uma análise das situações que irão compor a Organização Matemática e Didática da exploração do Fractal Ilha de Koch por alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Sob essa descrição, explicaremos como cada capítulo está disposto nesta pesquisa. A dissertação foi construída sob 3 capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais. A introdução compreende um recorte do que a pesquisa aborda como um todo, e apresenta considerações do pesquisador a respeito dos motivos pelos quais optou-se por abordar essa pesquisa.

No Capítulo 1, apresentamos o desenvolvimento teórico que abordamos na pesquisa. Tal capítulo é composto pela Geometria Fractal, em que nos baseamos para desenvolver um estudo acerca do objeto matemático Fractal Ilha de Koch, e também um estado do conhecimento da Geometria Fractal. Como aporte teórico, trazemos a Teoria Antropológica do Didático para elucidar conceitualmente a pesquisa, e justificamos o motivo pelo qual utilizaremos um *software* para auxiliar nessa pesquisa. Por fim, apresentamos um compilado da nossa compreensão a respeito da pesquisa e do que se pretende ser pesquisado.

O Capítulo 2 é composto pelos procedimentos metodológicos utilizados para desenvolver a pesquisa, o qual também está dividido em subseções, que apresentaram: o meio de coleta de dados, as características da pesquisa, o contexto e os critérios para a análise de dados.

No que concerne ao Capítulo 3, este consiste na análise dos dados, ou seja, para esse capítulo, trazemos uma discussão acerca do aporte teórico com a análise dos dados. Assim, apresentaremos a análise *a priori* e *a posteriori* das Organizações Matemáticas.

E, por fim, tem-se as Considerações Finais, em que apresentamos um fechamento para a pesquisa, mostrando as conclusões que foram possíveis de obter, respondendo à questão norteadora. Além do mais, apontamos dificuldades e implicações nas quais a pesquisa obteve durante o percurso de estudo, de modo a propor potencialidades de pesquisas que podem ser estudadas acerca dessa temática, dando continuidade nesse estudo, em pesquisas futuras.

Desse modo, explicaremos, nos capítulos que compõem este texto, a maneira como pautamos o desenho teórico-metodológico adotado para o desenvolvimento dessa pesquisa.

CAPÍTULO 1 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, apresentaremos as principais características dos aportes teóricos utilizados nessa pesquisa. Mostraremos o estudo realizado acerca da Geometria Fractal, a fim de abordarmos um estado do conhecimento que se refere ao ensino da Geometria Fractal na Matemática. Este estado do conhecimento se configurou a partir de artigos, dissertações, teses e livros que abordam o tema. Ainda, nesta parte, apresentaremos o objeto matemático em estudo, o Fractal Ilha de Koch.

Com isso, seguimos as justificativas para a utilização do referencial teórico, sendo eles, a Teoria Antropológica do Didático. Além disso, como pretendemos utilizar um *software* para cunho educacional, discutiremos o uso das Tecnologias na Educação Matemática. Ao final deste capítulo, apontaremos a pesquisa a ser desenvolvida, ou seja, de que maneira iremos articular tais referenciais teóricos nesta investigação.

1.1 Geometria Fractal

A geometria, de um modo geral, é considerada e descrita como algo formal e regular. Partindo desse fato, tem-se o questionamento: por qual motivo isso ocorre? Um dos motivos para que a geometria seja apresentada dessa maneira, é pela dificuldade em descrever fenômenos naturais, tais como a forma das nuvens, das montanhas, das árvores, das folhas, dentre outras formas que encontramos na natureza. As nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, e assim, essas e outras comparações são feitas. Por isso, observamos certa dificuldade em se fazer descrições de objetos irregulares (MANDELBROT, 1998).

Conhecido como o pai da Geometria Fractal, Benoit Mandelbrot englobou diversos estudos anteriores aos dele a respeito dessas formas da natureza, em um único bloco matemático, justificando e provando a criação de tal geometria, corroborando com o que já afirmamos no texto. No entanto, esses outros estudos que precederam Mandelbrot, já apontavam para figuras fragmentadas, rugosas e provenientes da natureza.

Janos (2008, p. 1) afirma que "[...] antes dele [Benoit Mandelbrot] outros matemáticos criaram figuras estranhas que desafiavam o enquadramento das definições convencionais da geometria euclidiana e, por isso, foram chamados de 'monstros matemáticos". Podemos citar alguns desses matemáticos que precederam Benoit, como por exemplo, Georg Cantor (1845-1918), matemático de nacionalidade alemã, que nos apresentou o Conjunto de Cantor; Giusepe

Peano (1858-1932), italiano, que nos apresentou seus estudos a respeito da Curva de Peano; Wasclaw Sierpinski (1882-1969) um matemático polonês, que nos introduziu o Triângulo de Sierpinski; dentre outros matemáticos que não citamos no momento.

Nesse sentido, Mandelbrot (1977) esclarece que muitos desses padrões existem na natureza e são tão irregulares e fragmentados, que se tornam algo diferente e tomam um alto nível de complexidade em comparação à Geometria Euclidiana. Essas formas tão irregulares, possíveis de serem encontradas na natureza nos instigam a estudá-las, uma vez que, quando Euclides sistematizou a geometria, ele deixou os formatos que envolviam a natureza "sem forma", pois considerava-se que estes não poderiam ser descritos.

Com essas indagações, Benoit Mandelbrot, um matemático polonês, desenvolveu uma nova geometria - a geometria da natureza - em que teve suas primeiras pesquisas objetivadas na compreensão das formas que a natureza apresentava em seus objetos naturais, pois formas como essas são caracterizadas como irregulares e complexas que somente a natureza, até então, poderia apresentá-las.

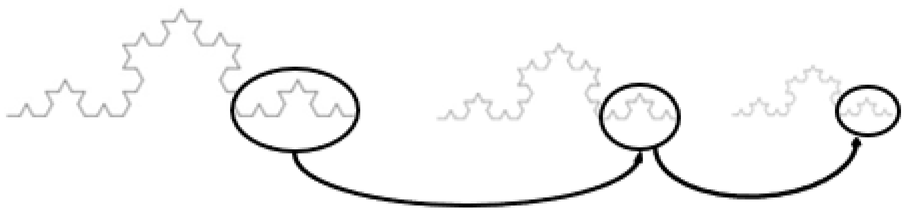
Com isso, a geometria da natureza, agora conhecida como Geometria Fractal, foi introduzida pelo seu precursor Benoit Mandelbrot a partir dos seus estudos, por volta das décadas de 1950 a 1960, apresentando seus resultados no livro *The Fractal Geometry of Nature,* publicado em 1982. A utilização do termo "Fractal" veio como necessidade de encontrar um nome que pudesse representar e descrever essa nova geometria que estava sendo criada. Assim, segundo Barbosa (2005), essa denominação segue do latim, do adjetivo *fractus* e do verbo *frangere,* que significa quebrar; algo que pode ser fragmentado de forma irregular. E assim foi inserido o termo Fractal para essa nova geometria.

Em vista disso, a Geometria Fractal "é o estudo de diversos objectos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau em todas as escalas" (MANDELBROT, 1998, p. 207). Essa nova maneira de conceber a geometria da natureza foi estudada em diversas áreas do conhecimento em que se descreveu diversas formas irregulares e fragmentadas, encontrando padrões acerca dos aspectos naturais. Além do mais, a Geometria Fractal é constituída por três características principais, que são: "[...] a auto-semelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão" (ASSIS *et al.*, 2008, p. 2304-2).

De acordo com esses autores, essas propriedades podem ser compreendidas de maneira que a auto-semelhança é possível ser entendida como uma porção de um Fractal que pode ser visualizada como uma réplica do Fractal todo, porém, em uma escala menor. No que se refere à complexidade infinita, é compreendida pelo fato de sua geração de imagens ocorrer por um número infinito de iterações. E, por fim, a dimensão Fractal, representa o grau de ocupação em que esse Fractal tem no espaço, ou seja, está relacionado com o seu grau de irregularidade. (ASSIS *et al*., 2008).

A exemplo disso, temos uma estrutura de um Fractal, Figura 1, que é construída iterativamente, e que retrata a característica autossemelhança, descrita anteriormente. Nela, podemos observar que uma porção do Fractal se repete, no entanto, em escala menor, e podemos realizar esse processo sucessivamente, de maneira que quando realizamos infinitas iterações, verificamos a complexidade infinita da estrutura desse Fractal.

Figura 1: Exemplo de estrutura Fractal na Curva de Koch



Fonte: Os Autores, 2021.

Com isso, essas características podem ser observadas nos fractais, como, por exemplo, no Triângulo de Sierpinski, no Conjunto de Cantor, na Curva de Peano, na Curva de Hilbert, na Curva de Koch, no Conjunto de Mandelbrot, dentre diversos outros fractais. Fractais esses que, quando explorados, apresentam uma riqueza de propriedades matemáticas, pois "A Geometria Fractal é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza" (JANOS, 2008, p. X) e podem ser utilizadas em diversas outras áreas do conhecimento. Barbosa (2005) cita que:

> Nessas quatro ou cinco décadas vimos o nascimento e o subsequente desenvolvimento de uma nova ciência, denominada CAOS. Biólogos, físicos, economistas, astrônomos, meteorologistas, ecologistas, fisiologistas e cientistas de várias outras especialidades se depararam com questões oriundas da natureza, procurando dar enfoque mais adequados à sua complexidade (BARBOSA, 2005, p.10).

A Geometria Fractal por vezes está associada à arte, pois as suas características propiciam a simetria, considerando como sendo o belo e o senso estético. Barnsley (2000) nos exemplifica como a Geometria Fractal pode ser considerada diferenciada e bela.

> A geometria Fractal fará com que você veja as coisas diferente. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito

> mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma (BARNSLEY, 2000, *apud* JANOS, 2008. p. IX).

Para tanto, é proposto que se utilize a Geometria Fractal como forma de motivação para o ensino da Matemática. Com isso, Barbosa (2005) apresenta que diversos autores corroboram com os educadores no sentido de utilizar-se do belo que o Fractal propicia para o ensino das particularidades da Matemática. Para a Geometria Fractal,

> [...] faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração e talvez evidenciando o êxtase na contemplação da beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pela informação e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais" (BARBOSA, 2005, p.14).

Pois, "o despertar e desenvolver o senso estético pode muito bem ser cuidado e aproveitado com o tema *fractais*, quer apreciando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades" (BARBOSA, 2005, p. 14).

Seguindo esses preceitos, abordaremos a Geometria Fractal tendo o tema matemática em foco, especificando-nos a respeito do Fractal Ilha de Koch, para que possamos realizar um estudo pautado em teorias provenientes da Didática da Matemática.

Na próxima seção, apresentaremos um estudo matemático que trata especificamente a respeito do fractal Ilha de Koch, com o intuito de subsidiar a nossa investigação.

1.1.1 A Ilha de Koch

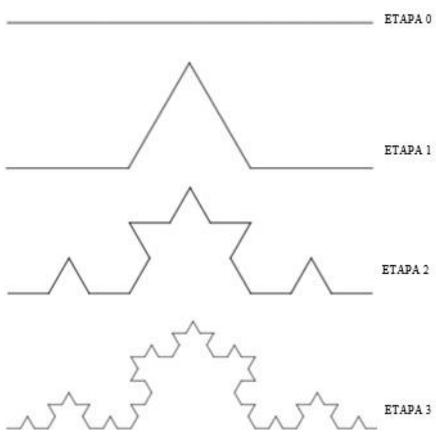
O matemático polonês Helge Von Koch (1870-1924) já realizava estudos acerca dessas curvas irregulares, uma vez que apresentou estudos sobre a Curva de Koch e, agora, após os estudos de Mandelbrot, esse objeto matemático é entendido como o Fractal Curva de Koch. Nesse sentido, ao introduzi-lo, pretendemos discutir esse Fractal e sua variante, devido ao fato de esse ser o nosso objeto de estudo.

Concernente a isso, os estudos a respeito da Curva de Koch foram apresentados em um artigo chamado *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*[4], de autoria do matemático polonês Helge Von Koch, apresentado em meados de 1906 (BARBOSA, 2005). Podemos compreender que o Fractal Curva de Koch é construído inicialmente com um segmento de reta qualquer que em um segundo passo é dividido em três partes iguais e, assim, construímos um triângulo equilátero na terça parte do

[4] O artigo pode ser encontrado em Acta Mathematics, vol 30 de 1906, p. 145-174. Disponível em: https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.acta/1485887154. Acesso em: 20 de março de 2021.

segmento original, suprimindo o segmento da base. Realizando-se esse procedimento, sucessivamente, encontramos as outras etapas desse Fractal, como podemos ver algumas etapas na Figura 2.

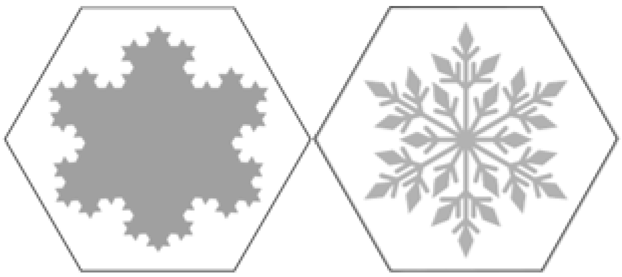
Figura 2: Etapas da Curva de Koch



Fonte: Os autores, 2021.

Como consequência dos estudos da Curva de Koch, surge uma variação deste fractal, sendo este o Fractal Ilha de Koch conhecido também como o Floco de Neve de Koch, pela sua semelhança com o floco de neve. Para observarmos essa semelhança, trazemos a Figura 3:

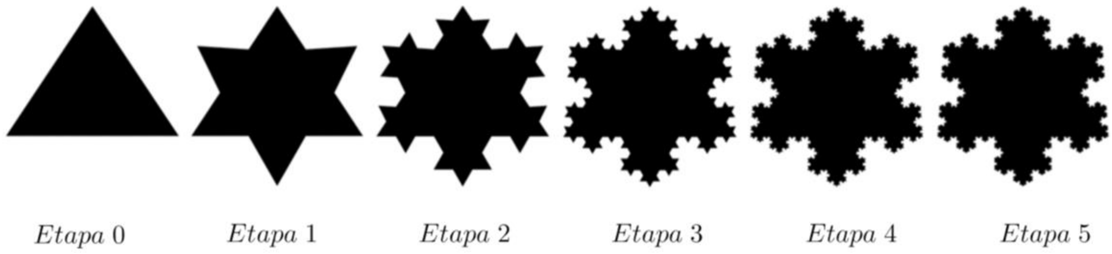
Figura 3: Floco de Neve de Koch



Fonte: Adaptado de Barbosa (2005).

Dessa forma, o processo de construção da Ilha de Koch se assemelha com a construção da Curva de Koch, visto que a primeira é derivada da segunda. Portanto, a construção do Fractal Ilha de Koch se inicia com um triângulo equilátero, sendo que em cada um de seus lados é realizada a Curva de Koch. Realizando as iterações, é possível ver as diversas etapas do Fractal Ilha de Koch, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Etapas do Fractal Ilha de Koch



Fonte: Os autores, 2021.

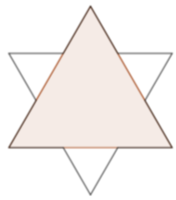
Pertinente a isso, ressaltamos que esse Fractal apresenta as suas principais características, sendo elas, a autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão Fractal.

Na Ilha de Koch, identificamos a autossimilaridade, uma vez que cada parte do Fractal se assemelha ao todo, conforme visto na Figura 1. Seguindo as etapas de construção do Fractal infinitamente, alcançamos a compreensão de sua complexidade infinita. Também podemos pensar a respeito da sua dimensão, uma vez que ela pode ser calculada a partir das propriedades de logaritmos, determinando as dimensões dos fractais por meio da seguinte fórmula, Equação 1.1:

$$n = m^d \qquad \textbf{Equação 1.1}$$

Em que n indica o número de peças, m indica o fator de aumento e d se refere à dimensão. Logo, se observarmos a iteração do Fractal Ilha de Koch, na Etapa 1, teremos o seguinte, apresentado na Figura 5:

Figura 5: Etapa 0 e Etapa 1 da Ilha de Koch



Etapa 1

Fonte: Autores, 2021.

Neste caso, observamos que teremos $n = 4$ e $m = 3$. Portanto,

$$4 = 3^d$$

$$\log 4 = \log 3^d$$

$$d = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow d \approx 1{,}26 \qquad \textbf{Equação 1.2}$$

Tendo em vista que pretendemos explorar os aspectos de área e perímetro do Fractal Ilha de Koch, entendemos ser necessário abordar estes conceitos sob a ótica do cálculo de limites para que compreendamos o saber matemático envolvido nessas operações.

Contudo, para além do cálculo de medidas do perímetro e da área, é necessário realizar o cálculo da quantidade de segmentos e a quantidade de triângulos, que são obtidos em cada etapa de construção do Fractal Ilha de Koch. Portanto, a seguir, apresentaremos os cálculos necessários para provar tais afirmações e, consequentemente, determinar as medidas e quantidades de cada proposição.

A princípio, apresentaremos os cálculos da quantidade total de segmentos em cada etapa. Importante observar que, para a construção da Ilha de Koch, iniciamos a Etapa 0 com um triângulo equilátero, conforme a Figura 6, que possui três lados. Logo, na Etapa 0 temos um total de 3 segmentos.

Figura 6: Etapa 0 do Fractal Ilha de Koch

Fonte: Os autores, 2021.

Na Etapa 1 desse Fractal, observa-se que a quantidade total de segmentos aumenta para 12, ou seja, já podemos notar que a quantidade total de segmentos da Etapa 1 é quatro vezes maior que a quantidade total de segmentos da Etapa 2. A Figura 7 nos mostra, geometricamente, como está representada essa quantidade.

Figura 7: Etapa 1 do Fractal Ilha de Koch

Fonte: Os autores, 2021.

Se continuarmos o processo de iteração, percorrendo outras etapas, observaremos que cada iteração tem a quantidade total de segmentos dada por uma progressão geométrica de razão

4 e, assim, a recorrência formada pela quantidade de segmentos é dada por $S(n) = 3 \cdot 4^n$, em que n é o número referente à etapa que se encontra o Fractal. Logo, podemos observar que a quantidade de segmentos da Ilha de Koch tende ao infinito, uma vez que seu limite fica da seguinte forma:

$$\lim_{n \to \infty} S(n) = \infty \qquad \textbf{Equação 1.3}$$

Como $S(n) = 3 \cdot 4^n$, teremos

$$\lim_{n \to \infty} S(n) = \lim_{n \to \infty} 3 \cdot 4^n = \infty \qquad \textbf{Equação 1.4}$$

No que se refere ao perímetro, podemos observar que da Figura 6 para a Figura 7 o comprimento de cada segmento da figura formada na etapa é três vezes menor que o comprimento de cada segmento da figura anterior. Assim, denotaremos como sendo $c \in \mathrm{N}^*$ o comprimento de cada segmento do triângulo equilátero inicial, correspondente à Etapa 0. Portanto, para a Etapa 0, temos um perímetro equivalente a $3c$ e, para a Etapa 1, o comprimento de cada segmento será $3c \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}c$. Ao fazermos outras iterações, é possível observar que há uma recorrência, ou seja, o comprimento de cada segmento é dado por

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n c; \; c \in \mathrm{N}^* \qquad \textbf{Equação 1.5}$$

Em que n corresponde à etapa do Fractal. Desse modo, aplicando o limite com $n \to \infty$, temos que o comprimento de cada segmento tende a zero, conforme apresentado na Equação 1.4.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n c = 0 \qquad \textbf{Equação 1.6}$$

Para o cálculo da medida do perímetro P_n, realizar-se o produto da quantidade pelo comprimento de cada segmento, ou seja,

$$P_n = 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n c = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n c \qquad \textbf{Equação 1.7}$$

Podemos observar que o perímetro da Ilha de Koch tende ao infinito, pois, quando aplicamos o limite com n, tendendo ao infinito, temos que

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} 3\left(\frac{4}{3}\right)^n c = \infty \quad ; c \in \mathrm{N}^* \qquad \textbf{Equação 1.8}$$

No entanto, apesar de mostrarmos que o perímetro do Fractal Ilha de Koch tende ao infinito, conforme Equação 1.6, veremos que a área desse mesmo Fractal é limitada. Esse fato é comprovado primeiramente pelo cálculo da quantidade de triângulos equiláteros obtidos em cada etapa da construção do Fractal.

Desse modo, ao observar a Figura 9, temos na Etapa 0, correspondente a um triângulo equilátero. Após isso, ao realizarmos a iteração para a Etapa 1, observamos que foram gerados mais três triângulos, ou seja, na Etapa 1, temos um total de quatro triângulos. Para a Etapa 3, representada na Figura 4, temos que são gerados mais 12 triângulos, com isso, temos na Etapa 3 um total de 16 triângulos. Portanto, a recorrência do total de triângulos em cada etapa é de 4^n, onde n corresponde à etapa em que se refere o cálculo da quantidade de triângulos. Aplicando limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} 4^n = \infty \qquad \textbf{Equação 1.9}$$

Portanto, pela Equação 3.7, temos que a quantidade de triângulos do Fractal Ilha de Koch tende ao infinito.

Assim, faremos o cálculo da área do Fractal Ilha de Koch. Para isso, continuaremos considerando cada lado do triângulo equilátero inicial como sendo c. Sem perda de generalidade, utilizamos como A_0 a área do triângulo da Etapa 0. Na Etapa 1 podemos observar que os triângulos gerados têm área igual a $\frac{1}{9}$ da área inicial (A_0). Isso ocorre, pois, no interior do triângulo inicial é obtido um total de 9 triângulos equiláteros menores, gerando uma área igual a $\frac{1}{9}$ da área inicial. Como foram gerados três triângulos nessa etapa, temos, então, que a área dos triângulos gerados corresponde a $3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathrm{A}_0$.

Sendo assim, a área do Fractal na Etapa 1 é

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 \qquad \textbf{Equação 1.10}$$

Observa-se que há uma recorrência, ou seja, para a Etapa 2, temos que

$$\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \mathrm{A}_0 \qquad \textbf{Equação 1.11}$$

Se continuarmos, para a Etapa 3 teremos:

$$\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0 \qquad \textbf{Equação 1.12}$$

E a Etapa n ficará da seguinte forma:

$$\mathrm{A}_3 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0 + \cdots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \mathrm{A}_0$$ **Equação 1.13**

Assim, a cada uma das iterações, a área total de cada figura formada é dada pela soma da área inicial (A_0) com o produto da terça parte da área inicial, pela soma S_n de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{4}{9}$, ou seja, $|q| < 1$. Com isso, podemos dizer que a área do Fractal Ilha Koch pode ser dada por

$$A_n = A_0 + \frac{A_0}{3} S_n$$ **Equação 1.14**

Valendo-nos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$ **Equação 1.15**

onde q corresponde à razão da soma da progressão geométrica. Assim, utilizando a Equação 3.13, temos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right)}{\frac{4}{9} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$ **Equação 1.16**

Desse modo, considerando a área da Ilha de Koch como sendo A, temos que

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left[A_0 + \frac{A_0}{3} S_n\right] = A_0 + \left(\frac{A_0}{3}\right)\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{8}{5} A_0$$ **Equação 1.17**

Portanto, observamos que a medida da área do Fractal Ilha de Koch é $\frac{8}{5} A_0$, ou seja, $\frac{8}{5}$ da área do triângulo inicial. E, como conclusão, verificamos que, embora o perímetro da Ilha de Koch seja infinito, a sua área é limitada e bem definida.

Apreciando os apontamentos anteriores, surgiram indagações acerca do ensino da Matemática, especificamente o ensino da Geometria Fractal. Com isso, objetivamos explorar essa temática juntamente com um aporte de teorias desenvolvidas no âmbito da Didática da Matemática que nos subsidiarão em sua exploração, e as Tecnologias educacionais, auxiliando na implementação, a qual iremos expor nas próximas seções.

Concernente a isso, para tomarmos conhecimento a respeito das produções científicas que abarcam o ensino da Geometria Fractal, realizamos um estado do conhecimento de artigos de periódicos, dissertações e teses do tema proposto, o qual apresentaremos a seguir.

1.1.2 Estado do conhecimento no ensino da Geometria Fractal

Para compor os dados desta subseção, foi realizado um estado do conhecimento para delinear as produções científicas que dizem respeito ao ensino da Geometria Fractal, no ensino de Matemática no Brasil. Para tanto, as buscas desses trabalhos foram realizadas em diretórios digitais, para que possamos percorrer pelo maior número de pesquisas científicas.

A escolha por realizar o estado do conhecimento se caracteriza pelo interesse de verificar quais os caminhos e possibilidades que esse conhecimento tem percorrido no campo científico, em específico, no campo do ensino de Matemática. Corroborando com Romanowski (2006, p. 38-39), o qual diz que "O interesse por pesquisas que abordam 'estado da arte' deriva da abrangência desses estudos para apontar caminhos que vêm sendo tomados e aspectos que são abordados em detrimentos dos outros".

Deste modo, entendemos como estado da arte ou, conforme iremos adotar em nossa escrita, estado do conhecimento, como sendo "um mapa que nos permite continuar caminhando; um estado da arte é também uma possibilidade de perceber discursos que em um primeiro exame se apresentam como descontínuos ou contraditórios. Em um estado da arte está presente a possibilidade de contribuir com a teoria e a prática [...]" (MESSINA, 1999, p. 1, tradução nossa)[5].

Nesse sentido, subdividimos esta subseção em dois momentos. O primeiro deles está relacionado ao estado do conhecimento com base em revistas científicas; e o segundo, refere-se ao estado do conhecimento baseado em dissertações e teses, pois, abordando esses dois tipos de produções, podemos entender o mapa do conhecimento em questão. Para tanto, delimitamos os dados que irão compor o estado do conhecimento em revistas científicas, em que foram necessárias 3 etapas de delineamento para que pudéssemos selecionar os artigos que se adequam ao nosso objetivo.

Nesse sentido, para o primeiro momento, a fim de podermos identificar esses textos, foi realizada uma busca de periódicos científicos, para abarcar o maior número de produções científicas disponibilizadas *online*. Nessa etapa, fizemos a busca na Plataforma Sucupira[6], para que possamos identificar tais periódicos, utilizando os seguintes critérios: i) Evento de classificação: classificação do quadriênio 2013-2016, a escolha por este período se deu pelo

---

[5] Un estado del arte es un mapa que nos permite continuar caminando; un estado del arte es también una posibilidad de hilvanar discursos que en una primera mirada se presentan como discontinuos o contradictorios. En un estado del arte está presente la posibilidad de contribuir a la teoría y a la práctica [...].

[6] Plataforma desenvolvida para apresentam todos os periódicos científicos inscritos. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/veiculoPublicacaoQualis/listaConsultaGeralPeriodicos.jsf

fato de o quadriênio 2017-2020 não estar disponível na plataforma; ii) Área de avaliação: ensino; e, iii) Título[7]: educação.

Com esse filtro, foram encontrados 221 periódicos científicos que continham esses critérios. Encaminhamos para o segundo momento da busca, nos periódicos delimitados os quais continham afinidade com o nosso objetivo. Para isso, utilizamos os descritores "Fractal" ou "fractais" nas barras de buscas dos periódicos e, assim, encontramos 73 artigos científicos que apresentavam afinidade ao nosso tema.

Partindo disso, chegamos ao terceiro momento de delineamento, para poder realizar o estado do conhecimento. Ressaltamos que o corte do período ficou entre 2009-2020, pois foram esses os trabalhos encontrados. Nesse momento, realizamos leituras de títulos e resumos para verificar quais deles se adequavam com o objetivo dessa pesquisa, sendo excluídos os artigos que somente mencionam os descritores, que estavam envolvidos com outras áreas do conhecimento, e que não se adequam ao objetivo. Assim, selecionamos 15 trabalhos, dispostos no Quadro 1, os quais estão organizados em ordem cronológica.

Quadro 1: Relação de artigos selecionados

Título do artigo	Ano de publicação	Autor(es)	Periódico científico
A geometria que existe além do olhar: Levando a geometria da natureza para dentro da escola	2009	Karin Ritter Jelinek Adriana Justin Cerveira Kampff	Educação Matemática em Revista – RS
Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática	2011	Claudemir Murari	Bolema
Geometria Fractal e progressões geométricas: análise de um simulador de Fractais	2013	Claudia Márcia Ribeiro de Azeredo Michelle Dinelli de Souza Silvia Cristina Freitas Batista Gilmara Teixeira Barcelos	RENOTE: Novas Tecnologias na Educação
O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas	2013	José Marcos Lopes José Antonio Salvador Inocêncio Fernandes Balieiro Filho	Revista Eletrônica de Educação
Fractais na Educação Básica: Aprendendo com Quebra-Cabeças, Arte Francesa e Cartões	2014	Maria Regina Carvalho Macieira Lopes Alessandry Amaral Adriana Fernandes de Matto Karolina Barone Ribeiro da Silva	Educação Matemática em Revista
A utilização da Geometria Dinâmica para estudo da Progressão Geométrica via Fractais	2015	Andrea G. Nazuto Gonçalves Henrique Thioji Misato Jhovana Lameu da Cruz Victória Caroliny Athanazio	RInTE: Revista Interdisciplinar de Tecnologias na Educação

[7] Nesse momento, refere-se que no título da revista contenha a palavra "educação".

A modelagem matemática como metodologia para o ensino e a aprendizagem dos fractais	2017	Marcelo Fabrico Chociai Komar Dionísio Burak Elaine Maria dos Santos Márcio André Martins	RENOTE: Novas Tecnologias na Educação
O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio	2018	Veridiana Rezende Mariana Moran Thais Michele Mártires Fabrícia Carvalho Paixão	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática
Proposta de ensino de geometria por meio da teoria Fractal e o software GeoGebra	2018	Rozelaine de Fatima Franzin	Debates em Educação
Registros de representação semiótica e sua articulação com o hexágono de Dürer nas aulas de matemática	2018	Veridiana Rezende Mariana Moran Thais Michele Mártires Wilian Barbosa Travassos	Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Teorema de Pitágoras e o Fractal árvore pitagórica: um Experimento no ensino fundamental	2018	José Carlos Pinto Leivas Anne Desconsi Hasselmann Bettin	Revista Brasileira De Educação, Tecnologia E Sociedade (BRAJETS)
A utilização de material didático manipulável e da geometria Fractal para o aprendizado dos conceitos de área e perímetro de quadrado: um estudo de caso envolvendo uma estudante com baixa visão	2019	Ana Paula Poffo Koepsel Tânia Baier	Revista Educação Especial
Introduzindo a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio da perspectiva de Modelagem Matemática	2019	Francisco Geovane da Silva Araújo Alessandra Senes Marins	Boletim Cearense de Educação e História da Matemática
Sobre pensamento computacional na construção de um triângulo de Sierpinski com o GeoGebra	2019	Lara Martins Barbosa Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva	Revista Pesquisa e Debate em Educação
Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica	2020	Fabrícia Carvalho Paixão Mariana Moran Veridiana Rezende	Boletim online de Educação Matemática

Fonte: Os Autores, 2021.

Foram analisados os objetivos centrais dos trabalhos, explorando seus resumos e conteúdos propostos. Em seguida, separamos esses artigos em 5 grandes blocos a fim de auxiliar na compreensão dos rumos que as pesquisas com fractais estão se direcionando. Assim, são considerados os seguintes grupos: 01 – Explorando os fractais em sala de aula, com um *software* matemático; 02 – Formação continuada de professores e fractais; 03 – Teoria dos Registros de Representação Semiótica e fractais; 04 – Modelagem Matemática e fractais; 05 – Educação

Especial e fractais. A partir disso, discorremos, a seguir, sobre cada artigo, como forma de elucidar as pesquisas desenvolvidas.

Grupo 01 – Explorando os fractais em sala de aula com um *software* matemático

Nesse grupo foi possível agruparmos 5 artigos. Dentre eles, tivemos o trabalho de Jelinek e Kampff (2009) que teve como objetivo relatar a experiência de um grupo de professores com o desenvolvimento do projeto interdisciplinar *Além do Olhar: por um mundo melhor*. Esse projeto buscou desenvolver nos alunos da sétima série[8], do Ensino Fundamental, a capacidade de conhecer um novo olhar do cotidiano e do mundo que os cerca, através da percepção, da sensibilidade, do autoconhecimento e da experiência. Para completar o objetivo, foi utilizada a Geometria Fractal como forma de explorar fractais da natureza, conhecidos pelos alunos, associando essa geometria com um *software* matemático denominado *Imagine*, no ambiente de programação *Logo*.

Outro texto que se adequou a esse grupo foi o de Murari (2011), que apresenta em seu artigo uma coletânea de experiências em sala de aula para a construção de fractais, por meio de diversos materiais manipuláveis, como por exemplo, espelhos, caleidoscópios, materiais manipulativos e *softwares* de geometria dinâmica em estudos das geometrias euclidiana e Geometria Não Euclidiana. No caso da Geometria Não Euclidiana, que é representada pela Geometria Fractal, utiliza-se o caleidoscópio, *software* GeoGebra e *Cabri-Géomètre* II. Assim, esse trabalho apresenta a criação de fractais, propiciando o interesse dos alunos a partir do visual, oferecendo um aprendizado acerca desses objetos matemáticos.

No que diz respeito ao artigo dos autores Azevedo, Souza, Batista e Barcelos (2013), o objetivo é analisar um objeto de aprendizagem (OA): o simulador de fractais "Progressões Geométricas em Fractais". Nessa pesquisa, foi realizado um estudo de caso com alunos do Ensino Médio em que o objeto de aprendizagem foi considerado adequado no que diz respeito ao assunto de progressões geométricas e os fractais, de maneira que um simulador de fractais foi utilizado como intermediador para a aprendizagem.

Seguindo o mesmo entendimento de utilizar um *software* matemático, tem-se o artigo de Leivas e Bettin (2018). Este trabalho teve por objetivo utilizar noções de geometria euclidiana com alunos de um 9º ano, do Ensino Fundamental, para perceberem a necessidade de reconhecerem alguns aspectos de Geometria Fractal, e levá-los a compreender o mundo em

[8] Conforme as mudanças educacionais ocorridas no Brasil, houve uma atualização e alteração nos termos, passando de "sétima série" para "oitavo ano".

que vivem. Sendo realizado o estudo por meio da Teoria de Van Hiele, no qual buscava desenvolver o raciocínio geométrico, realizou-se a construção da Árvore Pitagórica com o auxílio do GeoGebra, para explorar tal Fractal, em que tiveram o foco nas noções do teorema de Pitágoras.

O trabalho de Barbosa e Silva (2019) apresenta a realização de um estudo acerca da construção dinâmica do triângulo de Sierpinski, por meio do GeoGebra e de um *GIF (Graphics Interchange Format)*, em que são apresentadas as iterações de um Fractal. Desse modo, tem por objetivo investigar como os estudantes de graduação em matemática exploram Geometria Fractal, utilizando o *software* GeoGebra, de maneira que propicie o pensamento computacional nesses estudantes.

<u>Grupo 02</u> – Formação continuada de professores e fractais

Este grupo contém um total de 4 artigos publicados em periódicos. Dentre eles, temos o trabalho de Lopes, Salvador e Balieiro Filho (2013), em que apresentam uma proposta didático-pedagógica para professores do Ensino Médio. O objetivo é mostrar que o fractal Triângulo de Sierpinski pode ser utilizado, com a formulação de problemas adequados, para a introdução do conceito de Probabilidade Geométrica, e também para o trabalho com o conceito de Probabilidade Condicional. Assim, propicia a exploração dos conceitos de probabilidade geométrica por meio de fractais diversos, como por exemplo, do Triângulo de Sierpinski.

No que diz respeito ao artigo dos autores Lopes, Amaral, Matto e Silva (2014), este teve por objetivo colaborar na formação continuada de professores, e realizou uma oficina matemática, que aplicava três atividades partindo da utilização de materiais manipuláveis e objetivavam o ensino dos fractais. Essas atividades envolviam quebra-cabeça com figuras dos fractais, a construção de cartões fractais e, também, a aplicação da arte francesa[9] sob esses objetos matemáticos.

Como uma proposta para o Ensino Médio, os autores Gonçalves, Misato, Cruz e Athanazio (2015) desenvolveram uma sequência didática para abordar o estudo de progressão geométrica via fractais, fazendo uso da geometria dinâmica. Os dois *softwares* Matemáticos que abordaram nessa proposta foram o Cabri-Géomètre e o IGeom, e que foram utilizados para construir os fractais Triângulo de Sierpinski e Tetra-Círculo.

[9] A arte francesa é uma técnica de sobreposição de gravuras de papel a uma imagem plana, conferindo a ela efeito de profundidade e volume.

Para finalizar esse grupo, temos o trabalho de Franzin (2018), cujo objetivo foi relacionar a teoria fractal e a Geometria Euclidiana, aliada ao *software* GeoGebra, para o ensino de conceitos matemáticos básicos, que envolvem cálculos de comprimentos, perímetros e áreas de figuras geométricas. Desse modo, o trabalho utiliza o Fractal Ilha de Koch, fazendo a relação com cotidiano do aluno, favorecendo a aprendizagem.

<u>Grupo 03</u> – Teoria dos Registros de Representação Semiótica e fractais

Neste grupo, foram agrupadas 3 pesquisas que se relacionam com esta temática. A iniciar pela pesquisa de Rezende, Moran, Mártires e Paixão (2018), que investigam acerca das possibilidades do uso de diferentes registros de representação semiótica aliado à Geometria dos Fractais, no que concerne ao ensino de matemática. Para tanto, realizam a construção do Fractal Árvore Pitagórica, explorando diversos conceitos matemáticos com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, propiciando a identificação dos diferentes tipos de representação semiótica, direcionados para o ensino de matemática.

Os autores Rezende, Moran, Mártires e Travassos (2018) também apresentam em seu texto uma investigação acerca das possibilidades do uso de diferentes registros de representação semiótica no ensino de Fractais. Esse trabalho foi feito com alunos no 3º ano do Ensino Médio, com a utilização do fractal Hexágono de Dürer, para realizar uma exploração matemática com o intuito de articular os diferentes tipos de representação que ocorreram durante a implementação.

O último artigo desse grupo foi escrito por Paixão, Moran e Rezende (2020). Este trabalho buscou responder aos seguintes questionamentos: os professores, colaboradores desta pesquisa, exploram diferentes registros de representação semiótica ao elaborarem atividades relacionadas à Geometria Fractal? A partir disso, foram investigados professores da Educação Básica, com o intuito de explorar o fractal Hexágono de Dürer, com o auxílio do *software* GeoGebra, a fim de identificar o processo de conversão entre as representações semióticas.

<u>Grupo 04</u> – Modelagem Matemática e fractais

Nesse grupo, são contempladas 2 investigações, e daremos início pelo trabalho de Komar, Burak, Santos e Martins (2017), em que o objetivo foi relatar uma atividade de modelagem matemática a partir do tema escolhido pelos estudantes, os Fractais. Essa implementação foi realizada a turma do 9º ano, do Ensino Fundamental. Foram utilizados nessa pesquisa o fractal Triângulo de Sierpinski e o *software* GeoGebra, como recurso para a construção e exploração do fractal escolhido pelos estudantes.

No artigo elaborado por Araújo e Martins (2019), objetivou-se apresentar uma proposta de aula para a aplicação do assunto de Geometria Fractal, desenvolvida por meio da perspectiva de Modelagem Matemática. Como proposta de implementação no 3º ano do Ensino Médio, na perspectiva da modelagem matemática, é utilizado fractal Tapete de Sierpinski, para a exploração de hipóteses; formulação de variáveis; uso de conhecimentos prévios; construção do modelo matemático; entre outras possibilidades.

<u>Grupo 05</u> – Educação Especial e fractais

Este grupo contém somente 1 pesquisa, e que se trata de um relato de experiência. Este relato, apresentado por Koepsel e Baier (2019), ocorreu com estudantes do 6º ano, do Ensino Fundamental, e que possuíam baixa visão. Nele, os autores objetivaram relacionar os conteúdos matemáticos de área e perímetro de quadrados, e utilizaram o fractal tapete de Sierpinski, pois sua construção está relacionada com quadrados que vão ao encontro do objetivo do relato de experiência.

Com a finalização dos cinco grupos de trabalhos que pudemos descrever a respeito da Geometria Fractal presentes em periódicos, concluímos que, nesse primeiro momento, há uma maior quantidade para a utilização dos fractais em sala de aula com os *softwares* matemáticos, como podemos ver no Grupo 01. Mas, o auxílio desses recursos computacionais também abrange propostas de ensino e aprendizagem para a formação continuada. Podemos observar que nos Grupos 03, 04 e 05, o tema Geometria dos Fractais esteve relacionado com abordagens da Educação Matemática e suas ramificações, como por exemplo, o uso da Modelagem Matemática e o aporte da Teoria dos Registos de Representação Semiótica, provida da Didática da Matemática.

Destacamos que nos Grupos 03 e 04 há artigos que se utilizam de *softwares* para a exploração matemática e representação geométrica dos fractais. Nesse sentido, podemos notar que o trabalho com os fractais em sala de aula, num contexto de propostas didático-pedagógicas e pesquisas teóricas, tem uma predeterminação em utilizar *softwares* matemáticos em suas explorações. No entanto, para delinearmos o estado do conhecimento, é necessário o segundo momento, que se trata das Dissertações e Teses que envolvam a temática. Desse modo, tal levantamento será apresentado a seguir.

Nesse momento, realizamos a busca de Dissertações e Teses em dois diretórios distintos, para que pudéssemos obter maior acesso às pesquisas disponíveis digitalmente, sendo eles, o Catálogo de Teses e Dissertações – CAPES, e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

No primeiro deles, Catálogo de Teses e Dissertações – CAPES, utilizamos os descritores “fractais” e “Fractal”, e realizamos o filtro pela área de avaliação, ou seja, aplicamos os filtros “ensino”; “ensino” e “Ensino de Ciências e Matemática”. Partindo disso, foram encontradas 30 dissertações ou teses nesse diretório.

No segundo diretório, o BDTD, utilizamos os mesmos descritores, até então aplicados nas pesquisas de artigos nos periódicos e no diretório anterior, sendo eles, “Fractal” e “fractais” com o filtro ensino. Assim, com tal delineamento, encontramos 79 pesquisas provenientes desse ambiente de buscas.

Com os resultados desses diretórios de pesquisa, os unimos e chegamos a um total de 94 teses ou dissertações, contando somente uma vez as pesquisas presentes nos dois grupos. As pesquisas foram selecionadas no período de 2004 a 2019, pois foram todas as pesquisas encontradas, de acordo com o nosso delineamento.

Seguimos para a próxima etapa, sendo ela, a de filtrar a partir da exclusão de pesquisas estrangeiras e leitura dos títulos e resumos, para que essas abarcassem o nosso objetivo de delinear um estado do conhecimento do ensino da Geometria Fractal no ensino de Matemática. Com esse delineamento, foi possível selecionar 38 teses ou dissertações, que apresentaremos a seguir, em ordem cronológica.

Quadro 2: Relação de teses e dissertações selecionadas

Título da pesquisa	Pesquisador/a	Ano de publicação	Tipo do documento	Programa de Pós-Graduação	Instituição
Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano	Ricardo Ronaldo Eberson	2004	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica - SP
Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio e *softwares* de geometria dinâmica	Flavio Roberto Gouvea	2005	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado Profissional)	Universidade Estadual Paulista
Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática	Hamilton Cunha de Carvalho	2005	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática	Universidade Federal do Pará
Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula	Arlete Aparecida Oliveira Almeida	2006	Dissertação	PROFMAT	Pontifícia Universidade Católica - SP

Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais	Andrea Gomes Nazuto Gonçalves	2007	Dissertação	PROFMAT	Pontifícia Universidade Católica - SP
Introduzindo a geometria Fractal no ensino médio: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza	Alceu Domingues Alves	2008	Dissertação	Programa de Pós-Graduação de Ensino das Ciências	Universidade Federal Rural do Pernambuco
Construindo uma Percepção Complexa da Realidade a partir do Estudo dos Fractais	Márcia Denise Gressler	2008	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática	Pontifícia Universidade Católica - RS
Uma proposta de ensino envolvendo geometria Fractal para o estudo de semelhanças de figuras planas	Antônio do Nascimento Gomes	2010	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (Mestrado Profissional)	Universidade Federal de São Carlos
Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática	Nilson Jorge Baldovinotti	2011	Dissertação	Pós-Graduação em Educação Matemática	Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
Fractais: generalização de padrões no ensino fundamental	Juliano de Paula Mineli	2012	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	Pontifícia Universidade Católica - SP
Padrões fractais: contribuições ao processo de Generalização de conteúdos matemáticos	Rejane Waiandt Schuwartz Faria	2012	Dissertação	Pós-Graduação em Educação Matemática	Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
Conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com uso do software GeoGebra	Teresinha Aparecida Fáccio Padilha	2012	Dissertação	Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas	Centro Universitário Univates
Conhecendo Fractal no ensino médio – árvore pitagórica	Celso Henrique Nicola	2013	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal de São Carlos
Fractais no Ensino Médio	Ilca Maria Brisante	2013	Dissertação	PROFMAT	Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
Fractais no Ensino Médio: a valorização da geometria a partir de uma nova experiência em sala de aula	Juliana Alonso Gadi de Jong Zambelli	2013	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal do ABC
Fractais no Ensino Médio: Uma sequência didática	Paulo Sérgio Adami	2013	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal de São Carlos

Estudo e aplicações da Geometria Fractal	Yara Silvia Freire Rabay	2013	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal da Paraíba
Explorando o conjunto de cantor e outros fractais no ensino básico	Amauri Fernandes Freitas	2014	Dissertação	PROFMAT	Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
Noções de geometria Fractal elementar	Anderson Tadeu Gonçalves de Araújo	2014	Dissertação	PROFMAT	Universidade Estadual de Sergipe
Geometria Fractal e Aplicações no Ensino Médio	Cacilda De Souza	2014	Dissertação	PROFMAT	Universidade de Brasília
Fractais: motivando a matemática no Ensino Médio	Fábio Médice Júnior	2014	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
O ensino de Fractais no Ensino Fundamental	Rogério da Silva Paixão	2014	Dissertação	PROFMAT	Universidade Estadual de Maringá
A geometria Fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da Matemática na Educação Básica	Simone Mingoranci	2014	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Matemática e arte: explorando a geometria dos fractais e as tesselações de Escher	Camila de Fátima Modesto	2015	Dissertação	PROFMAT	Universidade Estadual de Londrina
Geometria Espacial e Fractal	Paulo Henrique da Silva	2015	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal de Goiás
A geometria Fractal como fator minimizador das dificuldades referentes a conceitos geométricos	Emanueli Vallini da Luz	2016	Dissertação	PROFMAT	Universidade Estadual Paulista "Júlio Mesquita Filho"
Um estudo sobre fractais: origem e proposta didática para aplicação em aula	Marcos Roberto Dalpiaz	2016	Dissertação	PROFMAT	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Conjunto de Mandelbrot	Márcio Vaiz dos Reis	2016	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal de Goiás
Sequências numéricas a partir da geometria Fractal para licenciandos em matemática	Bárbara Regina Da Silveira Batista	2017	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e de Matemática	Centro Universitário Franciscano
Uma nova abordagem dos Complexos para o	Daniel de Carvalho Mendes Junior	2017	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal do ABC

Ensino Médio: O Estudo dos Fractais e do Caos na composição do Conjunto Preenchido de Julia e o Conjunto de Mandelbrot					
Geometria Fractal na Educação Básica	Vanessa da Silva Sá Sampaio Moreira	2017	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado Profissional)	Pontifícia Universidade Católica - RJ
Uma sequência didática a partir da folha de papel sulfite	Veridiana Carla Zanetti	2017	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal de São Carlos
Motivação para o ensino e aprendizagem dos números complexos: uma abordagem com aplicações	Agnaldo Antônio Moreira	2018	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal do Paraná
Uma proposta de atividades para o estudo de progressões geométricas utilizando fractais e o software GeoGebra	Juliana Maria Valmorbida	2018	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal da Fronteira Sul
Fractais: uma ferramenta no ensino médio	Delba Costa da Silva Alves	2019	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal Rural do Pernambuco
O uso da Geometria Fractal como ferramenta no ensino de progressões geométricas e logaritmos	Diogo Comin Vieira	2019	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas (Mestrado Profissional)	Universidade Federal de São Carlos
Uma proposta de geometria de fractais para a sala de aula	Lucas Maximiano de Oliveira	2019	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal de Juiz de Fora
Uma proposta de abordagem da Geometria Fractal na Educação Básica	Marcelo Correia Lisboa	2019	Dissertação	PROFMAT	Universidade Federal do Tocantins

Fonte: Os Autores, 2021.

Diante do exposto, foram analisados os objetivos centrais dos trabalhos, explorando seus resumos e conteúdos propostos. Como podemos ver no Quadro 2, na busca a partir dos descritores selecionados, encontramos somente dissertações de mestrado, o que nos leva a entender que as pesquisas as quais tratam do ensino da Geometria Fractal são poucas, o que possibilita a realização de mais pesquisas acerca dos fractais no ensino.

Com isso, realizamos uma divisão das dissertações encontradas em três grupos que se relacionam, sendo eles: Grupo 01 – Sequências de atividades matemáticas envolvendo a Geometria Fractal; Grupo 02 – *Softwares* de Geometria Dinâmica e materiais manipuláveis relacionados com os fractais e, por fim, o Grupo 03 – Formação continuada de Professores e os fractais. A seguir, discorreremos, brevemente, a respeito dessas pesquisas. No entanto, visto que foram encontrados diversos trabalhos que abarcam essa temática, apresentaremos somente aqueles que em seus programas de pós-graduação contenham "Educação Matemática", para que possamos ir de acordo com os nossos objetivos e temática.

Grupo 01 – Sequências de atividades matemáticas envolvendo a Geometria Fractal

Esse grupo é formado por um total de 3 dissertações. Para dar início, temos a dissertação de Gressler (2008), que propõe uma atividade interdisciplinar, envolvendo disciplinas de Matemática, Filosofia e Arte-Educação, fazendo a articulação na 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental, dos temas que envolvem a teoria da complexidade, dos estudos da Geometria Fractal e das artes plásticas. Seu objetivo era investigar quais as mudanças de atitude os alunos da 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental apresentam em sua compreensão complexa da realidade, após uma integração entre o estudo de fractais, a teoria da complexidade e as artes plásticas. Essa pesquisa resultou na verificação da mudança de atitude dos alunos na percepção da realidade, de modo que a compreenderam como sendo situações complexas, superando maniqueísmos e preconceitos derivados de uma percepção simplista da natureza.

A dissertação de Mineli (2012) objetivou investigar dificuldades relacionadas à formação de habilidades para a generalização de padrões e de situações de ensino facilitadoras para essa formação. Com isso, foi realizada uma sequência didática com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, com atividades que propiciaram a generalização de padrões, apoiadas na exploração da Geometria Fractal. Desse modo, as características singulares dos fractais possibilitaram o reconhecimento de padrões que favoreceram a realização das generalizações por parte dos estudantes.

Por fim, temos o trabalho de Carvalho (2005) que realizou a criação de um curso para estudantes do 3º ano do Ensino Médio, o qual abordava a Geometria Fractal e sua aplicabilidade, e conceitos teóricos previamente apresentados aos estudantes. Com isso, tinham como objetivo verificar até que ponto as atividades elaboradas a respeito dos fractais podem se caracterizar como um recurso didático válido. Essa pesquisa proporcionou aos alunos uma articulação entre a matemática do cotidiano com a matemática escolar, de modo a se apropriar de uma visão sobre a matemática como sendo dinâmica, construída conforme a evolução da sociedade.

Grupo 02 – *Softwares* de Geometria Dinâmica e materiais manipuláveis relacionados com os fractais

Este grupo é composto por 3 dissertações e, para dar início, faremos um breve resumo do trabalho de Faria (2012). Este trabalho objetivou investigar as contribuições que a articulação entre *softwares* educacionais e os fractais propiciam para o processo de generalização matemática. Para isso, realizaram um curso com alunos da Educação Básica, no qual apresentavam a manipulação de fractais para a verificação dos padrões existentes. Como resultado, essa pesquisa apresentou que os trabalhos com a Geometria Fractal contribuem com o processo de generalização, mas também para a exploração de conceitos matemáticos.

A utilização do caleidoscópio e da geometria dinâmica para explorar a Geometria Fractal funciona como componentes essenciais da dissertação de Gouvea (2005). Nessa pesquisa, buscou-se investigar quais seriam as contribuições para o ensino e aprendizagem de fractais geométricos, por meio do caleidoscópio e da geometria dinâmica. Dessa forma, foram aplicadas atividades aos licenciandos em matemática, que participaram de um curso de extensão, possibilitando a articulação e o estudo de diversos conceitos matemáticos euclidianos com os conceitos dos fractais.

Para finalizar este bloco de pesquisas de mestrado acadêmico, temos a dissertação de Eberson (2004), tendo por objetivo a contribuição da análise da Geometria Fractal e os quatro ambientes computacionais de aprendizagem humana, propondo, então, a integração de ferramentas computacionais com a construção dos fractais. Os resultados dessa pesquisa permitiram a elaboração de situações que envolveram os fractais nesses ambientes computacionais, de modo a contribuir para a contextualização de noções relacionadas às transformações geométricas no plano.

Grupo 03 – Formação continuada de Professores e os fractais

Esse grupo contempla 2 dissertações. A dissertação de Baldovinotti (2011) realizou oficinas com professores da Educação Básica e licenciandos em Matemática, com o intuito de propiciar a utilização de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis com fractais. Assim, teve por objetivo compreender qual a visão dos professores a respeito das potencialidades do ensino da Geometria Fractal, e resultou em uma visão que favorece o ensino dessa geometria por parte dos professores na Educação Básica.

Moreira (2017) desenvolve, no decorrer do texto, um contexto histórico dos fractais em geral e, então, evidencia alguns deles para discuti-los, e assim, apresentar uma proposta de aplicação de uma atividade aos alunos do Ensino Fundamental. No tocante, essa pesquisa objetivou na divulgação acerca do conhecimento da Geometria Fractal para professores. Assim, a pesquisa propiciou a abordagem dessa geometria, recorrendo à beleza dos fractais, tornando essa uma abordagem significativa na Educação Básica.

Finalizado a descrição das dissertações entre os grupos, observamos que boa parte das pesquisas trata de explorações fractais, projetando para a construção de uma sequência didática a ser aplicada à Educação Básica. Também, a utilização de *softwares* Matemáticos esteve presente nos agrupamentos para o ensino e a construção dos fractais. Por consequência, temos que as dissertações, em geral, apresentaram realizações de cursos ou oficinas com o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica, buscando compreender as potencialidades que o ensino da Geometria Fractal pode apresentar ao ensino na Educação Básica.

Portanto, ao realizar esse segundo momento do estado do conhecimento, que se refere a teses e dissertações, foram encontradas somente dissertações que tinham como preocupação principal a adequação ao currículo de Matemática na Educação Básica. Os temas que mais apareceram nas pesquisas dizem respeito ao ensino de progressões geométricas, números complexos e generalização de padrões. Ainda, observamos que muitos deles utilizam *softwares* para o ensino da Matemática, tornando esta uma característica dominante quando se trata do ensino dos fractais. Outro ponto a ser ressaltado, é sobre a intensificação de pesquisas nos últimos anos (2010 a 2019), indicando que o interesse pela temática está aumentando.

Em vista disso, tal estado do conhecimento possibilitou que pudéssemos mapear as pesquisas desenvolvidas para o ensino da Geometria Fractal no ensino de Matemática. E observamos que tanto as pesquisas que foram publicadas em periódicos quanto as dissertações possuem similaridades quanto aos conteúdos matemáticos abordados, bem como a forte presença de *softwares* matemáticos como auxílio para o ensino.

Para concluir, conseguimos mapear um total de 38 dissertações e 15 artigos de periódicos, de modo que intuímos que ainda existem poucos trabalhos que abarquem o ensino dessa geometria, como podemos observar nos dados e na descrição dos trabalhos. Além disso, para complementar o mapeamento, foi realizada uma busca acerca de livros que tratavam do ensino dos fractais em língua portuguesa, o que levou a apenas dois livros que abordassem essa temática. Nesse sentido, foram publicados 2 livros em língua portuguesa, em especial no Brasil, que abordaram a Geometria Fractal.

Quanto a esses livros, temos o de Barbosa (2005), intitulado *Descobrindo a Geometria Fractal: para a sala de aula*, que aborda um estudo dos fractais a serem aplicados em sala de aula. Nesse livro, o autor faz uso do visual artístico proeminente nos fractais, de maneira a incluir capítulos que abordam a construção e suas explorações matemáticas desses objetos matemáticos. Com isso, articula esse objeto matemático com materiais manipuláveis e *softwares* matemáticos que estavam em uso potencial no Brasil, na época de sua escrita.

No que diz respeito ao livro de Janos (2008), denominado de *Geometria Fractal*, este trata o ensino com menos ênfase, tendo por objetivo apresentar uma contextualização histórica, evidenciando a nova maneira de entender o crescimento e a complexidade da natureza. Apresenta, em seus capítulos, uma exploração matemática de fractais denominados "clássicos", fazendo uma interligação com imagens da natureza e imagens construídas computacionalmente.

Concluímos que, dentre os 55 trabalhos encontrados, que incluem artigos, dissertações e livros, há uma maior predeterminação para utilizar-se de *softwares* matemáticos para realizar as construções e explorações matemáticas dos fractais estudados. Com isso, intuímos que a crescente associação entre os fractais e os *softwares* é algo que propicia um estudo matemático apurado dessa geometria, uma vez que esses recursos estão amplamente difundidos. No que diz respeito aos aportes teóricos, observamos que 3 pesquisas se situaram na Teoria dos Registros de Representação Semiótica como forma de representar os fractais e explorar as possíveis conversões entre essas representações.

Nesse sentido, buscamos, com esse mapeamento, reforçar a importância dos trabalhos publicados para que pudesse dar relevância à pesquisa a qual estamos desenvolvendo. O estudo desse estado do conhecimento mapeado foi no intuito de tomarmos conhecimento e realizar a leitura de algumas produções que foram realizadas sobre a Geometria Fractal, além do mais, intencionamos conhecer o quanto dessa geometria tem sido desenvolvida, bem como a sua presença no meio acadêmico, de modo geral. Desse modo, fica evidente o diferencial que essa pesquisa está apresentando, uma vez que aborda a Geometria Fractal como um objeto matemático que tem propriedades que podem ser exploradas em salas de aula.

A escolha pelo fractal Ilha de Koch se deu pelo fato de que intuímos que este seria um objeto atrativo aos alunos, e despertaria um maior interesse em sua construção e exploração matemática, uma vez que se assemelha a um floco de neve. Além disso, encontramos somente um trabalho (FRANZIN, 2018) que estudou o fractal Ilha de Koch e, por isso, entendemos que o estudo a respeito desse fractal ainda é tímido. Desse modo, compreendemos que existe outros assuntos a ser explorado nesse objeto matemático, visto que ao inserir o fractal Ilha de Koch na Educação Básica, é possível propiciar o estudo, a construção e a exploração de diversas noções matemáticas. Nesse sentido, respaldamo-nos nesse mapeamento para realizar a pesquisa em que pretendemos construir uma fórmula para a medida de perímetro e área do objeto matemático fractal Ilha de Koch.

Portanto, na próxima seção, discutiremos como pretendemos articular a Geometria Fractal com a Didática da Matemática, explanando a respeito da Teoria Antropológica do Didático, a qual nos permitirá uma exploração da Ilha de Koch modelizada por Organizações Praxeológicas.

1.2 A Teoria Antropológica do Didático

Nesta seção abordaremos aspectos relacionados à Teoria Antropológica do Didático (TAD) que foram utilizados como aporte durante as análises desta pesquisa. A TAD foi desenvolvida pelo pesquisador francês Yves Chevallard (1992), com o propósito de estudar o homem diante do saber matemático. Desse modo, essa teoria situa a atividade matemática e, consequentemente, o estudo da atividade em matemática em todas as atividades humanas e instituições sociais existentes (CHEVALLARD, 1999), justificando, assim, a utilização do termo “Antropológico” em sua teoria.

Além disso, Almouloud (2007) explica que a TAD é uma teoria relevante no que se refere à pesquisa de práticas em sala de aula, permitindo realizar análises de situações de ensino e aprendizagem da Matemática escolar. Ainda, essa teoria apresenta contribuições significativas para a Didática da Matemática, pois a TAD

> [...] focaliza o estudo das Organizações Praxeológicas didáticas [OD] pensadas para o ensino e aprendizagem de organizações matemáticas [OM]. A teoria antropológica do didático (TAD) estuda condições de possibilidades e funcionamentos de sistemas didáticos, entendidos como relação sujeito-instituição-saber (ALMOULOUD, 2007, p. 111).

Nesse sentido, Chevallard (1999) pontua que as organizações (ou praxeologias) que são relacionadas a um estudo matemático são destacadas por dois tipos: Matemática e Didática. Ao que diz respeito à Organização Matemática, ela se refere à realidade matemática que pode ser construída numa disciplina em que se estuda um tema. No que se refere à Organização Didática, ela se associa à maneira como pode ser estudada a construção dessa realidade matemática, ou seja, a forma como se pode realizar o estudo do tema. Partindo do exposto, observamos que há uma relação entre tais praxeologias. Assim, entendemos que a Organização Matemática (OM) e a Organização Didática (OD) constituem Organizações Praxeológicas (OP).

Diante disso, as praxeologias são a essência da Teoria Antropológica do Didático. Assim, a estrutura mais elementar de uma OM é constituída por noções referentes ao tipo de tarefa, à técnica, à tecnologia e a uma teoria. De acordo com Almouloud (2015), essas noções nos permitem estruturar diversas práticas sociais, assim como a atividade matemática a qual estamos nos referindo. Nesse sentido, Chevallard (2018) explicita uma estrutura a respeito dessas noções praxeológicas:

> A estrutura praxeológica mais simples (que poderíamos chamar de "atômica", mas nós realmente chamamos de "pontual") consiste um tipo de tarefa T, uma técnica τ, maneira de executar as tarefas t do tipo T, de uma tecnologia θ, discurso fundamentado (logos) sobre a técnica (tekhnê) que é suposto tornar t inteligível como meio para realizar as tarefas do tipo T, enfim - por último, não menos importante - uma componente teórica Θ, que rege a tecnologia em si (e, portanto, todos os componentes da praxeologia) (CHEVALLARD, 2018, p. 34).

Concernente a isso, podemos exemplificar como se caracteriza cada uma dessas noções, como é apresentado por Chevallard (1999). Com isso, os tipos de tarefa são caracterizados como várias tarefas que se assemelham, por exemplo, resolver uma equação 3x+2=1, é uma tarefa t, e ela se assemelha a 4+2x=0, e assim por diante, definindo, então, a noção do tipo de tarefa T. A outra noção que estrutura a praxeologia é a técnica τ. Ela é entendida como a maneira pela qual podemos executar um tipo de tarefa, em específico, ou seja, de que modo resolvemos determinada tarefa que compõe o tipo de tarefa. A noção de tecnologia θ se refere ao que justifica a técnica, ou seja, é o discurso racional a respeito da técnica, de maneira que a justifique racionalmente garantindo que ela funcione bem para aquele tipo de tarefa.

Por fim, temos a noção de teoria Θ, a qual se assemelha ao que se entende por tecnologia, porém, a teoria tem um papel no qual ela faz a justificação-explicação-produção, ou seja, rege e justifica a tecnologia. Portanto, são essas as noções praxeológicas que, juntas, são denominadas como quarteto praxeológico, simbolizado como $[T, \tau, \theta, \Theta]$ (CHEVALLARD, 1999).

Para complementar, Vieira Pinto (2005) fez uma discussão abrangente em sua obra a respeito do conceito de tecnologia e, etimologicamente falando, ele nos explica que

> a 'tecnologia' tem de ser a teoria, a ciência, o estudo, a discussão da técnica, abrangidas nesta última noção as artes, as habilidades de fazer, as profissões e, generalizadamente, os modos de produzir alguma coisa. Este é necessário o sentido primordial, cuja interpretação nos abrirá a compreensão dos demais. A 'tecnologia' aparece aqui com o valor fundamental e exato de 'logos da técnica' (VIEIRA PINTO, 2005, p. 219).

Portanto, o autor nos mostra a diferença que se apresenta entre os conceitos de tecnologia e técnica, haja vista que a técnica é inerente à espécie humana, pois, dentre todas as espécies vivas, o ser humano é o que tem por natureza a aptidão de produzir artifícios e meios para resolver problemas; no entanto, a tecnologia compreende a ciência da técnica, em que surge após uma exigência social numa etapa posterior à evolução humana. Logo, "há sem dúvida uma ciência da técnica, enquanto fato e por isso objeto de indagação epistemológica. Tal ciência admite ser chamada de tecnologia" (VIEIRA PINTO, 2005, p. 220).

À vista disso, a noção de praxeologia apresentada pela teoria envolve dois termos gregos: *práxis*, que significa "praticar" e *logos*, que significa "razão", "discurso fundamentado", de maneira que nos permita realizar análises desde uma situação de perspectiva teórica do saber com a sua perspectiva prática (saber-fazer). Em que ambas as perspectivas nos levam a ter dois blocos, o bloco saber-fazer, constituído pelas noções de tipo de tarefa e técnica, e o bloco prático-técnico, formado pelas noções de tecnologia e a teoria (CHEVALLARD, 1999).

Nesse sentido, Almouloud (2007, p. 113) ressalta que "O *conhecimento* – e o saber: considerado como uma certa *forma de organização de conhecimento* – entende que um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece, se há um conhecimento e um saber reconhecido como forma de organização desse conhecimento". De maneira geral, o objeto somente existe quando há uma relação e a constatação por uma pessoa ou por uma instituição para com aquele objeto. Nesse contexto, Chevallard (1991) nos explica que o objeto matemático, particularmente, não existe por si só.

Para tanto, o saber matemático para Chevallard (1999) é entendido como uma maneira particular do conhecimento, ou seja, é o produto da ação humana em uma determinada instituição, seja ela qual for, pode ser descrita como qualquer que seja a produção, a maneira como se utiliza e o modo como se ensina. Partindo disso, com a pretensão na elaboração de uma praxeologia que associe com esse determinado saber, Chevallard (2002) explica que quando se trata de uma organização de estudo de um determinado assunto, devemos levar em consideração uma escala hierárquica dos níveis de co-determinação didática.

A respeito disso, Chevallard (2002) apresenta um esboço desse nível de co-determinação, como podemos ver a seguir.

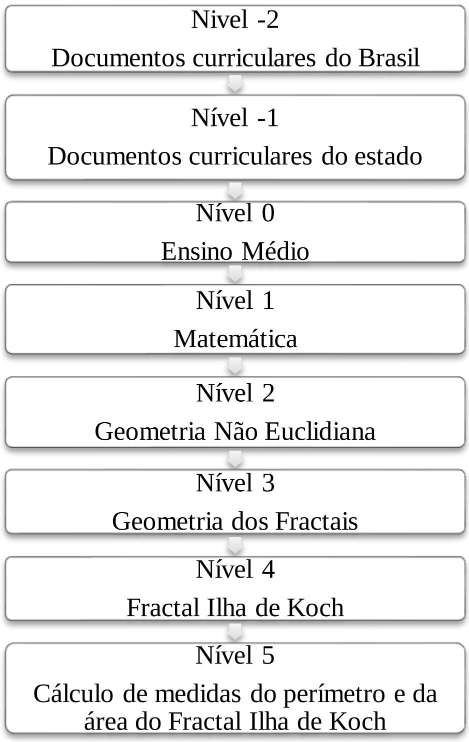
Figura 8: Nível de Co-determinação

Fonte: Chevallard (2002, p. 10).

Assim, esses "[...] níveis não são considerados dados, mas sim uma construção histórica. Cada nível ajuda a ecologia de uma Organização Matemática e Organização Didática por meio das dificuldades em que impõe a um estudo" (CHEVALLARD, 2002, p. 10, tradução nossa)[10]. Nesse sentido, ressaltamos que os níveis -2, -1 e 0 referem-se às organizações curriculares e os níveis 1, 2, 3, 4 e 5 são designados para as Organizações Praxeológicas. A partir disso, elaboramos um nível de co-determinação que diz respeito às análises *a priori*, como podemos verificar na Figura 12.

[10] […] niveau se réfère à une réalité (la société, l'École, les mathématiques, etc.) qui n'est nullement un donné, mais un construit historique. Chaque niveau concourt à déterminer l'écologie des organisations mathématiques et des organisations didactiques par les points d'appui qu'il offre et les contraintes qu'il impose.

Figura 9: Nível de co-determinação da análise *a priori*



Fonte: Autores (2021).

Nesse sentido, com relação ao nível de co-determinação dessa pesquisa, podemos interpretar que a Secretaria de Educação do estado (Sociedade), Documentos Curriculares do estado (Escola) e Ensino Médio (Pedagogia) são representantes curriculares e estruturantes de modo que nos auxiliaram a determinar a Ecologia Didática.

Desse modo, entendemos que o cálculo das medidas do perímetro e da área do Fractal Ilha de Koch é o nosso Objeto, constituindo o nível 5. Consequentemente, o Fractal Ilha de Koch como sendo Tema, compreendendo ao nível 4, de maneira que o Setor representa a Geometria dos Fractais que se relaciona com o Tema. E essa geometria está inclusa no Domínio da Geometria Não Euclidiana, nível 2. Por fim, todos esses elementos estão em associação com a Disciplina da Matemática, nível 1, e todos eles correspondem às Organizações Praxeológicas inerentes a esse estudo. À vista disso, a TAD, em seus constructos teóricos, possibilita que realizemos análises dos processos de ensino e aprendizagem em sala de aula, nos embasando para realizar as análises dos dados de modo a alcançar nosso objetivo.

Portanto, para dar continuidade, na próxima seção abordaremos a noção do *software* GeoGebra na Educação Matemática em que apoiamos para auxiliar o desenvolvimento dessa pesquisa.

1.3 O *software* GeoGebra na Educação Matemática

As tecnologias, principalmente as tecnologias educacionais, tiveram um avanço na sociedade de maneira que foram criadas possibilidades diversificadas de ensinar e aprender a partir delas. Estas estão presentes em todos os campos da sociedade na qual percebemos que o seu uso se tornou essencial, promovendo maneiras diversificadas de comunicação, produzindo informações, sendo possível gerar diferentes possibilidades para a sua utilização.

No entanto, esclarecemos que os termos tecnologia e técnica, que serão adotados nesse momento, não podem ser confundidos com o conceito de tecnologia que explicará a técnica que adotamos nesta pesquisa, conforme o entendimento de Chevallard (1999), apresentado anteriormente. Portanto, nesta seção, abordamos o uso de *softwares* educacionais, mais especificamente o GeoGebra, como uma tecnologia ou um meio de auxílio para a nossa pesquisa.

Com base nisso, Ferreira, Camponez e Scortegagna (2015) afirmam que a utilização das tecnologias digitais na Educação Matemática se iniciou no final da década de 1990 com a popularização da *internet,* na qual o computador se tornou presente para o ensino e aprendizagem em matemática. Com isso, foi se intensificando o uso de “softwares matemáticos educacionais, jogos, planilhas e imagem; na sequência pela internet que traz a realidade virtual, a realidade aumentada, [...]” (FERREIRA; CAMPONEZ; SCORTEGAGNA, 2015, p. 4), possibilitando recursos diversificados para a utilização no campo da educação.

Moran (2013) nos esclarece que o uso da tecnologia na educação está certamente em desvantagem com os avanços da sociedade. Uma vez que “enquanto a sociedade muda e experimenta desafios mais complexos, a educação formal continua, de maneira geral, organizada de modo previsível, repetitivo, burocrático e pouco atraente” (MORAN, 2013, p. 12).

Seguindo o mesmo entendimento, D’Ambrosio (2012) diz que as escolas não têm mais argumentos para que continuem a manifestar um “conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto”, e tantas vezes se acentuando quando se pensa a respeito das ciências e das tecnologias, visto que estamos adentrando em uma sociedade denominada “sociedade do conhecimento”. Além do mais, o autor refere que para as escolas estarem em equidade, será crucial que elas “estimulem a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e nas expectativas da sociedade” (D’AMBROSIO, 2012, p.74).

No tocante à sociedade do conhecimento, ela “exigirá um profissional crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, trabalhar em grupo e de conhecer o seu potencial intelectual” (VALENTE, 2001, p.29). Dessa maneira, e nesse propósito, temos que “o grande desafio da educação é pôr em prática hoje, o que vai servir para amanhã” (D’AMBROSIO, 2012, p.74). Tendo em vista isso, as tecnologias educacionais nos trazem potencialidades acerca do ensino de matemática, e “isso significa que é preciso respeitar as especificidades do ensino e da própria tecnologia para poder garantir que o seu uso, realmente, faça a diferença” (KENSKI, 2007, p. 49).

Scortegagna (2015) nos traz que as tecnologias mais utilizadas no ensino e aprendizagem de matemática são *softwares* educacionais como o GeoGebra, planilhas *online*, vídeos, jogos *online*, dentre outros. Ainda, a autora nos apresenta uma linha do tempo em que nos mostra uma perspectiva de curto, médio e longo prazo no que diz respeito à utilização das tecnologias no processo educacional.

Com isso, nota-se que há diversas possibilidades de uso de *softwares* educacionais com potencialidades para a utilização no ensino de Matemática, e Scortegagna (2015) nos indica o uso do *software* GeoGebra, por possibilitar abordar conteúdos que antes eram de difícil acesso à sala de aula. Essa tecnologia educacional de geometria dinâmica traz recursos visuais, tais como representações gráficas, também recursos algébricos, sendo processos essenciais para o ensino e aprendizagem.

A utilização de papel, régua e compasso para as representações geométricas se tornavam um processo um tanto quanto demorado e dificultoso, mas, com o surgimento de *softwares* em que pudéssemos trabalhar a geometria de maneira dinâmica, o processo tornou-se mais interativo e colaborativo. Assim, há a possibilidade de se criar objetos geométricos virtuais a partir dos seus conhecimentos matemáticos e tecnológicos e, para tal, nos valeremos do *software* GeoGebra como possibilidade de recurso educacional.

Concernente a isso, Scaldelai (2014, p.13) nos explica que o GeoGebra é “um *software* de Matemática dinâmico, gratuito e multiplataforma, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único GUI (do inglês **Graphical User Interface**, ou do português **Interface Gráfica do Utilizador**)”. Além disso, o autor relata que é um *software* livre e disponível gratuitamente[11] na *internet*, sendo desenvolvido por Markus Hohenwarter como possibilidade de utilização em sala de aula na Educação Básica.

Ainda, “O GeoGebra possui uma interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros” (SCALDELAI, 2014, p.13). Portanto, a escolha desse *software* se deu

---

[11] Disponível no site: www.geogebra.org.

pelo seu dinamismo, possibilitando a realização da construção, a exploração e elaboração de conjecturas a respeito dos fractais, favorecendo também as representações geométricas. Nesse sentido, nos respaldando nas discussões propiciadas anteriormente, propomos o *software* GeoGebra como ambiente para a construção e a aprendizagem de um objeto geométrico e seus aspectos matemáticos com alunos da Educação Básica.

1.4 Conexão

Ao nortearmos nos pressupostos teóricos apresentados no decorrer desse capítulo, temos que esta pesquisa tem como propósito estudar uma Organização Praxeológica para a construção de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch sob as perspectivas da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Essas fórmulas irão emergir a partir das técnicas que serão mobilizadas durante a construção e a exploração do Fractal Ilha de Koch e possibilitam o trabalho com diversos assuntos da Matemática como temas de Números e Álgebra, além da própria Geometria.

A Ilha de Koch, ou conhecida como Floco de Neve de Koch, é o nosso objeto de estudo para esta pesquisa. Nesse sentido, a partir do estudo epistemológico do objeto matemático, permite o conhecimento acerca do tema abordado. Para tanto, o seu estudo praxeológico será realizado a partir da Geometria Fractal, porém, nos direcionando para o Fractal Ilha de Koch, partindo dos pressupostos teóricos da TAD, como análises das tarefas propostas para o cálculo de perímetro e área do fractal.

Para complementar o objeto desta pesquisa, entendemos que o *softwere* GeoGebra é um aliado importante para o estudo dos fractais em sala de aula, por este motivo e pelos que foi pesquisado a respeito, entendemos que a utilização do GeoGebra apresentou-se pertinência no desenvolvimento da pesquisa e na coleta dos dados, uma vez que ele permite se realize a exploração matemática maneira sistemática e que aproveite o belo em toda sua complexidade de um fractal.

Portanto, a conexão entres esses constructos teóricos apresentados até o momento, permitiu o estudo, desenvolvimento, delineamento, construção, análise e discussão de todo o processo investigativo desta pesquisa. Apresentando justificativas teóricas e metodológicas para o desenrolar de cada momento dessa pesquisa. Assim, a conexão entres a Teoria Antropológica do Didático, Geometria Fractal e *software* GeoGebra, se mostraram uma base sólida, de maneira que tivemos respaldos para a escrita e a investigação proposta nessa dissertação.

CAPÍTULO 2 DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO

Neste capítulo, discorreremos a respeito das bases metodológicas que para sistematizam a pesquisa. Ainda, destacaremos o contexto em que realizamos a implementação, de modo a explicitar o local e o ambiente da sala de aula. Por fim, explanaremos a maneira em que realizamos a análise dos dados obtidos a partir da implementação.

2.1 Metodologia da pesquisa

A presente proposta consiste numa pesquisa cujo enfoque se faz por meio de um estudo de natureza qualitativa e de cunho interpretativo, pois, do ponto de vista de Bicudo (2004, p. 104), é o pesquisador "qualitativo que engloba a ideia de sujeito, possível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências".

Desse modo, há de se observar que a pesquisa qualitativa em educação, mais especificamente em Educação Matemática, é importante pois nos possibilita construir diversos instrumentos que têm por finalidade a compreensão do objeto de estudo. Portanto, o presente estudo é qualitativo e ocorre em um ambiente natural de sala de aula, sendo possível fornecer diversos dados para que possamos investigar.

Como a nossa pesquisa se baseia num estudo de Organizações Praxeológicas, entendemos que "quando se trata de um objeto relativo às práticas de ensino, deve-se em primeiro lugar observar o objeto, depois descrevê-lo, analisá-lo e avaliá-lo, para finalmente, desenvolver atividades que têm o objetivo de ensino e a aprendizagem desse objeto" (CHEVALLARD, 2002, *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 123). Ainda, esse mesmo autor diz que esse objeto pode ser categorizado em duas maneiras: a primeira refere-se "à realidade matemática (OM)" e a segunda forma diz respeito ao "como se pode construir essa realidade (OD)".

Partindo dessas prerrogativas, devemos realizar uma análise das praxeologias Matemáticas e Didáticas que serão criadas a partir do quarteto praxeológico e dos momentos didáticos, respectivamente, com base nas ideias de Chevallard (1998), pois estes são critérios essenciais para dar um direcionamento na elaboração das Organizações Praxeológicas.

Nesse sentido, a maneira que olharemos para a análise, consiste em "examinar os momentos do estudo realizado e as técnicas de realização empregadas, ao elucidar tanto quanto possível o ambiente tecnológico e teórico que os justifica, produzi-los ou torná-los compreensíveis” (ARTAUD, 2018, p. 153).

Portanto, compreendemos que para nos auxiliar nessa investigação, a partir da explanação supracitada, utilizaremos a Engenharia Didática como metodologia, uma vez que ela apresenta critérios e passos, de modo que possamos desenvolver essa pesquisa de maneira concisa teoricamente e metodologicamente.

2.2 Contexto da pesquisa

Norteados pela questão de pesquisa: Quais as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas de cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch? Buscamos investigar, por meio da Teoria Antropológica do Didático, as possíveis técnicas mobilizadas por estudantes do Ensino Médio, durante a construção de fórmulas de cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch. Com isso, considerou-se pertinente a elaboração de um tutorial para a construção do Fractal por meio do *software* GeoGebra (Apêndice A), o qual auxiliou na resolução das tarefas propostas nas quatro Etapas (Apêndice B) de construção do fractal. O tutorial foi elaborado com o objetivo de auxiliar os estudantes na construção do fractal, uma vez que estes não tinham conhecimentos das possibilidades de ferramentas do *software*.

Como uma forma de aperfeiçoar as tarefas e o tutorial proposto para a implementação, realizamos duas aplicações pilotos para minimizar os possíveis erros e elaborar uma proposta que seja coerente para o ensino de Matemática. Os pilotos foram realizados de modo *online* em salas criadas pelo *Google Meet*[12] com duração de 4 horas aulas cada um, dos cursos ministrados. Nesse sentido, entendemos que esse processo de aplicação piloto é “[...] um instrumento capaz de reproduzir eficientemente e em escala reduzida parte significativa dos meios que serão encontrados pelo pesquisador no momento definitivo da coleta de dados (SILVA; OLIVEIRA, 2015, p. 226).

Desse modo, identificamos que as principais mudanças realizadas a partir dos pilotos aplicados foram a mudança em alguns passos contidos no tutorial, com o objetivo de dar maior clareza para a construção do fractal, na compreensão das resoluções das tarefas, uma vez que tínhamos soluções que não condiziam com o ano selecionado para a implementação. Assim, analisamos os procedimentos de aplicação e os recursos da coleta de dados para verificar a

[12] Google Meet é uma plataforma de videoconferências do Google que permite realizar reuniões online, tanto pelo computador quanto por dispositivos móveis.

validade e, então, realizar o delineamento da proposta que seria implementada aos estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

A primeira aplicação piloto foi realizada no contexto de um projeto de extensão denominado "Atividades Matemáticas na Quarentena", proposto pelo Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), em que o objetivo consistiu em propor atividades matemáticas para os acadêmicos da Universidade e para a comunidade externa. Nesse sentido, ministramos um minicurso intitulado "Explorando o Fractal Ilha de Koch por meio do *software* GeoGebra", no ano de 2020, em que os participantes eram compostos, na maioria, por professores atuantes na Educação Básica e que visavam apresentar propostas no mesmo sentido. Esta implementação possibilitou que refinássemos aspectos referentes à construção do tutorial e à dinâmica do minicurso. Este primeiro piloto também nos trouxe algumas indicações, no qual foi sugerido um melhor delineamento da escrita e no esclarecimento dos passos descritos no tutorial, assim as sugestões foram voltadas para o tutorial.

A segunda experimentação piloto consistiu em um evento de extensão promovido pelos mesmos organizadores mencionados anteriormente, o qual se intitulou "XXXI Semana da Matemática" e que ocorreu no ano de 2021, tendo por objetivo realizar uma semana acadêmica para os graduandos de matemática da UEM. Com isso, ministramos um minicurso denominado "Uma organização praxeológica para a construção de fórmulas de cálculo de medidas de perímetro e área do fractal Ilha de Koch". O público participante consistiu em estudantes de graduação da mesma instituição. Esta implementação nos trouxe contribuições, principalmente na constituição e formalização final do minicurso, nos indicando a necessidade de abrirmos mais espaços para a discussão dos resultados de cada tarefa proposta.

As aplicações piloto ocorreram de forma remota pelo fato de ainda nos encontrarmos no contexto da pandemia da COVID-19. Embora estas tenham contribuído para o aprimoramento dessa pesquisa, observamos que a implementação da pesquisa que foi realizada na forma presencial trouxe uma dinâmica diferente no momento da prática. No formato presencial, foi possível identificarmos as dificuldades e fragilidades dos participantes frente à construção, por meio do *software* GeoGebra. A seguir, relataremos sobre a implementação como coleta de dados para essa pesquisa.

A implementação foi realizada em um Colégio Estadual, situado no Noroeste do Estado do Paraná, com 9 estudantes presencialmente, que cursavam o 2º ano do Ensino Médio, sendo aplicada pelo pesquisador, pela orientadora e três colaboradoras[13] que auxiliaram no decorrer do desenvolvimento das tarefas. Tal implementação ocorreu nos dias 27 e 29 de setembro de 2021, com duração de 4 horas aulas, sendo dividida em 2 horas aulas para cada dia.

As tarefas foram divididas em quatro etapas, perpassando pelas etapas da construção do Fractal Ilha de Koch, sendo a Etapa 0, Etapa 1, Etapa 2 e Etapa n. Todas essas etapas tinham por objetivo encontrar a quantidade de segmentos; a quantidade de triângulos; as medidas do perímetro e da área do Fractal Ilha de Koch em cada uma delas, de modo que a Etapa n proporcionasse a generalização (fórmula) a ser construída. Cada uma dessas etapas teve o auxílio do *software* GeoGebra para realizar a construção do Fractal. Para tanto, a realização das tarefas de cada Etapa estava condicionada à construção do Fractal no GeoGebra, ou seja, após a construção do Fractal, realizar-se-ia o desenvolvimento das tarefas na Etapa 0; após a construção do fractal na Etapa 1, realizar-se-ia o desenvolvimento das tarefas referentes à Etapa 1; e, assim, sucessivamente, até chegar à Etapa n, que não precisaria do *software* para a construção, uma vez que indica o fractal em sua n-ésima etapa.

Para esclarecer o contexto da implementação, discorreremos brevemente a respeito dos seus acontecimentos e sobre as decisões que foram tomadas no decorrer do desenvolvimento das tarefas.

O primeiro dia da implementação, dia 27 de setembro de 2021, teve duração de 2h/a, e aconteceu no Laboratório de Informática do Colégio, de modo que os alunos e os pesquisadores respeitaram as orientações de saúde definidas pelo Decreto 4230, de 16 de março de 2020, do estado do Paraná, visando a biossegurança e o distanciamento social. A partir dessa organização inicial, esclarecemos aos estudantes acerca da pesquisa e como seriam os procedimentos tomados, todas essas informações e os Termos de Consentimento foram seguidos conforme o parecer consubstanciado nº 4.780.941, aprovado pelo Comitê de Ética. Ressaltamos que colégio em questão estava em momento hibrido, ou seja, parte dos estudantes estavam presentes e outros estavam de forma remota.

Partindo disso, os pesquisadores apresentaram uma introdução teórica da Geometria Fractal, em especial, do Fractal Ilha de Koch e algumas de suas propriedades, ou seja, apresentamos a respeito do desenvolvimento histórico da Geometria Fractal. Explicado como

[13] Vanessa Cristina Rhea, doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) Universidade Estadual de Londrina (UEL). E-mail: vcrhea2@uem.br; Valdirene Maria dos Santos, mestre em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática (PCM) pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) e Pedagoga pela mesma Universidade. E-mail: valdirene_santos2@hotmail.com; Maria Clara Sampaio Rodrigues, graduanda em Matemática e estudante de Iniciação Científica do curso de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM).

aconteceria a realização das Tarefas, foi entregue a cada um dos alunos um tutorial (Apêndice A) e as tarefas correspondentes à Etapa 0 do Fractal, para que eles pudessem realizar a construção, e que depois fizessem uma exploração matemática das tarefas correspondentes. Assim, os alunos seguiram com suas constatações e observações, sendo realizados nessas 2h/a a construção do fractal em suas Etapas 0 e 1, e a resolução de suas tarefas, de modo concomitante.

Contudo, a partir das observações dos pesquisadores e do diário de campo adotado para anotar situações referentes à implementação, foi constatado que os alunos ainda não haviam tido contato com o *software* GeoGebra, o que foi um dificultador para a construção das etapas do Fractal. Outro fator importante a ser considerado foi que alguns estudantes ainda apresentavam dificuldades acerca de noções básicas de geometria. Além disso, como havia estudantes que estavam de forma remota, ficou dificultoso o acompanhamento tanto presencial, como remotamente, sendo uma barreira que encontramos no decorrer da implementação.

Considerando tais fatos, por meio de uma reunião entre os pesquisadores, fizemos uma reorganização, e modificamos a ordem da implementação, possibilitando que os alunos fizessem a construção do fractal no *software* até a Etapa em que fosse possível, dentro das 2 horas aulas daquele primeiro dia no Laboratório de Informática, considerando que a ferramenta construída no GeoGebra possibilitava repetir as iterações do fractal quantas vezes fosse possível visualizar. E somente no próximo encontro, nos preocuparíamos com a exploração matemática. Devido à dificuldade manifestada pelos estudantes em trabalhar com o *software*, decidimos concentrar a construção em um encontro (2h/a) e a exploração matemática em outro encontro (2 h/a).

Visando a aprendizagem dos alunos, na reunião entre os pesquisadores, definimos que nesse primeiro dia da implementação os alunos continuariam a construção do Fractal Ilha de Koch no GeoGebra para que pudessem familiarizar-se com esse ambiente tecnológico, lembrando que eles não tinham conhecimento do artefato tecnológico. Já para o segundo dia da implementação, ficou definido que seriam realizadas a formalização e generalização das Tarefas realizadas no encontro anterior além da continuação das demais tarefas de outras Etapas do fractal, que também previam a exploração matemática.

No segundo dia da implementação, ocorrido no dia 29 de setembro de 2021, a realização constituiu-se em formalizar as etapas do dia anterior e a exploração matemática definida em reunião. Ao discutir as Tarefas, a fim de abarcar o que os estudantes haviam realizado, seguimos para a realização das tarefas da Etapa 2, em que foi dado um tempo para que pudessem explorála matematicamente, seguida da institucionalização, continuando o mesmo procedimento até chegar às tarefas da Etapa n.

Para tanto, apresentados brevemente os acontecimentos. Na seção a seguir, discorreremos os critérios que adotaremos acerca dos dados coletados, considerando o aporte teórico e procedimentos metodológicos que compõem essa pesquisa.

2.3 Critérios para análise dos dados

Com o intuito de apresentar os resultados desta pesquisa de modo preciso, utilizaremos a Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico durante as análises dos dados coletados, como referencial metodológico a Engenharia Didática. Ressaltamos que esta pesquisa adota alguns aspectos teóricos da engenharia didática (MACHADO, 1999), prevista pela Engenharia Didática. Nesse sentido, adotaremos o modelo de 4 fases, são elas, a fase de análise preliminares; a concepção e análise *a priori* das situações didáticas; a experimentação, por fim, a fase da análise *a posteriori* e validação.

A respeito das análises preliminares, foi realizada acerca do quadro teórico e dos conhecimentos adquiridos sobre a temática em discussão (MACHADO, 1999). Isto é, realizamos um estudo preliminar acerca da Geometria Fractal, e o fractal Ilha de Koch, assim como os pressupostos teóricos da TAD. Machado (1999) acrescenta que essa análise abarca a análise epistemológica do conteúdo, análise das concepções dos alunos e das dificuldades, finalizando com uma análise de campo dos obstáculos em que se situa a realização didática.

Acerca da concepção e da análise *a priori*, é realizado quando “o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita um certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, as quais são chamadas de variáveis de comodato” (MACHADO, 1999, p. 203). Assim, realizamos, na concepção e análise *a priori*, um estudo acerca das organizações matemáticas, apresentando possíveis praxeologias que podem emergirem durante uma implementação em sala de aula. De maneira, que delimita o tema a ser estudado apresentado algumas variáveis acerca da noção matemática.

A Engenharia Didática prevê em um de suas fases, a experimentação, esta diz respeito ao momento em que se realiza a engenharia em um determinado grupo de alunos. Isto é, “o momento em que se dá o contato pesquisador/professor/observador(es) com a população aluno-objeto da investigação” (MACHADO, 1999, p. 206). Nesse sentido, realização a experimentação em um colégio estadual do estado do Paraná com alunos do segundo ano do Ensino Médio.

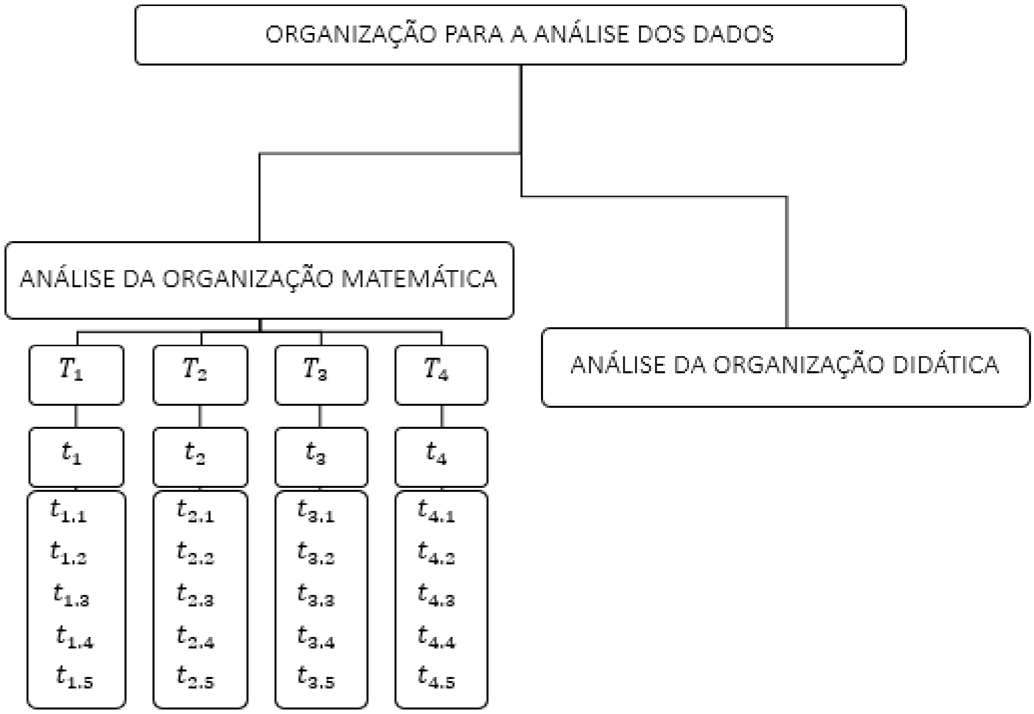
No que concerne a última fase, à análise *a posteriori*, que consiste no confrontamento da análise *a priori* e validação, esta fase é o momento de se discutir todos os dados coletados na experimentação, realizando o tratamento dos dados e, finalmente o confrontamento com a análise *a priori* (MACHADO, 1999). Nesta foi realizada em duas situações: para a primeira situação temos a análise da Organização Didática, a qual discorreremos a respeito da implementação em que foi respaldada nos momentos didáticos (CHEVALLARD, 1998; ARTAUD, 2018). Na segunda situação, realizamos a análise da Organização Matemática, apresentando os quartetos praxeológicos (CHEVALLARD, 1998) enfatizando as técnicas que foram mobilizadas pelos estudantes durante a resolução das tarefas propostas, confrontando-os com a análise *a priori*.

Com isso, por meio das observações realizadas pelos pesquisadores envolvidos, podemos caracterizar, descrever e analisar os momentos didáticos na implementação realizada, como: o primeiro, encontro com o tipo de tarefa T; o segundo, que é o momento de explorar o tipo de tarefa T; o terceiro, diz respeito ao momento tecnológico teórico, que constitui a tecnologia e a teoria; o quarto momento é o trabalho com a Organização Matemática; o momento da institucionalização da OM é o quinto momento; e, por fim, o sexto momento é quando se faz a avaliação da Organização Matemática construída.

Após a análise da primeira situação, seguiremos para a segunda situação, que está pautada nos documentos produzidos pelos alunos por meio das Tarefas. Assim, realizamos a análise em torno do quarteto praxeológico que pode ser identificado na OM elaborada. Essa análise seguirá uma estrutura, de modo que possamos organizar os dados coletados para melhor compreensão e harmonização da pesquisa e do que foi possível investigar. Para tanto, será feita a análise por Tipo de Tarefa T, consequentemente, a Tarefa e suas subtarefas.

Para explicitar a estrutura da análise dos dados, apresentamos o diagrama, compreendido pela Figura 7, para esclarecer a forma organizacional dos dados.

Figura 10: Organização da análise dos dados



Fonte: Autores, 2021.

Como podemos observar na Figura 10, faremos a análise das organizações praxeológicas separadamente, subdividindo em quatro Tipos de Tarefas (T_i), seguida de quatro Tarefas (t_i) e quatro subtarefas para cada Tarefa ($t_{i.j}$), com $1 \leq i \leq 4$ e $1 \leq j \leq 4$. Além do mais, ao finalizar a análise dos dados coletados, é realizado um confrontamento entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, para que possamos observar se o delineamento previsto pôde ser cumprido após a realização da implementação.

A vista disso, no intuito de responder à problemática de nossa pesquisa: quais as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas para o cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch? Buscamos trabalhos que nos direcionassem para um olhar crítico e organizacional a respeito dos dados coletados. Logo, o trabalho de Silva e Almouloud (2013), que teve por objetivo realizar uma análise praxeológica de algumas situações que conduziam os alunos a realizar a construção de sólidos por truncatura visando determinar seus volumes, nos auxiliou na condução da análise de nossos dados.

Para tanto, permeando as situações de análises, objetivamos investigar por meio da Teoria Antropológica do Didático as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas de cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch. Deste modo, o Capítulo 3 apresentará a análise dos dados, a qual contempla uma análise *a priori* e *a posteriori* da Organização Praxeológica.

CAPÍTULO 3 ANÁLISE DA FASE EXPERIMENTAL

Neste capítulo, discorreremos acerca da análise *a priori* e a análise a *posteriori* da Organização Praxeológica elaborada. Com isso, primeiramente, apresentaremos uma análise que diz respeito à Organização Praxeológica *a priori*, e assim, discutiremos acerca de uma análise praxeológica que compreende a Organização Matemática, argumentando por meio da TAD a maneira que realizamos o estudo que delimitou o saber a ensinar de modo a definir o objeto a ser estudado.

Por fim, realizaremos a análise a *posteriori*, articulando os dados coletados por meio da implementação com as bases teóricas que discutimos nessa pesquisa, destacando aspectos a respeito dos momentos didáticos e do quarteto praxeológico elaborado por Chevallard (1998). Desse modo, baseamos a nossa questão norteadora em identificar as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas para o cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch.

3.1 Construção e análise *a priori* das situações experimentais

As análises realizadas nesse momento são discutidas *a priori*, ou seja, antes de abordarmos a situação da implementação em sala de aula. Henriques (2016) descreve a importância de se realizar esse tipo de análise, justificando seu entendimento:

> Portanto, a apresentação da análise *a priori* dos resultados esperados mostra no trabalho realizado a amplitude do conhecimento e da prática do pesquisador sobre o seu objeto matemático de referência. Além disso, a análise *a priori* serve como referência para um Professor implementar uma sequência de ensino correspondente em sala de aula (HENRIQUES, 2016, p. 10).

Assim, ao construirmos uma OD, por meio dos momentos de estudo de Chevallard (1998), temos o objetivo de ensino e aprendizagem de uma OM. Com isso, realizamos uma associação entre uma praxeologia e um saber matemático.

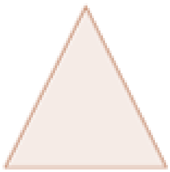
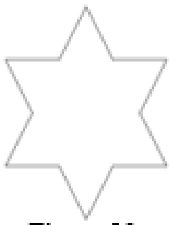
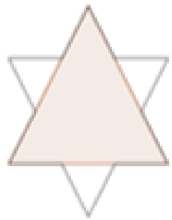
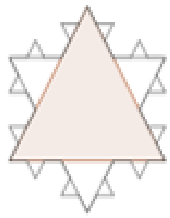
Organizamos as análises *a priori* considerando o tipo de tarefa para cada etapa da construção e da exploração do Fractal Ilha de Koch. Deste modo, identificamos as tarefas e as enumeramos de t_1, t_2, t_3 e t_4, pois elaboramos quatro tarefas de modo a chegar ao nosso Objeto: o cálculo de medidas do perímetro e da área do Fractal Ilha de Koch. Também elaboramos subtarefas[14] referentes a cada uma das tarefas, e posteriormente, indicamos a técnica, tecnologia

[14] Utilizaremos essa terminologia para mencionar tarefas menores que são necessárias para cumprir a tarefa maior.

e a teoria de cada uma das subtarefas. Organizamos tais informações nos quadros que serão indicados e em discussões posteriores a cada um deles.

Inicialmente, apresenta-se o tutorial[15] para que iniciam o encontro com as tarefas t. Assim, com esse momento, é realizada a explicação da construção e exploração do Fractal Ilha de Koch com o auxílio do *software* GeoGebra. Nesse sentido, para iniciarmos a construção e exploração do Fractal Ilha de Koch, faz-se necessário construir um triângulo equilátero inicial que designamos por Etapa 0. Tal triângulo deve ser construído no GeoGebra, seguindo os passos do tutorial elaborado e que será disponibilizado aos participantes. O triângulo ficará conforme a Figura 13, que está no Quadro 3.

Quadro 3: Construção de cada uma das etapas do Fractal Ilha de Koch

 **Figura 11:** Etapa 0	 **Figura 12:** Etapa 1	 **Figura 13:** Etapa 2	 **Figura 14:** Etapa 1 com as etapas anteriores	 **Figura 15:** Etapa 2 com as etapas anteriores

Fonte: Os Autores, 2021.

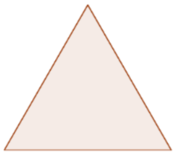
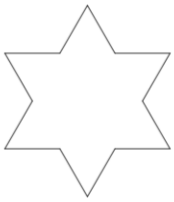
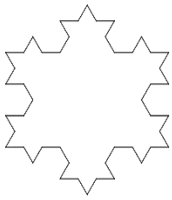
O Quadro 3 será utilizado para referenciar e esclarecer como fica cada uma das etapas do Fractal que iremos abordar durante a análise *a priori*. Organizamos as análises a *priori* considerando o tipo de tarefa para cada etapa da construção e da exploração do Fractal Ilha de Koch. E, deste modo, identificamos as Tarefas e as enumeramos de 1, 2, 3 e 4. As subtarefas referentes a cada uma destas foram indicadas posteriormente, e em seguida são indicadas a tecnologia, a teoria e a técnica referente a cada uma das subtarefas. Organizamos tais informações nos quadros de 1 a 4, com discussões posteriores a cada um deles.

O Quadro 4, a seguir, apresenta o tipo de tarefa, a técnica, a tecnologia e a teoria previstas para os alunos durante uma aula de matemática, de modo a explorar a generalização para o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa da construção da Ilha de Koch.

Quadro 4: Análise Praxeológica *a priori* do tipo de tarefa $\boldsymbol{T_1}$

Tipo de Tarefa T_1	Generalizar o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa da construção do Fractal Ilha de Koch.

[15] Apêndice A - Tutorial para a construção do Fractal Ilha de Koch.

Tarefa t_1	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa do Fractal Ilha de Koch.			
Etapa	Subtarefa	Técnica τ	Tecnologia θ	Teoria
	$t_{1.1}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 0 do Fractal.	Contar os segmentos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "segmento"	Aritmética e Geometria
	$t_{1.2}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 1 desse Fractal.	Contar os segmentos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "segmento"	Aritmética e Geometria
	$t_{1.3}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 2 do Fractal.	a) Contar os segmentos um a um b) Multiplicar a quantidade de segmentos obtidos na etapa anterior (Etapa 1) por 4	a) Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "segmento" b) Noção de proporção	Aritmética e Geometria
	$t_{1.4}$: Construir uma fórmula para a quantidade de segmentos obtidos na Etapa n desse Fractal.	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de segmentos em uma Etapa n.	Noção de potenciação e padrão recorrente.	Álgebra e Geometria

Fonte: Os Autores, 2022.

Para complementar o quadro, descreveremos uma resposta que é possível de ser obtida para cada uma das subtarefas apresentadas no Quadro 4, que auxiliou na análise praxeológica que culminou na identificação do quarteto praxeológico de cada subtarefa. No que diz respeito à subtarefa $t_{1.1}$, temos que uma resolução seria a contagem de cada um dos segmentos que constituem o triângulo equilátero, totalizando três segmentos, constituindo uma resposta para a subtarefa $t_{1.1}$.

Para a subtarefa $t_{1.2}$, uma resolução que entendemos que seja possível, trata-se em contar os segmentos construídos na Etapa 1, chegando a uma quantidade de 12 segmentos, ou também, podendo observar que 12 é 3 multiplicado por 4. Ponderamos que, por meio dessa resolução, é possível identificar o quarteto praxeológico vigente para essa subtarefa.

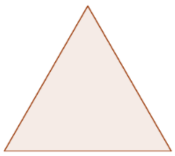
Uma primeira resolução possível utilizada na subtarefa $t_{1.3}$ é partir da mesma linha das subtarefas anteriores e contar os segmentos, que resultam em 48, na Etapa 2. Outra resolução que entendemos ser pertinente para essa subtarefa seria a realização de uma multiplicação, caso o estudante observe que o segmento da etapa anterior é acrescido de 4 novos segmentos e, como já havíamos feito uma iteração na etapa anterior, é possível observar que o resultado pode ser entendido como $3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^{2}$, ou seja, 48 segmentos. Ao observar o Quadro 4, podemos notar que a técnica, tecnologia e teoria, foram identificadas por meio dessas resoluções que apresentamos.

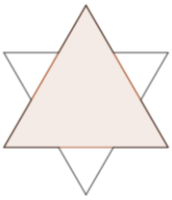
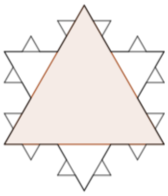
A subtarefa $t_{1.4}$, que completa o ciclo das subtarefas, é destacada pelo fato de ser a construção da fórmula. Assim, nessa resolução, entendemos que deve compreender que em cada etapa passa de 1 para 4 segmentos do triângulo construído na etapa anterior de maneira que é preciso encontrar um fator comum entre as etapas, ou seja 4^{n}, mas como um triângulo equilátero tem 3 lados, é preciso multiplicar por 3 a generalização encontrada. Logo, a fórmula para o cálculo da quantidade de segmentos é $3 \cdot 4^{\mathrm{n}}$. Com essa resolução, foi possível observar o quarteto praxeológico presente em uma subtarefa que objetivou na construção de uma fórmula para a quantidade de segmentos.

O Quadro 4 especifica a análise praxeológica da tarefa t_1 prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio e, abaixo do quadro, apresentamos uma possível resolução para que elucidemos a análise praxeológica de uma OM que desenvolvemos. Observe que ao serem trabalhadas as subtarefas $t_{1.1}$, $t_{1.2}$, $t_{1.3}$ e $t_{1.4}$ correspondentes à tarefa t_1, evidencia-se o trabalho contínuo com a Organização Matemática. Assim, entendemos que essa é uma análise praxeológica *a priori* do tipo de tarefa T_1, que consistiu em uma análise matemática.

A seguir, apresentaremos aspectos fundamentais de uma análise praxeológica do tipo de tarefa T_2 referente à tarefa t_2, como está exposto no Quadro 5.

Quadro 5: Análise Praxeológica *a priori* do tipo de tarefa T_2

Tipo de Tarefa T_2	Generalizar o cálculo da quantidade de triângulos equiláteros que são construídos em cada etapa da construção do Fractal Ilha de Koch			
Tarefa t_2	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de triângulos equiláteros em cada etapa.			
Etapas	Subtarefa	Técnica τ	Tecnologia θ	Teoria
	$t_{2.1}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 0 desse Fractal	Contar os triângulos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “triângulo”	Aritmética e Geometria

	$t_{2.2}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 1 desse Fractal.	Contar os triângulos um a um	Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “triângulo”	Aritmética e Geometria
	$t_{2.3}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 2 desse Fractal.	a) Contar os triângulos um a um b) Multiplicar a quantidade de triângulos obtidos na etapa anterior (Etapa 1) por 4	a) Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “triângulo” b) Noção de proporção	Aritmética e Geometria
	$t_{2.4}$: Construir uma fórmula para a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa n desse Fractal.	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de triângulos em uma Etapa n.	Noção de potenciação e padrão recorrente.	Álgebra e Geometria

Fonte: Autores, 2022.

Em vista do que foi descrito no Quadro 5, apresentamos uma possível resolução que articule com a análise praxeológica realizada, ou seja, iremos escrever os cálculos e procedimentos necessários para poder identificar a técnica, tecnologia e teoria de cada subtarefa desenvolvida.

Para a subtarefa $t_{2.1}$, compreendemos que uma resolução possível consiste na observação de que no Fractal, em sua Etapa 0, contém somente um triângulo equilátero, nesse sentido, entendemos que seria necessário somente realizar a contagem desse triângulo obtido nessa etapa. Podemos observar que essa resolução permitiu a identificação do quarteto praxeológico disposto no Quadro 5.

Entendemos que para a subtarefa $t_{2.2}$, a resolução consiste em contar os triângulos, ou seja, é preciso atentar ao processo de construção desse Fractal, pois em cada lado do triângulo obtido na Etapa 0 é realizada a construção da Curva de Koch. Deste modo, considerando os triângulos que foram obtidos na Etapa 0 e na Etapa 1, temos um total de 4 triângulos.

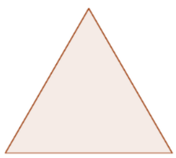
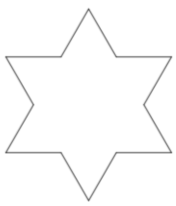
Para a subtarefa $t_{2.3}$, que trata na Etapa 2 do fractal, entendemos que uma possível resolução seria a compreensão do padrão recorrente, pois ao observar um dos lados do triângulo referente à Etapa 1, é possível identificar a construção de um total de 4 triângulos e, como tem 3 lados, então temos um total de 12 triângulos. Portanto, como queremos todos os triângulos, basta somar com os triângulos obtidos na Etapa 1, logo, obteremos um total de 16 triângulos. Portanto, identificamos que na Etapa 2 tem-se $16 = 4 \cdot 4$ triângulos. Observe que nessa resolução, distinta das anteriores, é preciso mobilizar outras noções matemáticas para o desenvolvimento da resolução dessa subtarefa.

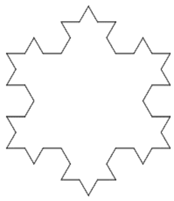
O objetivo da subtarefa $t_{2.5}$ é encontrar a quantidade de triângulos equiláteros obtidos para uma etapa qualquer desse Fractal de maneira que conclua uma generalização para qualquer etapa. Nesse sentido, temos então que uma possível resolução está em compreender que em cada etapa há um aumento de 4 triângulos, sendo este o fator comum entre as etapas, assim, para uma etapa qualquer temos 4^n triângulos, sendo esta a fórmula para o cálculo da quantidade de triângulos. Com isso, essa subtarefa completa o ciclo para se resolver a Tarefa t_2, uma vez que precisou perpassar por todas as subtarefas anteriores, realizando sua análise praxeológica.

O Quadro 5 especifica a análise praxeológica da tarefa t_2 prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Observe que as subtarefas $t_{2.1}$, $t_{2.2}$, $t_{2.3}$ e $t_{2.4}$, correspondentes à tarefa t_2, evidenciam o trabalho contínuo com a Organização Matemática. Assim, entendemos que essa é uma análise praxeológica *a priori* do tipo de tarefa T_2, que consistiu em uma análise matemática.

A seguir, apresentaremos alguns aspectos da análise praxeológica do tipo de tarefa T_3 referente à tarefa t_3, como é exposto no Quadro 6.

Quadro 6: Análise Praxeológica *a priori* do tipo de tarefa $\boldsymbol{T_3}$

Tipo de Tarefa T_3	Generalizar o cálculo da medida do perímetro do Fractal em cada etapa de sua construção			
Tarefa t_3	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada etapa do Fractal Ilha de Koch considerando o comprimento de cada segmento do triângulo inicial como sendo *c*			
Etapas	Subtarefa	Técnica τ	Tecnologia θ	Teoria
	$t_{3.1}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 0	Somar a medida de cada segmento que compõe a figura da Etapa 0	Conhecimento do elemento figural “segmento”; e noção de soma algébrica	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{3.2}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 1	Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.2}$	Conhecimento do elemento figural “segmento”; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura	Aritmética, Álgebra e Geometria

	$t_{3.3}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 2	Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.3}$	Conhecimento do elemento figural “segmento”; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{3.4}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro na Etapa n	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a medida do perímetro em uma Etapa n.	Noção de potenciação de números inteiros e de números fracionários; proporção e padrão recorrente.	Aritmética, Álgebra e Geometria

Fonte: Autores, 2022.

Tendo em vista que o Quadro 6 apresenta alguns elementos da análise praxeológica, faremos agora a descrição das resoluções que culminaram na realização e identificação do quarteto praxeológico mobilizado para cada subtarefa. Partindo disso, temos que na subtarefa $t_{3.1}$ compreendemos que não há a necessidade de um comprimento fixo, por isso, consideramos cada segmento do triângulo inicial como sendo c, ou seja, uma variável. Deste modo, a resolução que adotamos como sendo possível, é observar que na Etapa 0, que representa um triângulo equilátero, temos 3 lados e cada um tem o comprimento c, de maneira a concluir que o perímetro pode ser dado por $3c$.

Como consequência da subtarefa anterior, temos a subtarefa $t_{3.2}$. Para tanto, a resolução que permitiu que realizássemos a análise praxeológica disposta no Quadro 6 é observar que no processo de construção do fractal, quando é realizado a construção da Curva de Koch divide-se cada segmento em 3 partes iguais, gerando 4 segmentos advindos da curva, em cada lado do triângulo.

Assim, observando que o comprimento de cada segmento na Etapa 0 era c e como na Etapa 1 é realizada a divisão em 3 partes iguais, tem-se que o comprimento de cada segmento da Etapa 1 corresponde a $\frac{1}{3}c$. Como foi encontrado o resultado da subtarefa $t_{1.2}$, que consiste na quantidade de segmentos, resta realizar a multiplicação de ambos os valores. Portanto, o perímetro na Etapa 1 é $12 \cdot \frac{1}{3}c$, ou podemos reescrever da forma $3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}c$, sendo o perímetro nessa etapa.

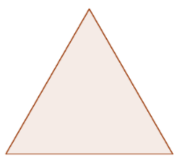
No que se refere à resolução da subtarefa $t_{3.3}$, temos um fato a ser considerado: a medida de cada segmento na etapa anterior, ou seja, na Etapa 1 o comprimento representava $\frac{1}{3}c$, nesse sentido, para a Etapa 2 temos que observar que cada segmento foi dividido em 3 partes iguais novamente, de maneira que a medida do segmento na Etapa 2 é $\frac{1}{3}.\frac{1}{3}c = \left(\frac{1}{3}\right)^2 c$. Assim, o perímetro na Etapa 2 é a multiplicação da quantidade de segmentos pelo seu comprimento, portanto, o perímetro é $48 \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{3}c = 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 c$. Com essa resolução, observamos que foram mobilizadas outras noções matemáticas, permitindo identificar a técnica, tecnologia e teoria.

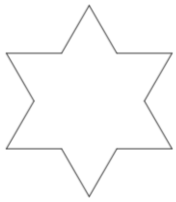
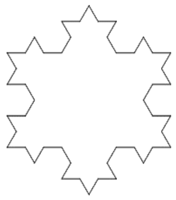
Para finalizar, temos a subtarefa $t_{3.4}$, e esta faz o fechamento da Tarefa t_3, a qual realizamos uma análise praxeológica por meio da resolução que descreveremos nesse momento. Assim, utilizando os dados das subtarefas anteriores, temos que de cada segmento é $\frac{1}{3}c$ em cada etapa, a fórmula do comprimento de cada segmento em uma etapa qualquer é a $\left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}}$ c. Assim, temos a informação de que a quantidade de segmentos obtidos em qualquer etapa é $3 \cdot 4^{\mathrm{n}}$, portanto, basta fazer uma operação algébrica entre esses resultados, ou seja, a fórmula para o perímetro em uma Etapa *n* para esse Fractal é $3 \cdot 4^{\mathrm{n}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}}$ c. Com isso, concretiza-se a resolução que permitiu realizar a análise e identificar o quarteto praxeológico.

O Quadro 6 apresenta uma especificação acerca da análise praxeológica realizada para a tarefa t_3, que foi prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Assim, entendemos as subtarefas $t_{3.1}$, $t_{3.2}$, $t_{3.3}$ e $t_{3.4}$ correspondentes à tarefa t_3, como sendo indicado o trabalho contínuo com a Organização Matemática. Desse modo, compreendemos que essa é uma análise praxeológica *a priori* do tipo de tarefa T_3, que consistiu em uma análise matemática.

A seguir, apresentaremos uma parte da análise praxeológica do tipo de tarefa T_4 referente à tarefa t_4, como é exposto no Quadro 7.

Quadro 7: Análise Praxeológica *a priori* do tipo de tarefa $\boldsymbol{T_4}$

<table>
<tr><td colspan="2">Tipo de Tarefa T_4</td><td colspan="3">Generalizar o cálculo da medida da área do Fractal Ilha de Koch em cada etapa de sua construção</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tarefa t_4</td><td colspan="3">Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada etapa do Fractal Ilha de Koch considerando A_0 a área do triângulo inicial</td></tr>
<tr><td>Etapas</td><td>Subtarefa</td><td>Técnica τ</td><td>Tecnologia θ</td><td>Teoria</td></tr>
<tr><td></td><td>$t_{4.1}$: Encontrar a área da figura obtida na Etapa 0</td><td>Considerar a área prevista no enunciado da Tarefa</td><td>Noção de incógnita e interpretação de enunciado matemático</td><td>Álgebra</td></tr>
</table>

	$t_{4.2}$:Encontrar a área da figura obtida na Etapa 1	Encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior (Etapa 0)	Conhecimento do elemento figural "triângulo"; noção geométrica de área; noção de multiplicação algébrica	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{4.3}$: Encontrar a área da figura obtida na Etapa 2	Encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior (Etapa 1)	Conhecimento do elemento figural "triângulo"; noção geométrica de área; noção de multiplicação algébrica	Aritmética, Álgebra e Geometria
	$t_{4.4}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área na Etapa n	Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a medida da área em uma Etapa n.	Noção de potenciação de números inteiros e de números fracionários; multiplicação e padrão recorrente; noção de progressão geométrica	Aritmética, Álgebra e Geometria

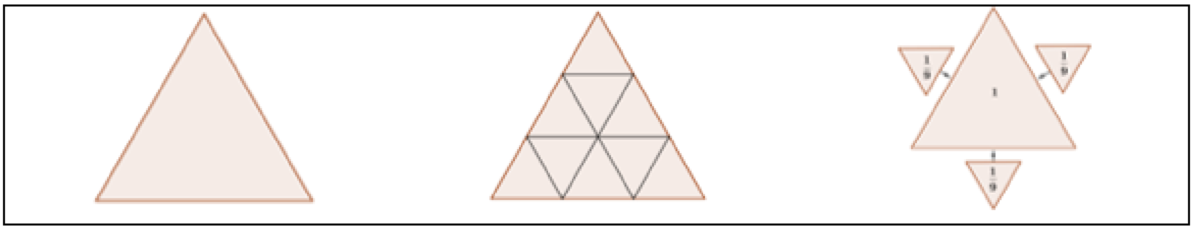
Fonte: Autores, 2022.

Como podemos observar no Quadro 7, é apresentada uma análise praxeológica que realizamos para a Tarefa t_4 e suas subsequentes subtarefas. Deste modo, nos próximos parágrafos descreveremos as resoluções que nos baseamos para identificar a técnica, tecnologia e teoria.

Para iniciar essas resoluções, temos a subtarefa $t_{4.1}$, que é resolvida utilizando o próprio dado que o enunciado apresenta, assim, entendemos que a resolução é utilizar um termo genérico no cálculo da área na Etapa 0 (A_0). Ressaltamos que a área de um triângulo equilátero é dada pela fórmula $A_0 = \frac{C^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto, desde o início da nossa proposta, consideramos A_0 como sendo a área da Etapa 0. Observe que para essa é uma solução simples, contudo, foi necessária a mobilização de noções matemáticas que se perfazem durante a vida estudantil.

Na sequência, tem-se a subtarefa $t_{4.2}$, na qual entendemos que uma resolução possível se inicia a partir da utilização da área inicial como sendo A_0, na Etapa 0. Com isso, na Etapa 1, direciona-se para uma conclusão de que os triângulos gerados têm área igual a $\frac{1}{9}$ do triângulo inicial. Isso acontece porque no interior do triângulo inicial é obtido um total de 9 triângulos equiláteros menores, gerando uma área igual a $\frac{1}{9}$ da área inicial, ou seja, $\frac{1}{9}A_0$, conforme exemplifica a Figura 16. Como foram gerados 3 triângulos nessa etapa, tem-se que a área deles corresponde a $3\frac{1}{9}A_0$, obtendo como resultado o seguinte:

Figura 11: Área dos triângulos gerados na Etapa 1



Fonte: Autores, 2022.

Portanto, com essas discussões, podemos observar que a área do Fractal Ilha de Koch na Etapa 1 é $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0$, lembrando que toda etapa iterada deve ser somada com a área inicial.

Foi concluído na subtarefa $t_{4.2}$ que a área do triângulo gerado corresponde a $\frac{1}{9}$ da área inicial. Assim, com auxílio do resultado anterior, entendemos que uma resolução possível para a subtarefa $t_{4.3}$, correspondente à Etapa 2, é encontrar as áreas dos triângulos gerados e a área total desse Fractal nessa etapa. Como são gerados triângulos menores quando comparados à etapa anterior, observa-se que um triângulo dessa etapa corresponde a uma área de $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$ da área inicial, ou $\left(\frac{1}{9}\right)^2 A_0$, pois ocorre de maneira similar ao apresentado na Figura 16. Desse modo, sabemos que foram gerados 12 triângulos nessa etapa, como observado na subtarefa $t_{2.3}$, e com isso, é realizada a multiplicação da quantidade de segmentos pela área dos triângulos gerados nessa etapa. Assim, temos que a área de todos os triângulos gerados nessa etapa corresponde a $3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 A_0$.

A partir dessas considerações, conclui-se que a área do Fractal Ilha de Koch na Etapa 2 equivale à soma de todas as áreas das etapas anteriores com a obtida nessa etapa. Portanto, a área da Etapa 2 é $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \mathrm{A}_0$. Logo, realizando a manipulação algébrica, é possível identificar possíveis padrões, concluindo que $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \mathrm{A}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \mathrm{A}_0$, na Etapa 2. Observe que nessa resolução, diversas noções matemáticas precisaram ser utilizadas para chegar na sua resolução, desse modo, permitiu que pudéssemos apresentar uma análise praxeológica mais ampla para essa subtarefa.

Como forma de ampliar a compreensão dessa resolução, apresentamos uma próxima etapa para que elucide melhor o caminho tomado para o desfecho da Tarefa t_4. Nesse sentido, para uma possível Etapa 3, temos a área como sendo $A_3 = A_0 + \frac{1}{3} \cdot A_0 + 3 \cdot 4\left(\frac{1}{9}\right)^2 A_0 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{9}\right)^3 A_0$, e efetuando uma manipulação algébrica, conclui-se que $A_3 = A_0 + \frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}A_0 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 A_0$. Lembrando que esse parágrafo está como forma de complementariedade para compreensão das subtarefas, mas a Etapa 3 não faz parte do escopo da Organização Matemática.

Assim, como desfecho, apresentamos uma resolução possível para a subtarefa $t_{4.4}$, na qual temos a fórmula para o cálculo da medida de área na Etapa n que pode ser dada na sua forma extensa por $A_n = A_0 + \frac{1}{3}.A_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)A_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2 A_0 + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} A_0$ em que foi possível identificar o fator comum. Mas também é possível, utilizando a fórmula da soma da progressão geométrica (P.G.), caracterizar em uma outra forma de resolução, na qual, aplicando a fórmula da soma da P.G., temos $A_n = \frac{A_1(q^n-1)}{q-1}$ em que q é a razão dada por $q = \frac{a_2}{a_1}$, dessa forma, ao realizar os cálculos, conclui-se $q = \frac{4}{9}$ a razão. Basta aplicar na fórmula da soma da P.G. e concluir que a $\tau_{4.5.1}$ é $A_n = A_0\left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$. Ainda, como forma complementar, podemos considerar outra resolução, utilizando somatório, ou seja, teríamos que $A_n = A_0\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}\right)$. Para tanto, a subtarefa $t_{4.5}$ é realizada, fechando a Tarefa t_4 e contribuindo para a formação da OM desenvolvida.

Ao discutir sobre as subtarefas referentes à tarefa t_4, uma parte de nossa análise *a priori*, que estão dispostas no Quadro 7, é apresentada uma análise praxeológica, em que foi prevista para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Assim, entendemos que as subtarefas $t_{4.1}$, $t_{4.2}$, $t_{4.3}$ e $t_{4.4}$ correspondentes à tarefa t_4, se apresentam como um trabalho contínuo com a Organização Matemática.

Para tanto, por meio do que foi descrito até o momento, temos a análise praxeológica *a priori* que realizamos, sendo que objetivamos em quatro tarefas para a construção de fórmulas do Fractal Ilha de Koch. Isso foi possível graças ao auxílio do aporte teórico-metodológico adotado para essa pesquisa. Na próxima seção, apresentaremos os dados coletados, de modo a realizar uma análise praxeológica das resoluções realizadas pelos estudantes.

3.2 Experimentação e análise dos momentos didáticos

Durante a realização da implementação, fase experimental, pudemos observar, com o desenvolvimento da aula, o desenrolar dos momentos didáticos e suas particularidades para cada momento. Nesse sentido, iremos descrever e analisar os momentos didáticos realizados pelos pesquisadores durante a implementação proposta.

A fim de analisar os momentos didáticos (CHEVALLARD, 1998; ARTAUD, 2018) que ocorreram durante a implementação, os elencaremos a seguir para relembrar, uma vez que foram apresentados em seções anteriores. Nesse sentido, apresentamos que:

- A primeira função de estudo é o momento do primeiro encontro com o tipo de tarefa T;
- A segunda função de estudo é explorar o tipo de tarefa T;
- A terceira função de estudo é o momento tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$;
- A quarta função de estudo é o momento de trabalho com a organização matemática, ou seja, com a técnica em diferentes tarefas;
- A quinta função de estudo é o momento da institucionalização;
- A sexta função de estudo é o tempo de avaliação (ARTAUD, 2018, p. 149-151).

Tendo em vista estes momentos, destacamos que eles não ocorrem, necessariamente, em ordem cronológica, pois as funções de estudo podem transitar pela implementação diversas vezes e em diversas situações durante uma aula de matemática. Almouloud (2007, p. 124) segue o mesmo entendimento, destacando que “os momentos didáticos são, primeiramente, uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica”. Uma vez explicitado isso, destacamos a importância de usar os momentos didáticos para a elaboração de uma Organização Didática. Artaud (2019) explica que para realizar uma análise precisamos realizar uma diferenciação, isto é:

> A análise de qualquer processo de estudo requer distinguir a organização ou praxeologia do saber que modela o que está em jogo no estudo, o "coração" do sistema didático [...], da organização ou praxeologia didática que permite o estudo do conhecimento. Ressalta-se que os conhecimentos considerados como parte do estudo podem ser de qualquer natureza, inclusive didática (ARTAUD, 2019, p. 248, tradução nossa).[16]

[16] L’analyse de tout processus d’étude nécessite de distinguer l’organisation ou praxéologie de savoir qui modélise ce qui est enjeu de l'étude, le « cœur » du système didactique S (X, Y, ♥), de l’organisation ou la praxéologie didactique qui permet l'étude du savoir. On notera que le savoir considéré comme enjeu de l’étude peut être de toute nature, y compris didactique.

Desta maneira, devemos estar cientes dessa diferenciação, uma vez que a OD modelada está permitindo o estudo do conhecimento matemático Fractal Ilha de Koch. Em razão disso, Chevallard (1999) destaca que o modelo de momentos de estudo enfatiza a importância em que um professor deve atribuir na elaboração de uma OD que se objetiva no ensino e aprendizagem de uma OM. Assim, entendemos que os momentos didáticos são significativos para esta pesquisa, tendo em vista que são importantes para a análise dos dados coletados na implementação, porque contribuem na compreensão das técnicas e das justificativas que são utilizadas pelos estudantes para executar aquele tipo de tarefa.

Para tanto, considerando os aspectos mencionados anteriormente, faremos, primeiramente, uma contextualização da estrutura que seguimos para realizar a implementação. Depois, utilizaremos dos momentos didáticos para realizar a análise da OD que elaboramos a fim de construir as fórmulas para o perímetro e para a área do Fractal Ilha de Koch. Desse modo, a implementação seguiu algumas diretrizes que foram elaboradas previamente na Organização Didática, pois foram auxiliadas pelas discussões provenientes das aplicações piloto.

Assim, a implementação da pesquisa ocorreu com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em um Colégio Estadual, localizado ao noroeste do Paraná, nos dias 27 e 29 de setembro de 2021, com duração de 4 horas aula, divididas em 2 horas aulas para cada dia.

As tarefas (Apêndice B) foram divididas em quatro etapas, perpassando pelas etapas da construção do Fractal Ilha de Koch, sendo as tarefas correspondentes à Etapa 0, as tarefas correspondentes à Etapa 1, e assim por diante, na Etapa 2 e na Etapa n. Todas essas tarefas, tinham por objetivo encontrar a quantidade de segmentos; a quantidade de triângulos; o perímetro e a área do Fractal Ilha de Koch em cada uma das Etapas, de modo que a Etapa n proporcionasse a generalização (fórmula) a ser construída. Cada uma dessas etapas teve o auxílio do *software* GeoGebra para realizar a construção do Fractal.

Durante a realização da construção e resolução das tarefas, os participantes seguiam o tutorial disponibilizado a eles. Cada uma das tarefas foi realizada pelos participantes em folhas avulsas que foram entregues nos momentos oportunos. As folhas eram coloridas, sendo a folha branca correspondente à Etapa 0, a folha verde correspondente à Etapa 1, a folha rosa correspondente à Etapa 2, a folha amarela para a Etapa n. Após a realização de cada etapa do fractal, e consequentemente suas tarefas, os participantes entregavam a folha com as resoluções aos pesquisadores, porém, eles anotavam antes as suas resoluções em uma tabela que está disposta nos Apêndices A e B, que também foi entregue a eles junto com o tutorial.

Para tanto, a realização das tarefas ficou condicionada à construção do Fractal no GeoGebra, ou seja, após a construção do Fractal na Etapa 0, o estudante realizou o desenvolvimento das tarefas constantes na folha referente à Etapa 0. A folha com a resolução das tarefas da Etapa 0 foi entregue aos pesquisadores, que depois disponibilizaram a folha com as tarefas da Etapa 1. Devido à dificuldade dos estudantes em lidar com o *software* e resolver as tarefas, os pesquisadores compreenderam que o contrato didático estabelecido sobre a resolução das tarefas da Etapa 0, seguida da sua formalização[17], deveria ser modificado. Neste sentido, a construção do fractal foi realizada no Laboratório de Matemática, desde a Etapa 0 até a Etapa 2 (alguns estudantes fizeram até a Etapa 3) e a sua exploração matemática, por meio de tarefas, foi discutida e formalizada somente no próximo encontro. Sendo assim, no próximo encontro, foram discutidas as resoluções das tarefas das Etapas 0 e 1, e posteriormente disponibilizadas as tarefas da Etapa 2, seguida da sua formalização, e as tarefas da Etapa n seguidas também da sua formalização.

Partindo disso, chegamos a segunda parte mencionada, a análise da OD por meio dos momentos didáticos, ou seja, descreveremos os acontecimentos e os analisaremos segundo a TAD.

De maneira implícita, consideramos, para além do que foi mencionado, três postulados citados por Almouloud (2007, p.114), que indicam que o quarteto praxeológico "permite modelar as práticas sociais em geral e, em particular, a atividade matemática". São eles:

- *Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente delineadas.*
- *O cumprimento de toda a técnica decorre do desenvolvimento de uma técnica.*
- *A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições.*

Para tanto, concebemos esses postulados como critérios norteadores para o desenvolvimento da descrição e análise da Organização Didática. A partir dos critérios e perspectivas apresentados, até então, permeamos aos acontecimentos que foram observados e anotados durante a pesquisa.

[17] Entendemos que ao entregar aos pesquisadores a folha com a resolução das tarefas antes da formalização, os estudantes envolvidos não encontram possibilidades de alteração nos dados a serem coletados. Assim, após o desenvolvimento de cada uma das tarefas propostas nas etapas do fractal, os estudantes entregam o material para que possamos realizar o fechamento de cada tarefa, sem que os dados coletados sejam contaminados pelos direcionamentos dos pesquisadores.

A implementação se iniciou quando os pesquisadores realizaram uma introdução, por meio de slides, a respeito da Geometria Fractal, ou seja, nesse momento foi feio uma explicação acerca do que é um fractal, suas particularidades e características principais, assim como uma contextualização histórica a respeito dessa geometria. Entendemos que é necessária a utilização desse momento introdutório para que o estudante possa ter seus primeiros contatos com o objeto matemático, de maneira que possam visualizar algumas formas e fractais diferentes. Com isso, foi direcionado o estudo para o Fractal Ilha de Koch, pois este era o objeto de pesquisa a ser explorado pelos estudantes participantes.

Entendemos que esse processo introdutório é importante, pois, ao explanar tais informações, situa os estudantes no campo matemático em que será estudado. Após isso, entregamos as tarefas correspondentes a cada etapa do fractal, de modo que as tarefas correspondentes à Etapa 0 são entregues após a construção do fractal em sua Etapa 0. Depois de resolvidas estas tarefas, cada estudante devolve sua folha preenchida e recebe a folha das tarefas da Etapa 1, que serão respondidas após a construção do fractal em sua Etapa 1, e assim sucessivamente. Ao receber cada uma das tarefas, em cada uma das etapas de construção, entendemos que ocorre o primeiro encontro com as tarefas, ou seja, é o encontro "que marca o início de um processo de estudo de T, isto é, o que torna a tarefa T (como um novo evento) enquanto tipo de tarefa problemático" (ARTAUD, 2018, p. 149). Almouloud (2007) explicita que esse é o momento em que os estudantes realizam o primeiro encontro com uma organização praxeológica por meio de tarefas. Esse fato ocorre em nossa pesquisa por meio das tarefas correspondentes a cada etapa do fractal.

Nesse sentido, os estudantes têm o contato com os tipos de tarefas $T_1, T_2,\ T_3$ e T_4, pois "este momento consiste em encontrar a OM por meio de, pelo menos, um dos tipos de tarefas que a constituem [...]" (ALMOULOUD, 2007, p. 124). Assim, as tarefas e suas respectivas subtarefas são apresentadas e dispostas no decorrer da implementação, caracterizando os primeiros momentos que ocorrem durante os contatos com as da Etapa 0, as da Etapa 1, assim por diante, até a Etapa *n*. Desse modo, observamos que nesse momento, de acordo com a ecologia didática apresentada por Chevallard (1991) e Artaud (1998), o *software* GeoGebra pode ser considerado como habitat do Fractal Ilha de Koch para ser (re)introduzido na Educação Básica.

Seguindo os mesmos princípios, entendemos que o objeto matemático foi introduzido nesse ambiente escolar, uma vez que observamos os estudantes e eles não detinham conhecimentos a respeito do GeoGebra e não apresentavam conhecimentos prévios do Fractal.

Com isso, objetivamos que nesse momento o GeoGebra fosse considerado como o habitat do fractal para estes estudantes.

Em seguida, inicia-se a exploração do tipo de tarefa T e consequentemente, das suas tarefas (ARTAUD, 2018). Nesse caso, entendemos que ao iniciar a exploração das subtarefas correspondentes aos tipos de tarefa $T_1, T_2,\ T_3$ e T_4, os estudantes começaram a esboçar uma técnica para que possam verificar a sua validade. Dessa maneira, seguimos o mesmo entendimento de Almouloud (2007, p.124) em que ele descreve que nesse momento "tem-se a exploração das tarefas e o início da elaboração de uma técnica para resolver esse tipo de tarefa". Isto é, esse é um momento exploratório para os alunos, uma vez que eles começam a questionar e buscar uma técnica viável para responder estas subtarefas.

Com a finalização da exploração matemática das tarefas correspondentes às etapas do fractal, que foram realizadas de maneira autônoma[18] pelos estudantes, são discutidas as técnicas apresentadas pelos alunos, de maneira que as torne compreensíveis para todos os presentes, pois inicia-se o momento de justificar a técnica e discutir sua validade.

Entendemos que esse momento está perpassando toda a implementação, desde o primeiro momento didático apresentado, uma vez que, além de ser o momento que desenvolve o bloco tecnológico-teórico, ele se aperfeiçoa conforme o desenvolvimento do estudo. Melhor dizendo, Almouloud (2007, p. 125) destaca que este momento "começa a se constituir desde o primeiro encontro, tornando-se cada vez mais preciso no decorrer do estudo".

Em seguida, inicia-se o momento do trabalho com a OM elaborada (ARTAUD, 2018), ou seja, ao trabalhar os tipos de tarefas $T_1, T_2,\ T_3$ e T_4 por meio das suas respectivas subtarefas, observa-se essa função de estudo, pois é quando os estudantes estão efetivamente trabalhando com a Organização Matemática e mobilizado suas técnicas.

Compreendemos que isso ocorre desde o momento didático que realiza a exploração da OM, pois ao entregar as tarefas referentes a cada etapa do fractal, os estudantes efetivamente realizam o "trabalho com a técnica em diferentes tarefas, que pode, eventualmente, ser aperfeiçoada pela sua mobilização relativa a um conjunto de tarefas qualitativamente e quantitativamente representativas da organização matemática em jogo (ALMOULOUD, 2007, p. 125).

Artaud (2018, p. 151) explica que esse momento didático "é geralmente realizado nas organizações didáticas configuradas no ensino secundário através de dispositivo de resolução

[18] Compreendemos como estudantes autônomos, que realizaram as subtarefas de modo independente e sem interferência direta dos pesquisadores.

de exercícios, as técnicas de resolução são baseadas nesses dispositivos e podem ser diversas". Assim, conforme explicitado, a implementação foi realizada no Ensino Médio (no nível de co-determinação considerado como a Pedagogia), em que ao analisar a Organização Matemática (como vemos na subseção anterior), observamos a mobilização de diversas técnicas que foram desenvolvidas pelos estudantes, assim explicitado na análise da OM.

Na sequência, temos o momento da institucionalização (ARTAUD, 2018), que ocorre quando propicia "além do trabalho de síntese e formulação de toda a OM produzida, inclui a amalgamação desta OM e as OM estudadas anteriormente [...] (ARTAUD, 2018, p. 151). Neste momento, institucionalizou-se as fórmulas para as quantidades de segmentos, de triângulos, para as medidas de perímetro e área, do fractal Ilha de Koch com suas respectivas justificativas.

Desse modo, discutimos com os estudantes uma possível técnica, ou seja, realizamos uma formalização das tarefas propostas para que após a exploração matemática realizadas pelos estudantes, pudessem elucidas acerca das noções matemáticas envolvidas naquela determinada tarefa, consequentemente, sua subtarefa. Assim, ao apresentar essa formalização, de maneira que contribuísse para a aprendizagem das tecnologias e teorias envolvidas. Assim, caracterizamos do que se trata essa Organização Matemática elaborada, distinguindo os elementos que os auxiliaram e que fazem parte da Organização Didática, que direcionou o estudo e o ensino do objeto matemático. Portanto, compreendemos que esses momentos apresentados na análise dos tipos de tarefas T_1, T_2, T_3 e T_4 foram possíveis graças aos fenômenos observáveis, imagináveis e condições que incitaram o acontecimento deste estudo (CHEVALLARD, 2018), propiciando a manifestação das funções de estudos na análise desta OD.

Finalmente, chegamos ao momento da avaliação, que consideramos importante, uma vez que o professor realiza um estudo acerca das soluções apresentadas pelos estudantes (ALMOULOUD, 2007). Então, avaliamos a OD que permitiu o desenvolvimento da OM, de maneira a observarmos os acertos e os fracassos que foram apresentados pelos estudantes e pelos pesquisadores.

À medida em que realizamos as observações e anotações durante a implementação, verificamos que a realização das subtarefas não estava ocorrendo conforme o previsto no contrato didático definido, pois constatamos que os alunos apresentavam dificuldades no trato com o *software* e nas resoluções das tarefas, simultaneamente. Desde modo, com o intuito de proporcionar uma aprendizagem sobre o assunto, mudamos a maneira como estávamos adotando na implementação, ou seja, primeiramente, os estudantes seguiram suas atividades de construção junto ao *software* GeoGebra, caracterizando-o como como uma forma de (re)introduzir os fractais na Educação Básica; e depois, eles realizaram a exploração das tarefas sem o auxílio do *software*, ou seja, utilizaram somente os materiais e anotações dispostas pelos estudantes e pesquisadores.

Deste modo, as tarefas referentes à Etapa 0 e as tarefas referentes à Etapa 1 foram realizadas de maneira concomitante com o GeoGebra, e ao final destas etapas, os pesquisadores discutiram com os estudantes as suas técnicas e resoluções. Com a observação de que os estudantes apresentavam dificuldades para a realização em conjunto com o *software*, optamos então pela renegociação da implementação, na qual os estudantes fariam a construção do fractal em um encontro de 2 horas aulas, e a sua exploração matemática (resolução das tarefas) no próximo encontro.

Conforme a análise da OM realizada na seção anterior, observamos que existem casos de estudantes que não realizaram ou que fizeram de modo incorreto as subtarefas. Com isso, temos o mesmo entendimento de Chevallard (2018), que esclarece que alguns fatores podem incitar na impossibilidade de os estudantes desenvolverem uma técnica adequada para a tarefa que está sendo proposta.

Para estes casos, elencamos alguns desses fatores a serem considerados que levaram às impossibilidades da resolução destas subtarefas: consideramos a dificuldade apresentada para se aproximar com o GeoGebra, as noções basilares de geometria e álgebra que não se apresentaram bem estabelecidas pelos estudantes, fatores como a falta de atenção e a própria não compreensão do enunciado proposto. Situações como essas foram o motivo pelo qual foi necessário realizar uma discussão, decidindo por uma nova maneira de abordar a implementação.

Desse modo, identificamos que o momento da formalização foi crucial, visto que os estudantes escreviam em folhas separadas suas resoluções e após isso, os pesquisadores realizaram a formalização das subtarefas. Assim, identificamos que houve estudantes que não apresentaram uma técnica que possibilitasse apresentar uma resposta viável para as tarefas, assim como, estudantes que a realizaram de maneira incorreta. Portanto, consideramos os mesmos fatores mencionados anteriormente para compreender os motivos pelos quais esses estudantes não realizaram ou fizeram de maneira que não respondesse o objetivo proposto pela subtarefa. Esperávamos que os estudantes fizessem uma generalização matemática constituindo as fórmulas de medidas de perímetro e área do fractal a ser explorado, e mesmo que o sucesso não tenha sido obtido com todos os estudantes, compreendemos que as tarefas propostas provocaram conjecturas por parte dos alunos e compreensão do comportamento geométrico e algébrico do fractal Ilha de Koch.

Contudo, entendemos que a OP elaborada e analisada propiciou conhecimentos acerca da Geometria Fractal, assim como um momento de reflexão para os estudantes que precisaram relembrar noções da sua formação escolar. Assim, compreendemos que o desenvolvimento dessa Organização Didática voltada para o ensino e aprendizagem da Organização Matemática se apresentam pertinentes para a utilização e (re)introdução do Fractal Ilha de Koch por meio do habitat GeoGebra na Educação Básica.

3.3 Análise *a posteriori* e validação

As análises realizadas nessa seção são discutidas *a posteriori*, ou seja, após a coleta dos dados que foi propiciada pela implementação em sala de aula. Assim, esse é o momento de olhar para todos os dados obtidos durante a implementação, desde os materiais produzidos pelos alunos às observações dos pesquisadores, constituindo a seleção e realizando o tratamento dos dados de modo a obter uma análise *a posteriori*.

Quando realizamos a organização dos dados, devemos observar que "a análise *a posteriori* deve permitir obter conclusões significativas em torno do processo ensino-aprendizagem do objeto matemático visado na instituição de referência e/ou de aplicação" (HENRIQUES, 2016, p. 12). Para complementar, os critérios de análise utilizados são evocados elementos da própria pesquisa a qual foi elaborada e controlada pelos pesquisadores se baseando na OP e suas particularidades, assim como a análise *a priori* prenunciada.

Partindo do que foi exposto, entendemos a análise *a posteriori* quando identificamos o saber ensinado (CHEVALLARD, 1991), ou seja, por meio da implementação da OP. Dessa forma, será possível identificar quais saberes que os estudantes evocaram, especificando na particularidade da Organização Didática por meio dos momentos didáticos, e da Organização Matemática mediante ao quarteto praxeológico.

Considerando tais aspectos, as subseções a seguir apresentarão a análise dos dados, a qual utilizará, na OM, os materiais produzidos pelos estudantes para identificar e analisar os quartetos praxeológicos mobilizados durante a implementação. No que diz respeito à OD, esta utilizará das observações dos pesquisadores e do diário de campo. Optamos por analisar, primeiramente, a OM, já que para descrever os momentos que compõem a OD se faz necessário a análise da OM com vistas a identificar os quartetos praxeológicos mobilizados pelos estudantes durante a resolução das tarefas. Portanto, na subseção a seguir apresentaremos a análise *a posteriori* da Organização Matemática.

Para compor o escopo da análise, realizaremos, nessa subseção, uma descrição do quarteto praxeológico, visando evidenciar as técnicas mobilizadas pelos estudantes.

Para isso, organizamos as análises em cada tipo de tarefa T, nas técnicas, as quais denominaremos de τi para se referir às mobilizadas na implementação da tarefa t e suas respectivas subtarefas, compondo, assim, o bloco saber-fazer. O uso do índice i se faz necessário para diferenciar as técnicas da análise *a priori* das técnicas da análise *a posteriori*, uma vez que as técnicas mobilizadas durante a implementação nem sempre corresponderam às técnicas descritas na análise *a priori*. Isso vale para os demais casos em que o índice *i* aparece. Em seguida, teremos a tecnologia θi e teoria Θi (seguindo a mesma ideia a qual denominamos a técnica), constituindo o bloco tecnológico-teórico. Neste momento, convém explicarmos que, embora tenhamos encontrado uma mesma técnica, ou tecnologia ou teoria, em subtarefas diferentes, estas serão identificadas de acordo com as subtarefas às quais estarão se referindo, por exemplo, no caso da subtarefa $t_{1.2}$ iremos especificar as suas componentes praxeológicas como $[T_1, \tau i_{1.2.1}, \theta i_{1.2.1}, \Theta i_{1.2.1}]$, em que se apresenta a mobilização de uma primeira técnica, tecnologia e teoria, respectivamente, para o caso da subtarefa $t_{1.2}$, do tipo de tarefa T_1.

Para a identificação dos participantes, utilizaremos a codificação "E" referindo-se a estudante e a um número sequenciado, assim, cada estudante receberá um código específico, que é discorrido da seguinte forma: E1, E2, ..., E9. Com isso, o quarteto praxeológico analisado é correspondente a um T (tipo de tarefa) específico e seus respectivos estudantes.

Por meio de todo o delineamento apresentado, chegamos ao momento da pesquisa em que pretendemos responder à questão norteadora: quais as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch? Assim, fundamentados no aporte teórico, apresentaremos a análise da OM realizada com base nos materiais produzidos pelos estudantes. A organização das análises *a posteriori* seguem o mesmo padrão de organização das análises *a priori.*

O Quadro 8, a seguir, apresenta o tipo de tarefa, a técnica, a tecnologia, teoria e os respectivos estudantes que mobilizaram a praxeologia indicada. Os estudantes que não foram descritos no quadro não nos possibilitaram a identificação da mobilização de alguma praxeologia de forma evidente.

Quadro 8: Análise Praxeológica *a posteriori* do tipo de tarefa $\boldsymbol{T_1}$

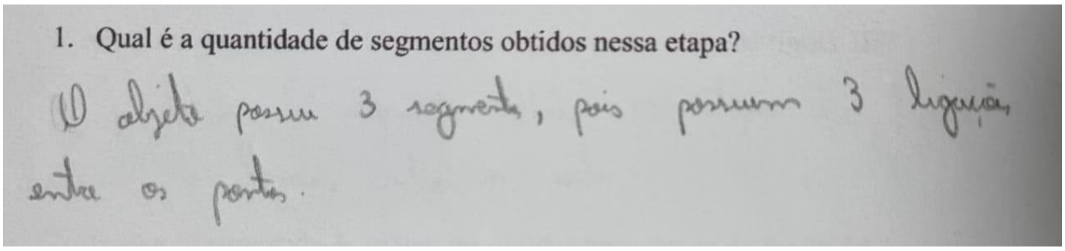
Tipo de Tarefa T_1	Generalizar o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa da construção do Fractal Ilha de Koch.
Tarefa t_1	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de segmentos em cada etapa do Fractal Ilha de Koch.

Subtarefa $t_{i.j}$	Técnica $\tau i_{i.j.k}$	Tecnologia $\theta i_{i.j.k}$	Teoria $\Theta i_{i.j.k}$	Estudantes
$t_{1.1}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 0 do Fractal.	$\tau i_{1.1.1}$: Contar os segmentos um a um	$\theta i_{1.1.1}$: Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "segmento"	$\Theta i_{1.1.1}$: Aritmética e Geometria	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9
$t_{1.2}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 1 desse Fractal.	$\tau i_{1.2.1}$: Contar os segmentos um a um	$\theta i_{1.2.1}$: Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "segmento"	$\Theta i_{1.2.1}$: Aritmética e Geometria	E4, E5, E6, E8
$t_{1.3}$: Encontrar a quantidade de segmentos obtidos na Etapa 2 do Fractal.	$\tau i_{1.3.1}$: Contar os segmentos um a um	$\theta i_{1.3.1}$: Noção de contagem e conhecimento do elemento figural "segmento"	$\Theta i_{1.3.1}$: Aritmética e Geometria	E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8
	$\tau i_{1.3.2}$: Multiplicar a quantidade de segmentos obtidos na etapa anterior por 4 (12x4)	$\theta i_{1.3.2}$: Noção de proporção	$\Theta i_{1.3.1}$: Aritmética e Geometria	E8, E9
	$\tau i_{1.3.3}$: Contar a quantidade de segmentos da etapa em um dos lados do triângulo inicial e multiplicar por 3 (16x3)	$\theta i_{1.3.3}$: Noção de proporção	$\Theta i_{1.3.1}$: Aritmética e Geometria	E2
$t_{1.4}$: Construir uma fórmula para a quantidade de segmentos obtidos na Etapa n desse Fractal.	$\tau i_{1.4.3}$: Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de segmentos em uma Etapa n.	$\theta i_{1.4.1}$: Noção de potenciação e padrão recorrente.	$\Theta i_{1.3.1}$: Álgebra e Geometria	E3

Fonte: Os Autores, 2022.

Após a leitura do Quadro 8 é possível observar que, no que diz respeito à subtarefa $t_{1.1}$, os 9 estudantes descreveram suas respostas e mobilizaram a técnica prevista na análise *a priori*. Os estudantes E1 e E8 escreveram respostas semelhantes:

Figura 12: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{1.1.1}}$ do E8

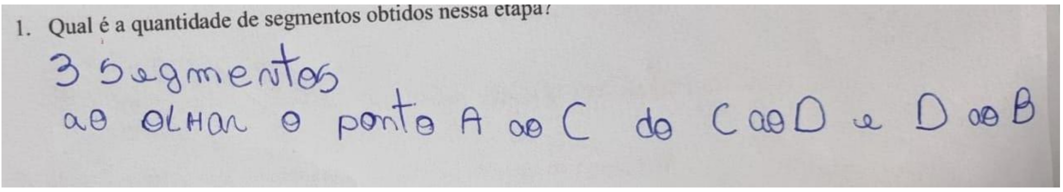

1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa?

O objeto possui 3 segmentos, pois possuem 3 ligações entre os pontos.

Fonte: Autores, 2021.

Ou seja, eles olharam para as “ligações” existentes entre os pontos que formavam os triângulos para responder à subtarefa, considerando-as como os segmentos designados no enunciado da tarefa. Os estudantes E3 e E4 também concluíram a respeito da quantidade de segmentos, quando os denominaram da seguinte forma:

Figura 13: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{1.1.1}}$ do E4


1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa?

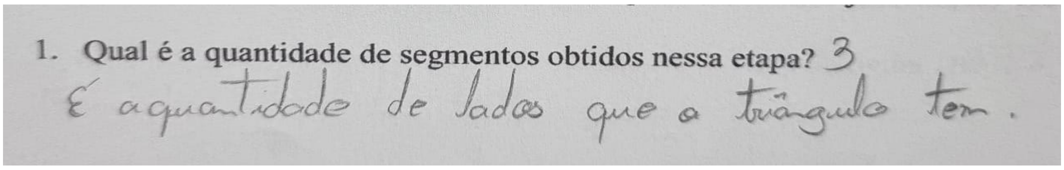
3 segmentos
ao olhar o ponto A ao C do C ao D e D ao B

Fonte: Autores, 2021.

As respostas de E3 e E4 foram semelhantes, porém, ambas não descrevem segmentos de um triângulo, e evidenciam que a técnica utilizada para responder à subtarefa proposta foi a de contagem dos segmentos do triângulo. No entanto, o E6 utilizou-se da mesma ideia de discriminação dos vértices do triângulo como forma de compor os seus segmentos, porém, o fez de maneira adequada, descrevendo-os como “AB, BF e FA”.

O estudante E5 respondeu à tarefa proposta da seguinte forma:

Figura 14: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{1.1.1}}$ do E5


1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa? 3

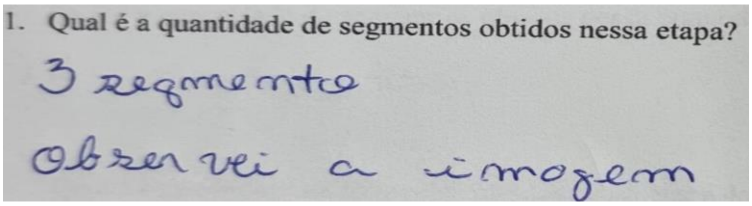
É a quantidade de lados que o triângulo tem.

Fonte: Autores, 2021.

Podemos observar que E5 apresentou noções básicas de geometria, identificando que os segmentos dos triângulos podem ser considerados como lados, com isso, ele utilizou-se de seus conhecimentos prévios para desenvolver uma técnica de contagem que pudesse resolver essa subtarefa.

Com relação às respostas dos estudantes E2, E7 e E9, estas se apresentaram da seguinte forma:

Figura 15: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{1.1.1}}$ do E7



Fonte: Autores, 2021

Como a resposta dada por estes três estudantes foi a reposta correta, intuímos que possivelmente estes também realizaram uma contagem dos segmentos do triângulo construído, podendo se enquadrar na técnica $\tau i_{1.1.1}$ identificada para os demais estudantes, uma vez que para esta subtarefa não há outra possibilidade.

Portanto, todos os estudantes mobilizaram a técnica $\tau i_{1.1.1}$ que pode ser justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{1.1.1}, \Theta i_{1.1.1}]$, em que a tecnologia $\theta i_{1.1.1}$ pautou-se na noção de contagem e conhecimento do elemento figural "segmento" nessa etapa do Fractal, que compreende à Etapa 0. Com relação à teoria $\Theta i_{1.1.1}$ que rege todas as componentes praxeológicas, identificamos a aritmética e a geometria, pois os estudantes utilizaram do objeto geométrico e do método de contar para determinar a quantidade de segmentos. Desse modo, para os estudantes participantes foi possível identificar a mobilização das componentes praxeológicas $[T_1, \tau i_{1.1.1}, \theta i_{1.1.1}, \Theta i_{1.1.1}]$.

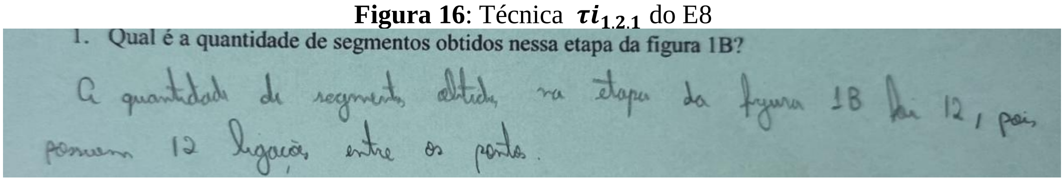
Com relação à subtarefa $t_{1.2}$, classificamos que 4 estudantes, E1, E2, E7 e E9, apresentaram somente o resultado, ou seja, não apresentaram cálculos, justificativas ou explicações para mostrar o modo como foi realizado para alcançar aquele valor numérico, mesmo que isso tenha sido previamente solicitado. Portanto, nestes casos, não foi possível identificarmos explicitamente a técnica utilizada por eles, que por sua vez é a "maneira de executar as tarefas" (CHEVALLARD, 2018, p. 34), pois não foi descrito ou desenvolvido um modo de execução para esta subtarefa.

Entretanto, os 4 estudantes concluíram esta atividade apresentando a resposta correta (12 segmentos), conforme o esperado. Possivelmente, estes estudantes realizaram a contagem dos segmentos um a um da figura, porém, não podemos afirmar a utilização de tal técnica, uma vez que esta não está escrita explicitamente nas suas respostas.

No âmbito da TAD, um aspecto importante a ser considerado é que “[...] não há *práxis* que não seja acompanhada de um *logos* [...]” (CHEVALLARD, 2018, p. 34). Desta forma, compreendemos que por esses estudantes não terem apresentado em suas respostas as técnicas mobilizadas por eles, não conseguimos identificar a tecnologia e a teoria utilizadas por estes respectivos estudantes.

No que diz respeito aos estudantes E4, E5, E6 e E8, eles utilizaram a técnica de contagem dos segmentos um a um do Fractal Ilha de Koch, identificados na sua Etapa 1, sendo a técnica $\tau i_{1.2.1}$, conforme Quadro 8. A Figura 21 representa a forma que esses estudantes adotaram para contar os segmentos.

Figura 16: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{1.2.1}}$ do E8



Fonte: Autores, 2021.

Observamos que ao utilizar a técnica $\tau i_{1.2.1}$, o estudante E8 compreende que um segmento pode ser entendido como a ligação entre dois pontos. Desse modo, podemos notar como se dá a compreensão da unidade figural segmento de reta nesse estudante em específico. Ainda, observamos que o estudante E4 apresentou um entendimento semelhante quando respondeu que o fractal na Etapa 1 apresenta “12 segmentos. Ao pegar a reta de um ponto ao outro”, ou seja, E4 compreendeu a noção de segmento de reta como uma relação entre dois pontos, da mesma forma que E8.

Mobilizando essa mesma técnica de contagem, o estudante E5 respondeu que pôde concluir a existência de 12 segmentos da figura, pelo fato de ser “a quantidade de lados do triângulo”. Inferimos que E5 se referiu a um “triângulo”, quando, no entanto, intencionava se referir à figura construída na Etapa 1. No que diz respeito à resposta do E6, refere-se a “12, pois contei na imagem”, ou seja, sua justificativa deixou evidente a técnica utilizada ($\tau i_{1.2.1}$) por ele para chegar até a resposta da subtarefa. Para tanto, o que faz a justificativa dessa técnica é a tecnologia $\theta i_{1.3.1}$ que consiste em noção de contagem e conhecimento do elemento figural “segmento” nessa etapa do Fractal. Assim, como a teoria $\Theta i_{1.2.1}$, que permeia a aritmética e geometria.

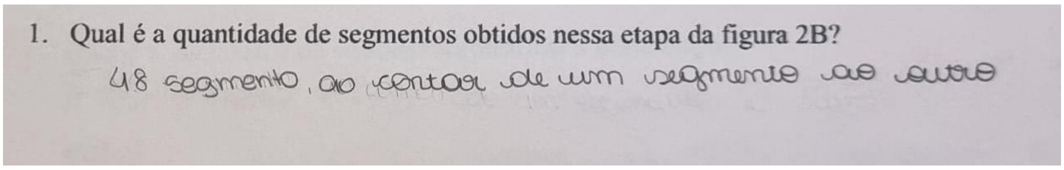
No que diz respeito à resposta dada por E3, “12 segmentos, cada ‘ponta’ do triângulo é um triângulo”, supomos que ao se referir à “ponta”[19] do triângulo da figura em questão, este indica a identificação de 6 pontas com 2 segmentos em cada uma delas, totalizando 12 segmentos. Portanto, tal afirmação permanece no campo da suposição, uma vez que não foi descrita pelo estudante. A técnica deve ser minimamente compreensível e justificada para identificar a validade da subtarefa (ALMOULOUD, 2007). Por esse motivo, não foi possível identificarmos tal resposta como uma outra técnica para a resolução desta subtarefa.

No caso da subtarefa $t_{1.2}$ identificamos a possibilidade de um único quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes E4, E5, E6 e E8, composto pelas seguintes componentes praxeológicas $[T_1, \tau i_{1.2.1}, \theta i_{1.2.1}, \Theta i_{1.2.1}]$.

Na subtarefa $t_{1.3}$, foi possível encontrarmos 3 técnicas distintas as quais nos permitiram compreender o modo com que os estudantes estavam desenvolvendo suas noções acerca da temática.

A primeira técnica identificada foi $\tau i_{1.3.1}$, que consiste em contar a quantidade de segmentos um a um nessa etapa do Fractal. Tal técnica foi identificada nos estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E7 e E8. Como exemplo desta técnica, temos a resposta do E3:

Figura 17: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{1.3.1}}$ do E3



Fonte: Autores, 2021.

A técnica da contagem dos segmentos também foi mobilizada por alguns estudantes nas tarefas anteriores a esta, sendo que E4, E5, E6 e E8 mobilizaram a técnica da contagem em todas as etapas, até o momento. Esta técnica da contagem, assim como nos casos anteriores, foi identificada em situações em que os estudantes se referiram à contagem das “ligações” entre os pontos (E1 e E8), a contagem dos segmentos (E3, E4, E6, E7) e a contagem de lados da figura (E5).

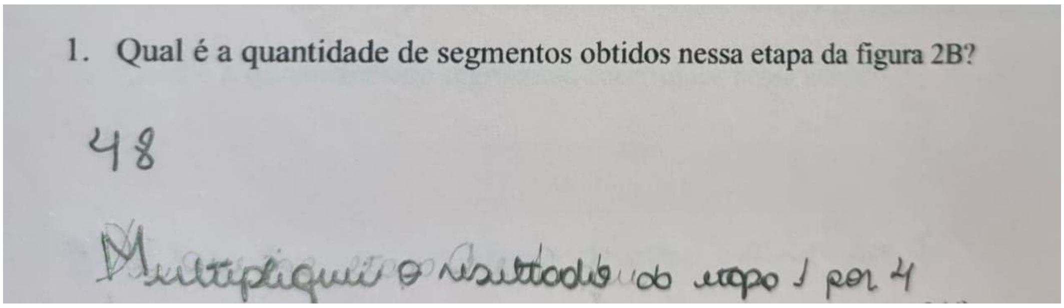
A técnica $\tau i_{1.3.1}$ é justificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{1.3.1}, \Theta i_{1.3.1}]$, em que a tecnologia $\theta i_{1.3.1}$ estabeleceu-se na noção de contagem e conhecimento do elemento figural “segmento” nessa etapa do Fractal, que compreende a Etapa 2. E a $\Theta i_{1.3.1}$ que rege todas as

[19] O uso das aspas é um grifo do estudante E3.

componentes é identificada como aritmética e geometria, pois os estudantes utilizaram o objeto geométrico e do método de contar para determinar a quantidade de segmentos. Portanto, para os estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E7 e E8, o quarteto praxeológico mobilizado foi $[T_1, \tau i_{1.3.1}, \theta i_{1.3.1}, \Theta i_{1.3.1}]$. Podemos observar que, nesse caso, foi previsto na análise *a priori* realizada.

A segunda técnica mobilizada foi $\tau i_{1.3.2}$, em que consiste em multiplicar o resultado da etapa anterior por quatro (12x4), uma vez que em cada iteração do fractal, a cada dois pontos, são gerados quatro novos segmentos, ou seja, a cada dois pontos se constitui a curva de Koch. Os estudantes E8[20] e E9 mobilizaram a técnica $\tau i_{1.3.2}$, em que a Figura 23 apresenta essa compreensão de E9.

Figura 18: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{1.4.2}}$ do E9



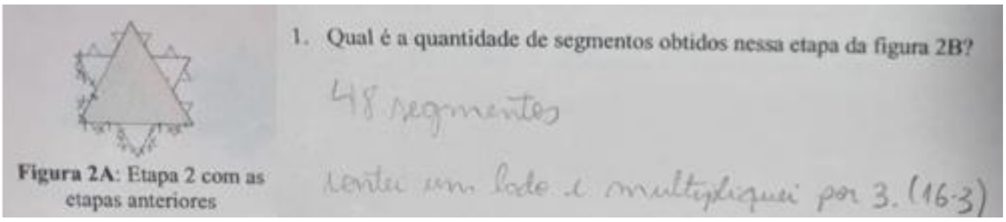
Fonte: Autores, 2021.

Deste modo, compreendemos que a tecnologia $\theta i_{1.3.2}$ na Etapa 2 caracterizou-se na noção de proporção. Com relação à teoria $\Theta i_{1.3.2}$, identificamos a aritmética e geometria, pois entendemos que os estudantes utilizaram a multiplicação, aplicando a construção do Fractal. Em especial, temos que para esse quarteto praxeológico, foi possível de prever durante a análise *a priori*.

A terceira e última técnica identificada foi a $\tau i_{1.3.3}$, que consistiu em contar a quantidade de segmentos da figura da Etapa 2 em um dos lados do triângulo inicial, e multiplicar por 3 (16x3), de modo a totalizar a quantidade de segmentos da figura, conforme a imagem a seguir:

[20] Observamos que o E8 mobilizou duas técnicas diferentes, pois descreveu tais técnicas em sua justificativa para esta tarefa: “A quantidade de segmentos obtida foi 48, pois há 48 ligações entre os pontos. E eu fiz 12x4”.

Figura 19: Técnica $\tau i_{1.4.3}$ do E2



Fonte: Autores, 2021.

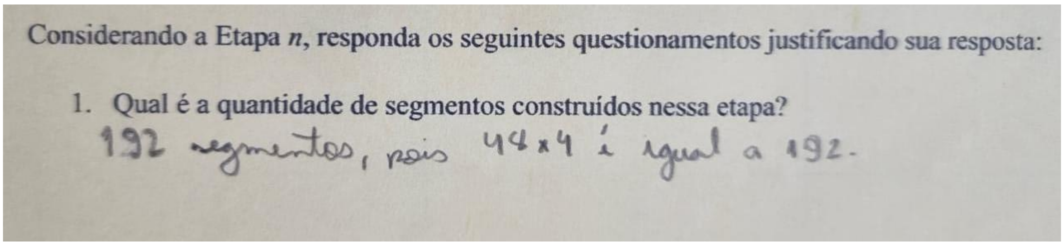
Observamos que o E2 iniciou a contagem dos segmentos em um dos lados e, provavelmente, observou que essa contagem se repetia de modo a elaborar a técnica que consistiu em realizar a operação 3 x 16 = 48.

Assim, compreendemos que a tecnologia $\theta i_{1.3.3}$ que possui como finalidade justificar a técnica na Etapa 2, caracterizou-se na noção de proporcionalidade. Com relação à teoria $\Theta i_{1.3.3}$, identificamos a aritmética e geometria, pois entendemos que os estudantes utilizaram a multiplicação e utilizando a construção do Fractal.

Por consequência, na subtarefa $t_{1.3}$ identificamos a mobilização de três quartetos praxeológico distintos, mesmo sendo provenientes do mesmo tipo de tarefa, são eles $[T_1, \tau i_{1.3.1}, \theta i_{1.3.1}, \Theta i_{1.3.1}]$, $[T_1, \tau i_{1.3.2}, \theta i_{1.3.2}, \Theta i_{1.3.2}]$ e $[T_1, \tau i_{1.3.3}, \theta i_{1.3.3}, \Theta i_{1.3.3}]$, sendo os dois primeiros quartetos praxeológicos foram previstos em nossa análise *a priori*, de maneira que a terceira não foi antecipada em nossas análises. Assim, cada quarteto praxeológico contém suas peculiaridades que foi possível identificar em cada técnica mobilizada.

Com relação à subtarefa $t_{1.4}$, somente o estudante E2 não apresentou uma maneira de se resolver essa subtarefa, pois deixou o espaço para a resolução em branco. No que se refere aos estudantes E1, E4, E5, E6, E7, E8 e E9, estes apresentaram uma técnica que consistiu em realizar o cálculo da quantidade de segmentos para uma próxima etapa (Etapa 3) e não para a Etapa *n*, conforme proposto na subtarefa. Como podemos identificar na Figura 25.

Figura 20: Resultado do E1

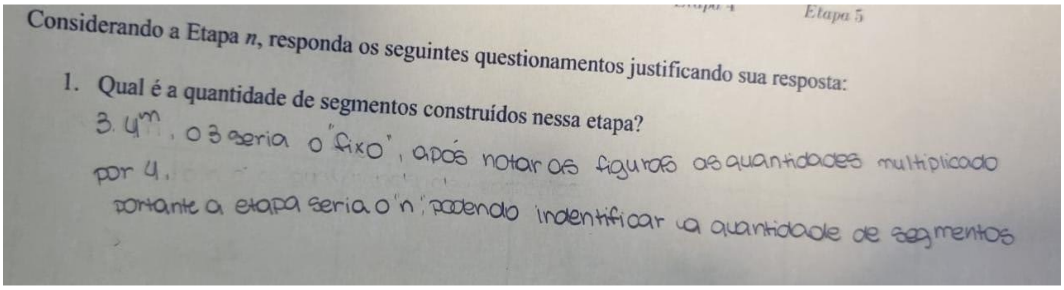


Fonte: Autores, 2021.

Observamos que o estudante E1 mobilizou a técnica que consiste em multiplicar o resultado da etapa anterior por quatro, no entanto, notamos que não é uma técnica viável para poder responder à subtarefa $t_{1.4}$, pois o estudante considerou que o enunciado solicitava para uma etapa específica, o que não procede. Entendemos que o motivo da ocorrência de tal fato pode ser proveniente da incompreensão do enunciado da tarefa.

No caso do estudante E3, obtemos que este mobilizou uma técnica que desenvolveu uma fórmula para o cálculo da quantidade de segmentos na Etapa *n*. Tal técnica, a $\tau i_{1.4.1}$, consistiu em encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores, de modo a descrever a fórmula para a quantidade de segmentos em uma Etapa n na generalização das etapas de construção do Fractal, conforme descrito na Figura 27.

Figura 21: Técnica do $\boldsymbol{\tau i_{1.4.1}}$ do E3



Fonte: Autores, 2021.

Desse modo, o E3 compreendeu que como a figura inicial (Etapa 0) continha 3 lados e a cada etapa os segmentos de cada lado passavam de um para quatro, foi possível concluir a generalização da forma 3.4^n.

Nesse sentido, constatou-se que a justificativa para a técnica $\tau i_{1.4.1}$ é identificada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{1.4.1}, \Theta i_{1.4.1}]$, em que a tecnologia $\theta i_{1.4.1}$ se pauta nas relações de potenciação e padrão recorrente nas etapas do Fractal. E, por fim, a teoria $\Theta i_{1.4.1}$ é identificada como álgebra e geometria. Para tanto, para E3 o quarteto praxeológico mobilizado foi $[T_1, \tau i_{1.4.1}, \theta i_{1.4.1}, \Theta i_{1.4.1}]$, sendo o mesmo previsto na análise *a priori*.

Com isso, realizamos a análise praxeológica *a posteriori* da T_1, em que identificamos as praxeologias mobilizadas por alguns estudantes. Desse modo, realizaremos aproximações com a análise *a priori*, discriminando as praxeologias possíveis de serem identificadas. Também, ficaram expostas, no Quadro 9, somente as subtarefas que possibilitavam a execução da referida técnica, conforme podemos ver a seguir:

Quadro 9: Aproximações das análises *a priori* e *a posteriori* das técnicas do tipo de tarefa T_1[21]

Técnica	**Subtarefas**	**Análise *a priori***	**Análise *a posteriori***
Contar os segmentos um a um	$\boldsymbol{t_{1.1}}$	X	X
	$\boldsymbol{t_{1.2}}$	X	X
	$\boldsymbol{t_{1.3}}$	X	X
Multiplicar a quantidade de segmentos obtidos na etapa anterior por 4, ou seja, 12x4	$\boldsymbol{t_{1.3}}$	X	X
Contar a quantidade de segmentos da figura da etapa em um dos lados do triângulo inicial, e multiplicar por 3, ou seja, 16x3	$\boldsymbol{t_{1.3}}$		X
Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de segmentos em uma Etapa n	$\boldsymbol{t_{1.4}}$	X	X

Fonte: Autores, 2021.

Com o Quadro 9, observamos quais técnicas previstas foram efetivamente mobilizadas pelos estudantes, também evidenciamos que houve técnicas que foram mobilizadas *a posteriori* e não foram previstas *a priori*. Nesse sentido, com as aproximações das análises, podemos constatar que a OM empregada para o tipo de tarefa T_1 foi validada devido à mobilização das técnicas previamente discutidas e o surgimento de novas técnicas que não haviam sido pensadas previamente. Diante disso, seguiremos com os próximos tipos de tarefas a serem analisados.

O Quadro 10, a seguir, apresenta as praxeologias mobilizadas no Tipo de Tarefa T_2:

Quadro 10: Análise Praxeológica *a posteriori* do tipo de tarefa $\boldsymbol{T_2}$

Tipo de Tarefa T_2	Generalizar o cálculo da quantidade de triângulos equiláteros que são construídos em cada etapa da construção do Fractal Ilha de Koch			
Tarefa t_2	Construir uma fórmula para o cálculo da quantidade de triângulos equiláteros em cada etapa			
Subtarefa $t_{i.j}$	Técnica $\tau i_{i.j.k}$	Tecnologia $\theta i_{i.j.k}$	Teoria $\Theta i_{i.j.k}$	Estudantes
$t_{2.1}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 0 desse Fractal.	$\tau i_{2.1.1}$: Contar os triângulos um a um	$\theta i_{2.1.1}$: Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “triângulo”	$\Theta i_{2.1.1}$: Aritmética e Geometria	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9

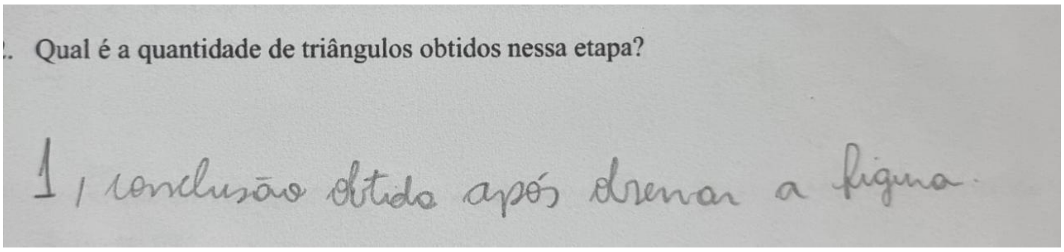
[21] As partes em que não forem marcados os “X” significa que a técnica mencionada não foi mobiliza *a priori*, *a posteriori* ou em ambas as situações.

$t_{2.2}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 1 desse Fractal.	$\tau i_{2.2.1}$: Repartir a figura construída em triângulos e contá-los uma a um	$\theta i_{2.2.1}$: Conhecimento do elemento figural “triângulo” e visualização das subfiguras (triângulos)	$\Theta i_{2.2.1}$: Aritmética e Geometria	E4
$t_{2.3}$: Encontrar a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa 2 desse Fractal.	$\tau i_{2.3.1}$: Contar os triângulos um a um	$\theta i_{2.3.1}$: Noção de contagem e conhecimento do elemento figural “segmento”	$\Theta i_{2.3.1}$: Aritmética e Geometria	E2, E5, E6, E7, E9
	$\tau i_{2.3.2}$: Multiplicar a quantidade de triângulos obtidos na etapa anterior por 4 (4x4)	$\theta i_{2.3.2}$: Noção de proporção	$\Theta i_{2.3.1}$: Aritmética e Geometria	E8, E9
$t_{2.4}$: Construir uma fórmula para a quantidade total de triângulos equiláteros obtidos na Etapa n desse Fractal.	X	X	X	X

Fonte: Autores, 2021.

Com a leitura do Quadro 10, podemos observar que a subtarefa $t_{2.1}$, em que os 9 estudantes apresentaram uma resposta, possibilitou a mobilização de uma única técnica, e esta coincidiu com a descrita na análise *a priori*. A técnica mobilizada, designada por $\tau i_{2.1.1}$, consiste em contar os triângulos um a um conforme construção na Etapa 0. Mesmo descritas de forma diferente, os estudantes E2, E6 e E9 justificaram suas respostas da mesma forma.

Figura 22: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{2.1.1}}$ do E2



Fonte: Autores, 2021.

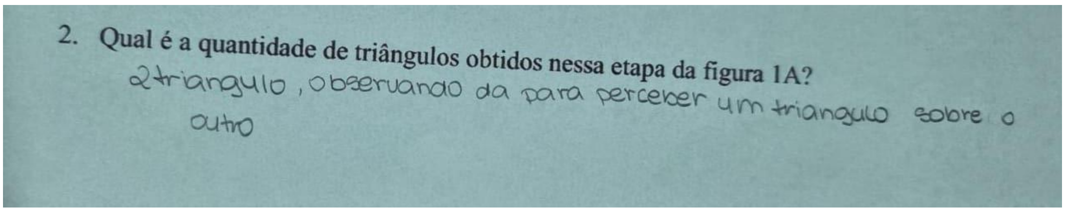
Os demais estudantes (E1, E3, E4, E5, E7 e E8) responderam somente “1”, ou “1 triângulo”, ou “Foi obtido 1 triângulo”. Tal fato nos possibilitou concluir que a técnica utilizada foi a de contagem, uma vez que se trata de uma única figura (o triângulo). Sendo assim, consideramos que estes estudantes também mobilizaram a técnica $\tau i_{2.1.1}$ identificada para os demais estudantes.

No que diz respeito à tecnologia $\theta i_{2.1.1}$ entendemos que a técnica $\tau i_{2.1.1}$ se fundamenta na noção de contagem e conhecimento do elemento figural “triângulo”. Desse modo, a noção de teoria $\Theta i_{2.1.1}$, como sendo a componente que finaliza a praxeologia mobilizada é compreendida como aritmética e geometria, pois os estudantes utilizam somente da construção na figura para determinar sua técnica. Portanto, o quarteto praxeológico $[T_2, \tau i_{2.1.1}, \theta i_{2.1.1}, \Theta i_{2.1.1}]$, que coincidiu com o previso na análise *a priori*, foi mobilizado por todos os estudantes participantes da pesquisa.

No que diz respeito à subtarefa $t_{2.2}$, consideramos somente os estudantes que apresentaram justificativas e explicações em suas respostas, assim, embora os estudantes E1, E2, E5, E7, E8 e E9 apresentassem a resposta correta (4), estes não descreveram a maneira de resolver a subtarefa $t_{2.3}$, conforme propõe Chevallard (2018) no que diz respeito a desenvolver uma técnica. Por este motivo, não podemos concluir, de modo preciso, a técnica utilizada por estes estudantes para responder à pergunta proposta na subtarefa.

No que diz respeito aos estudantes E3 e E6, estes trouxeram uma resposta equivocada, conforme a Figura 28.

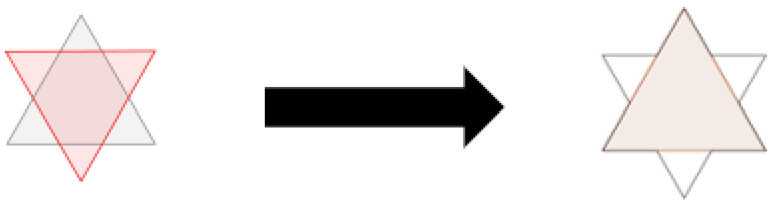
Figura 23: Resultado do E3


2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa da figura 1A?
2triangulo, observando da para perceber um triangulo sobre o outro

Fonte: Autores, 2021.

Ambos os estudantes pensaram na sobreposição de dois triângulos, conforme a figura a seguir:

Figura 24: Sobreposição do triângulo e Etapa 2 do fractal

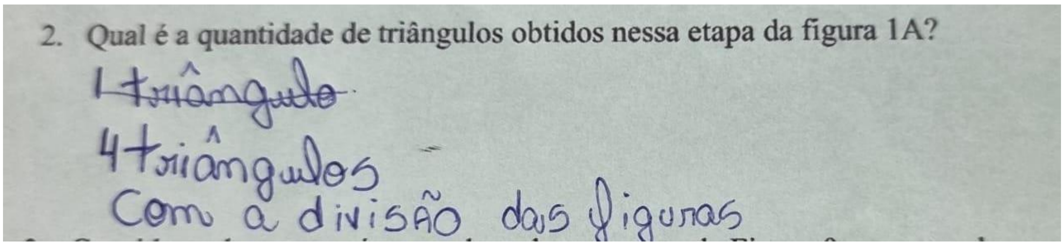


Fonte: Autores, 2021.

Embora esta construção resulte na mesma figura da construção que realizamos na Etapa 1 no GeoGebra, observamos que estes estudantes desconsideraram a construção realizada gerada a partir da curva de Koch em cada lado do triângulo. Portanto, estes estudantes não identificaram os triângulos “pequenos” resultando em uma resposta errada para a tarefa.

O estudante E4 mobilizou uma técnica $\tau i_{2.2.1}$. que consistiu em repartir a figura construída em triângulos, ou seja, ele dividiu a figura conforme encontrava os triângulos na construção, e depois fez a contagem dessas subfiguras. A Figura 30 explicita a técnica mobilizada pelo E4.

Figura 25: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{2.2.1}}$ do E4



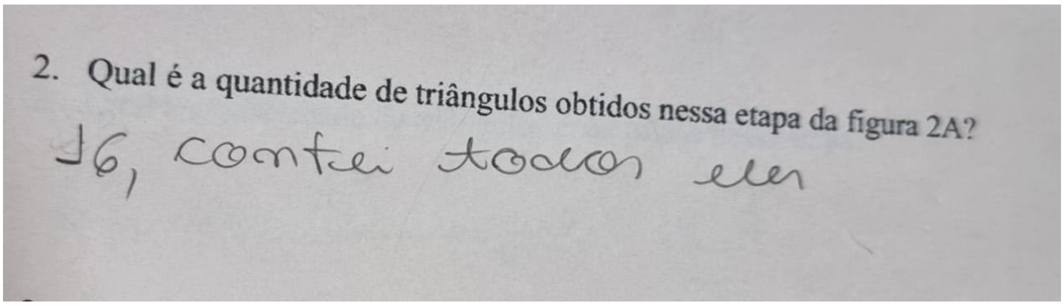
Fonte: Autores, 2021.

A justificativa para a técnica $\tau i_{2.2.1}$ é apresentada pelo bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{2.2.1}, \Theta i_{2.2.1}]$ de modo que $\theta i_{2.2.1}$ é determinada pelo conhecimento do elemento figural “triângulo” e a visualização das subfiguras (triângulos) construídas na Etapa 1 do Fractal. Com isso, a $\Theta i_{2.2.1}$ foi evidenciada pela aritmética e geometria, pois o estudante apresentou conhecimentos geométricos para desenvolver sua técnica. Portanto, entendemos que somente o estudante E4 mobilizou o quarteto praxeológico $[T_2, \tau i_{2.3.1}, \theta i_{2.3.1}, \Theta i_{2.3.1}]$, e que essa praxeologia desenvolvida pelo estudante (E4) não foi prevista em nossa análise *a priori*, emergindo a partir de nossa implementação.

Para a subtarefa $t_{2.3}$, os estudantes E1, E3 e E4 não apresentaram um modo de se resolver, então consideramos não ser possível apresentar o quarteto praxeológico mobilizado por estes estudantes.

No que se refere aos estudantes E2, E5, E6, E7 e E9, estes desenvolveram uma técnica $\tau i_{2.3.1}$ de contar os triângulos um a um, ou seja, eles observaram o Fractal construído na Etapa 2 e contaram cada triangulo construído somado com o da etapa anterior. Para melhor compreensão, temos a técnica $\tau i_{2.3.1}$ mobilizada pelo estudante E7, na Figura 30.

Figura 26: Técnica $\tau i_{2.3.1}$ do E7


2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa da figura 2A?

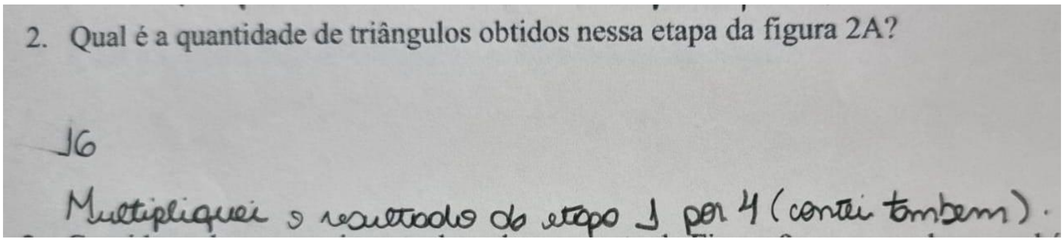
16, contei todos eles

Fonte: Autores, 2021.

Partindo da técnica $\tau i_{2.3.1}$, consideramos que a tecnologia $\theta i_{2.3.1}$ que fundamenta a técnica mobilizada é a noção de contagem e conhecimento do elemento figural "triângulo", considerando o que foi construído na etapa anterior, de modo que a teoria $\Theta i_{2.3.1}$ é determinada pela aritmética e geometria, visto que eles realizam a contagem por meio da figura construída. Assim, as componentes praxeológicas $[T_2, \tau i_{2.3.1}, \theta i_{2.3.1}, \Theta i_{2.3.1}]$ são mobilizadas pelos estudantes E2, E5, E6, E7 e E9 que desenvolveram a técnica mencionada. Dessa maneira, podemos associar essa praxeologia desenvolvida por estes estudantes com a prevista na nossa análise *a priori* uma vez que o que foi previsto se confirmou durante a implementação.

Embora o estudante E9 tenha mobilizado a técnica de contagem dos triângulos, este também mobilizou uma outra técnica $\tau i_{2.3.2}$, juntamente com o E8, que consistiu em multiplicar a quantidade de triângulos obtidos na etapa anterior por 4 (4x4 = 16), conforme a Figura 32:

Figura 27: Técnica $\tau i_{2.3.2}$ do E9


2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa da figura 2A?

16

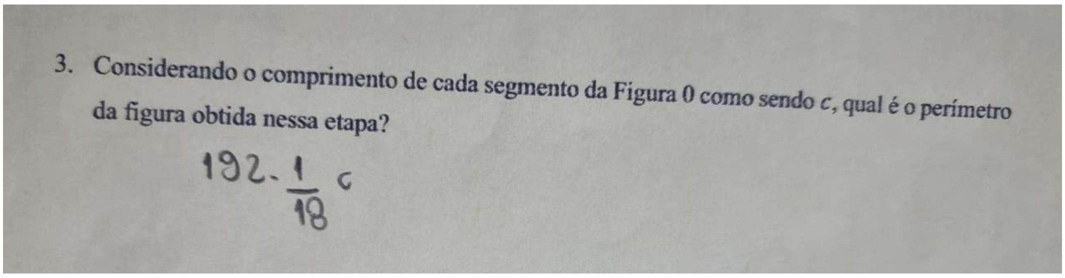
Multipliquei o resultado da etapa 1 por 4 (contei também).

Fonte: Autores, 2021.

Desse modo, compreendemos que a tecnologia $\theta i_{2.3.2}$ na Etapa 2 caracterizou-se na noção de proporção, pois o estudante considerou a razão de crescimento dos triângulos da etapa anterior para a etapa atual. Com relação à teoria $\Theta i_{2.3.2}$, identificamos a aritmética e geometria, pois entendemos que os estudantes utilizaram a multiplicação sem fazer uso direto da construção do Fractal. Portanto, as componentes praxeológicas $[T_2, \tau i_{2.3.2}, \theta i_{2.3.2}, \Theta i_{2.3.2}]$, que foram antecipadas em nossa análise *a priori*, foram mobilizadas pelos estudantes E8 e E9, que desenvolveram a praxeologia mencionada.

Quanto à subtarefa $t_{2.4}$, os estudantes E2 e E3 não apresentaram uma maneira de resolvê-la, uma vez que o espaço para a resolução permaneceu em branco. Quanto aos estudantes E1, E4, E5, E6, E7, E8 e E9, estes apresentaram uma técnica que consistiu em realizar o cálculo da quantidade de segmentos para uma próxima etapa (Etapa 3) e não para a Etapa *n*, conforme proposto na subtarefa. Conforme podemos identificar na Figura 33.

Figura 28: Resultado do E1


3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?

$192 \cdot \frac{1}{18} c$

Fonte: Autores, 2021.

Observamos que tal compreensão apresentada por estes 7 estudantes também ocorreu na subtarefa $t_{1.4}$, ou seja, os estudantes participantes não compreenderam o objetivo da subtarefa proposta. Isto significa que a ideia de generalização para um termo *n* qualquer ainda é abstrata e incompreensível para estes estudantes, e neste caso algumas condições impossibilitaram o desenvolvimento de uma técnica adequada ou pertinente, conforme explica Chevallard (2018), como é o caso da não compreensão do objetivo da tarefa e a não leitura do enunciado.

Dados os argumentos até o momento, foi realizada a análise praxeológica *a posteriori* do tipo de tarefa T_2, em que identificamos as praxeologias mobilizadas por alguns estudantes. Assim, realizaremos aproximações com a análise *a priori*, identificando quais foram as aproximações possíveis de serem identificadas, como o exposto no Quadro 11:

Quadro 11: Aproximações das análises *a priori* e *a posteriori* das técnicas do tipo de tarefa T_2[22]

[22] As partes em que não forem marcados os "X" significa que a técnica mencionada não foi mobiliza *a priori*, *a posteriori* ou em ambas as situações.

Técnica	**Subtarefas**	**Análise *a priori***	**Análise *a posteriori***
Contar os triângulos um a um	$\boldsymbol{t_{1.1}}$	X	X
	$\boldsymbol{t_{1.2}}$	X	
	$\boldsymbol{t_{1.3}}$	X	X
Repartir a figura construída em triângulos	$\boldsymbol{t_{1.2}}$		X
Multiplicar a quantidade de triângulos obtidos na etapa anterior por 4 (4.4)	$\boldsymbol{t_{1.3}}$	X	X
Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de triângulos em uma Etapa n	$\boldsymbol{t_{1.4}}$	X	

Fonte: Autores (2021)

Com o Quadro 11, observamos quais técnicas previstas foram efetivamente mobilizadas pelos estudantes. Também, evidenciamos que houve técnicas que foram mobilizadas *a posteriori* e não foram previstas *a priori*. Nesse sentido, com as aproximações das análises, podemos constatar a OM empregada para o tipo de tarefa T_2 foi validada devido à mobilização das técnicas previamente discutidas e o surgimento de novas técnicas que não haviam sido pensadas previamente. Contudo, observamos que nessa subtarefa, a construção da fórmula, não foi alcançada por nenhum estudante.

Diante disso, seguiremos para o Quadro 12, que trata da análise *a posteriori* do tipo de tarefa T_3.,

Quadro 12: Análise Praxeológica *a posteriori* do tipo de tarefa $\boldsymbol{T_3}$

Tipo de Tarefa T_3	Generalizar o cálculo da medida do perímetro do Fractal em cada etapa de sua construção			
Tarefa t_3	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada etapa do Fractal Ilha de Koch considerando o comprimento de cada segmento do triângulo inicial como sendo *c*			
Subtarefa $t_{i.j}$	Técnica $\tau i_{i.j.k}$	Tecnologia $\theta i_{i.j.k}$	Teoria $\Theta i_{i.j.k}$	Estudantes
$t_{3.1}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 0	$\tau i_{3.1.1}$: Somar a medida de cada segmento que compõe a figura da Etapa 0	$\theta i_{3.1.1}$: Conhecimento do elemento figural “segmento”; e noção de soma algébrica	$\Theta i_{3.1.1}$: Geometria e Álgebra	E1
	$\tau i_{3.1.2}$: Atribuir valores aos lados do triângulo a partir da construção no *software*	$\theta i_{3.1.2}$: noção de soma de números decimais e conhecimento do elemento figural “segmento”	$\Theta i_{3.1.2}$: Aritmética, álgebra e geometria	E2, E9

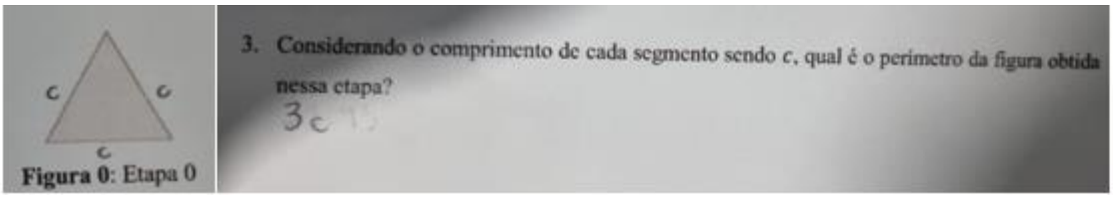
$t_{3.2}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 1	$\tau i_{3.2.1}$: Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.2}$	$\theta i_{3.2.1}$: Conhecimento do elemento figural "segmento"; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura	$\Theta i_{3.2.1}$: Aritmética, Álgebra e Geometria	E4
$t_{3.3}$: Encontrar a medida do perímetro da figura obtida na Etapa 2	$\tau i_{3.3.1}$: Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.3}$	$\theta i_{2.3.1}$: Conhecimento do elemento figural "segmento"; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura	$\Theta i_{3.3.1}$: Aritmética, Álgebra e Geometria	E2, E6, E7
$t_{3.4}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro na Etapa n	X	X	X	X

Fonte: Autores, 2021.

Com a leitura do Quadro 12, podemos observar que na subtarefa $t_{3.1}$ foi identificada a mobilização de duas técnicas. A técnica $\tau i_{3.1.1}$, apresentada por E1, consistiu em somar a medida de cada segmento que compõe a figura da Etapa 0, e desse modo, como o perímetro é a soma do contorno, então foi possível concluir qual o perímetro da Etapa 0.

Apesar de E1 não apresentar uma justificativa junto com sua resposta final, foi possível identificar, no decorrer do material entregue pelo estudante, a mobilização da técnica $\tau i_{3.1.1}$, como podemos observar na Figura 33.

Figura 29: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{3.2.1}}$ do E1



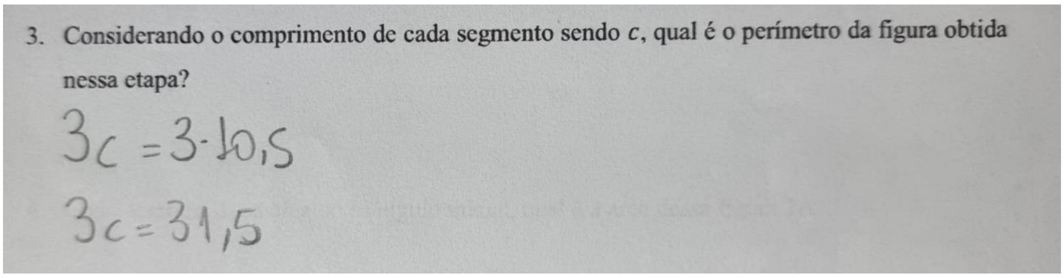
Fonte: Autores, 2021.

Como podemos ver na Figura 34, foi rascunhado pelo estudante, no material entregue, como ficaria cada segmento que compõe o triângulo. Nesse sentido, mesmo que o estudante não tenha apresentado uma justificativa "formal", foi possível identificar mobilização da $\tau i_{3.1.1}$ a partir de seus registros.

A tecnologia $\theta i_{3.1.1}$ que fundamenta a técnica $\tau i_{3.1.1}$ é estabelecida no conhecimento do elemento figural "segmento"; e noção de soma algébrica. No que concerne à teoria $\Theta i_{3.1.1}$, esta se respalda nas grandes áreas geometria e álgebra, da matemática. Para tanto, constitui-se o bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{3.1.1}, \Theta i_{3.1.1}]$ finalizando as componentes praxeológicas. Assim, o E1 mobiliza o quarteto praxeológico $[T_3, \tau i_{3.1.1}, \theta i_{3.1.1}, \Theta i_{3.1.1}]$. Observamos que essa técnica foi prevista em nossas análises *a priori*.

O estudante E2 respondeu da seguinte forma:

Figura 30: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{3.1.2}}$ do E2


3. Considerando o comprimento de cada segmento sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?

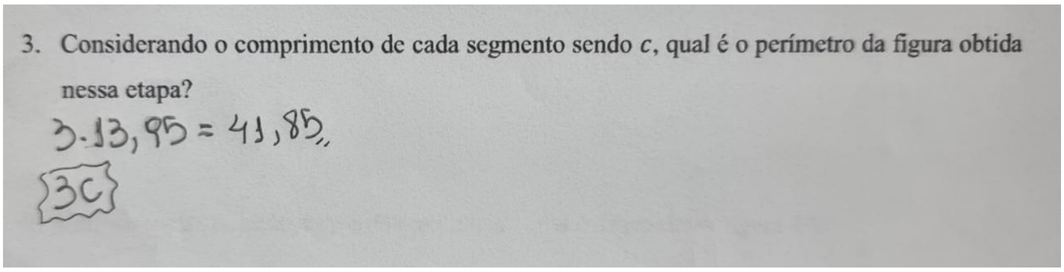
$3c = 3 \cdot 10,5$

$3c = 31,5$

Fonte: Autores, 2021.

De maneira semelhante, o estudante E9 respondeu da seguinte maneira:

Figura 31: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{3.1.2}}$ do E9


3. Considerando o comprimento de cada segmento sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?

$3 \cdot 13,95 = 41,85$

3c

Fonte: Autores, 2021.

Tal fato mostra que estes identificaram o resultado "3c", no entanto, como forma de resolução, se apropriaram das medidas obtidas durante a construção realizada no *software* GeoGebra. Por isso, identificamos que a técnica $\tau i_{3.1.2}$ utilizada por E2 e E9 consistiu em atribuir valores aos lados do triângulo a partir da construção no *software*.

A tecnologia $\theta i_{3.1.2}$ que fundamenta a técnica $\tau i_{3.1.2}$ é estabelecida na noção de soma de números decimais e conhecimento do elemento figural "segmento". No que concerne à teoria $\Theta i_{3.1.2}$, esta se respalda nas grandes áreas aritmética, álgebra e geometria, da matemática. Para tanto, se constitui o bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{3.1.2}, \Theta i_{3.1.2}]$ finalizando as componentes praxeológicas. Assim, os estudantes E2 e E9 mobilizam o quarteto praxeológico $[T_3, \tau i_{3.1.2}, \theta i_{3.1.2}, \Theta i_{3.1.2}]$.

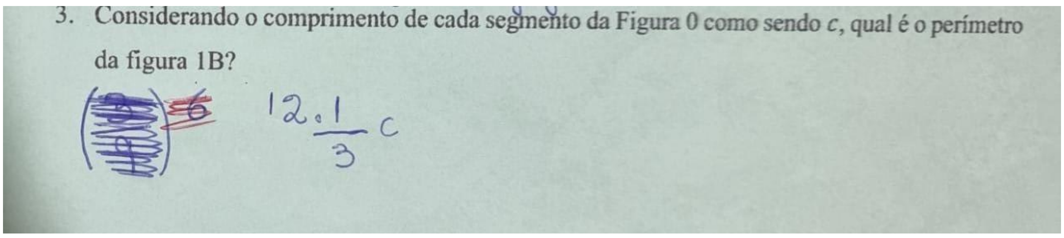
No que diz respeito aos estudantes E3, E4, E5, E6, E7 e E8 eles apresentaram somente a resposta final, ou seja, somente escreveram que o perímetro correspondia a $3c$, e não apresentaram qual foi a maneira que utilizaram para chegar no resultado descrito. Por esse motivo, não conseguimos identificar exatamente qual foi a técnica desenvolvida por eles.

Tendo em vista todo o percurso, podemos conjecturar que esses estudantes mobilizaram a técnica $\tau i_{3.1.1}$, pois observamos que todos apresentaram o mesmo resultado, e mesmo que não tenham esboçado ou justificado a maneira como encontraram esta resposta, intui-se pelo contexto, que mobilizaram a mesma técnica apresentada por E1. Contudo, como não temos um material que documente tal situação, cabe somente apresentar hipóteses do que pode ter ocorrido para que possamos refletir o motivo pelo qual não se apresentou alguma justificativa para essa subtarefa.

No que diz respeito à subtarefa $t_{3.2}$, que compreende a Etapa 1, identificamos que o estudante E2 não resolveu a tarefa, deixando o espaço para a resposta em branco. Os estudantes E1, E5, E6, E7 e E8 apresentaram uma resposta incorreta, pois concluíram que o perímetro do fractal nessa etapa era $12c$, ou seja, consideraram cada aresta da figura como tendo a medida *c*. Por esse motivo, tal resultado é considerado incorreto, uma vez que os estudantes desconsideraram que ao realizar uma iteração para a próxima etapa do fractal, o segmento que compõe cada um dos lados do triângulo equilátero da Etapa 0 é dividido em três partes iguais, passando a medir $\frac{1}{3}c$. Portanto, a resposta correta seria $12.\frac{1}{3}c = 4c$, e não *12c.* O estudante E9 apresentou a resposta correta *4c*, mas não a justificou.

No que se refere ao E4, ele apresentou um resultado adequado, como podemos ver na Figura 37.

Figura 32: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{3.2.1}}$ do E4

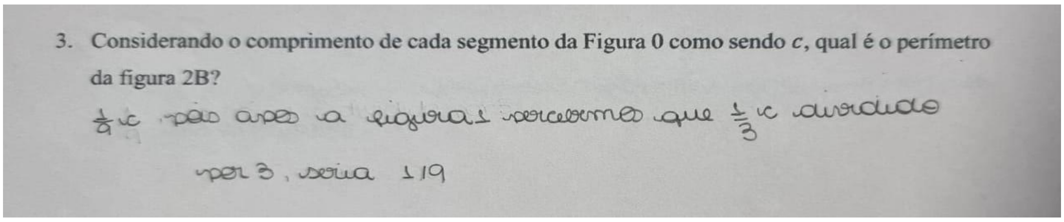


Fonte: Autores, 2021.

Nesse sentido, entendemos que a técnica $\tau i_{3.2.1}$ mobilizada pelo estudante E4 consistiu em encontrar a medida de cada segmento e, em seguida, multiplicá-la pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.2}$. Com isso, temos que a tecnologia $\theta i_{3.2.1}$ que fundamenta a técnica $\tau i_{3.2.1}$, é estabelecida no conhecimento do elemento figural “segmento”; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura. No que concerne à teoria $\Theta i_{3.2.1}$, esta se respalda nas grandes áreas aritmética, álgebra e geometria, da matemática. Para tanto, constitui-se o bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{3.2.1}, \Theta i_{3.2.1}]$ finalizando as componentes praxeológicas. Assim, o estudante E4 mobilizou o quarteto praxeológico $[T_3, \tau i_{3.2.1}, \theta i_{3.2.1}, \Theta i_{3.2.1}]$, sendo esta praxeologia constatada na análise *a priori*.

Para a subtarefa $t_{3.3}$, temos que o estudante E1 não apresentou resultado. No que diz respeito aos estudantes E3, E4, E5, E8 e E9, estes trouxeram somente o resultado final e de maneira incorreta, como podemos exemplificar com a Figura 38.

Figura 33: Resultado do E3


3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura 2B?

$\frac{1}{9}c$ pois após a figura 1 percebemos que $\frac{1}{3}c$ dividido por 3, seria 1/9

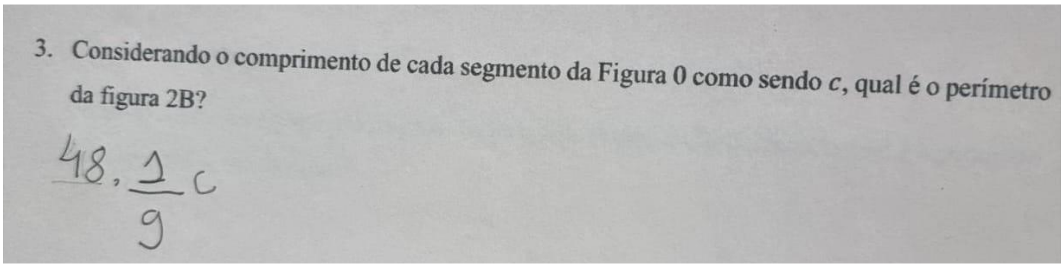
Fonte: Autores, 2021.

Podemos observar que a resposta apresentada por E3 pode ser considerada parcial, visto que foi concluído qual era o tamanho que cada segmento tinha na Etapa 2, contudo, a resposta de E3 mostrou um descuido com a interpretação da subtarefa, uma vez que ela pedia o perímetro do Fractal e não o comprimento de cada segmento. O E4 apresentou um resultado semelhante ao de E3. Assim, como houve um desvio no entendimento do objetivo da subtarefa $t_{3.3}$, não foi possível identificar a mobilização de técnicas válidas para o trabalho com a Organização Matemática.

Os estudantes E5, E8 e E9 produziram respostas incorretas e não as justificaram. Assim, como foram respostas que não trouxeram valor para a resolução da subtarefa, não temos condições de analisar e identificar a mobilização das componentes praxeológicas.

No entanto, os estudantes, E2, E6 e E7 apresentaram a técnica $\tau i_{3.3.1}$ que consistiu em encontrar a medida de cada segmento e, em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.3}$, conforme podemos observar a seguir.

Figura 34: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{3.3.1}}$ do E6


3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura 2B?

$48 \cdot \frac{1}{9} c$

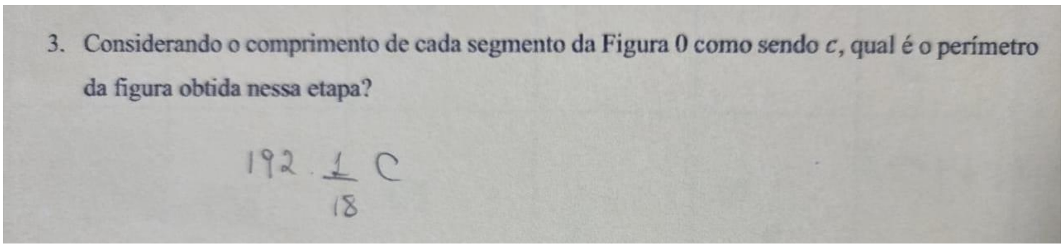
Fonte: Autores, 2021.

Com isso, temos que a tecnologia $\theta i_{3.3.1}$ é estabelecida no conhecimento do elemento figural "segmento"; noção de divisão algébrica para obter a medida de cada segmento; noção de multiplicação algébrica para obter a medida do perímetro da figura. No que concerne à teoria $\Theta i_{3.3.1}$, esta se respalda nas grandes áreas aritmética, álgebra e geometria, da matemática. Para tanto, constitui-se o bloco tecnológico-teórico $[\theta i_{3.3.1}, \Theta i_{3.3.1}]$ finalizando as componentes praxeológicas. Assim, os estudantes E2, E6 e E7 mobilizaram o quarteto praxeológico $[T_3, \tau i_{3.3.1}, \theta i_{3.3.1}, \Theta i_{3.3.1}]$, sendo esta praxeologia constatada na análise *a priori*.

Na subtarefa $t_{3.4}$, os estudantes E2, E3, E4, E5, E6, e E7 não apresentaram resoluções, assim, para se cumprir uma determinada subtarefa, é necessário se desenvolver alguma técnica (ALMOULOUD, 2015), e como isso não ocorreu, não pudemos discutir as possíveis técnicas mobilizadas pelos estudantes.

Em contrapartida, os estudantes E1, E8 e E9 apresentaram um resultado que destoa do objetivo da subtarefa, como podemos observar a seguir:

Figura 35: Resultado do E8


3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?

$192 \cdot \frac{1}{18} c$

Fonte: Autores, 2021.

Para esclarecer, os estudantes vinham de tarefas que tinham por objetivo encontrar o perímetro do Fractal na Etapa 0, Etapa 1 e Etapa 2. Assim, entendemos que esses estudantes compreenderam que a Etapa n, que consistia em determinar uma fórmula para o perímetro, seria uma próxima etapa do Fractal, que seria a Etapa 3, visto que eles estavam em uma sequência de tarefas. Portanto, nesse caso, não conseguimos prosseguir com as análises por não haver dados matemáticos.

Para tanto, foi realizada a análise praxeológica *a posteriori* do tipo de tarefa T_3, em que identificamos as praxeologias mobilizadas por alguns estudantes. Desse modo, realizaremos aproximações com a análise *a priori*, identificando quais foram as aproximações que foram possíveis técnicas de serem identificadas, como exposto no Quadro 13:

Quadro 13: Aproximações das análises *a priori* e *a posteriori* das técnicas do tipo de tarefa T_3[23]

Técnica	Subtarefas	Análise *a priori*	Análise *a posteriori*
Somar a medida de cada segmento que compõe a figura da Etapa 0	$t_{1.1}$	X	X
Atribuir valores aos lados do triângulo a partir da construção que ocorreu de forma independente	$t_{1.1}$		X
Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.2}$	$t_{1.2}$	X	X
Encontrar a medida de cada segmento e em seguida, multiplicar essa medida pela quantidade de segmentos obtida na $t_{1.3}$	$t_{1.3}$	X	X
Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a quantidade de triângulos em uma Etapa n	$t_{1.4}$	X	

Fonte: Autores (2021)

Com o Quadro 13, observamos quais técnicas previstas foram efetivamente mobilizadas pelos estudantes. Também evidenciamos que não houve técnicas que foram mobilizadas *a posteriori* e não foram previstas *a priori*. Nesse sentido, com as aproximações das análises, podemos constatar que a OM empregada para o tipo de tarefa T_3 foi validada devido à mobilização das técnicas previamente discutidas, contudo, observamos que nessa subtarefa a construção da fórmula não foi alcançada por nenhum estudante. Diante disso, seguiremos com os próximos tipos de tarefas que serão analisados.

[23] As partes em que não forem marcados os "X" significa que a técnica mencionada não foi mobiliza *a priori*, *a posteriori* ou em ambas as situações.

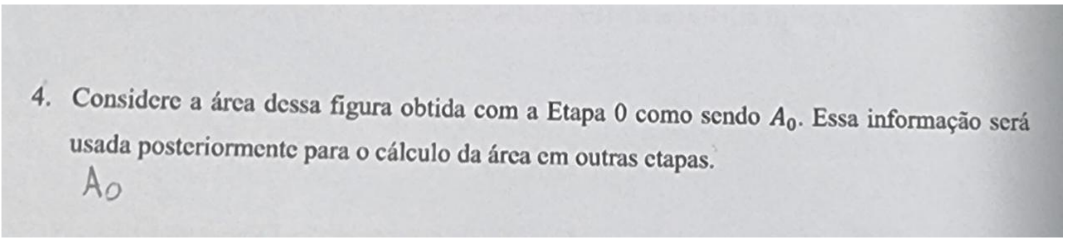
Quadro 14: Análise Praxeológica *a posteriori* do tipo de tarefa $\boldsymbol{T_4}$

Tipo de Tarefa T_4	Generalizar o cálculo da medida da área do Fractal Ilha de Koch em cada etapa de sua construção			
Tarefa t_4	Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área de cada etapa do Fractal Ilha de Koch considerando A_0 a área do triângulo inicial			
Subtarefa $t_{i.j}$	Técnica $\tau i_{i.j.k}$	Tecnologia $\theta i_{i.j.k}$	Teoria $\Theta i_{i.j.k}$	Estudantes
$t_{4.1}$: Encontrar a área da figura obtida na Etapa 0	$\tau i_{4.1.1}$: Considerar a área prevista no enunciado da tarefa	$\theta i_{3.1.1}$: Noção de incógnita e interpretação de enunciado matemático	$\Theta i_{3.1.1}$: Álgebra	E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9
$t_{4.2}$:Encontrar a área da figura obtida na Etapa 1	$\tau i_{4.2.1}$: Encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior	$\theta i_{4.2.1}$: conhecimento do elemento figural "triângulo"; noção geométrica de área; noção de multiplicação algébrica	$\Theta i_{3.2.1}$: Aritmética, geometria e álgebra	E1, E4, E6, E7
$t_{4.3}$: Encontrar a área da figura obtida na Etapa 2	X	X	X	X
$t_{4.4}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida da área na Etapa n	X	X	X	X

Fonte: Autores (2022).

Para complementar as informações contidas no Quadro 14, seguimos para a subtarefa $t_{4.1}$, em que identificamos que o estudante E2 não apresentou uma resolução ou justificativas para que possamos analisar. Com relação aos estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8 e E9, estes apresentaram a resposta final A_0, como vemos a seguir:

Figura 36: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{4.1.1}}$ do E1


4. Considere a área dessa figura obtida com a Etapa 0 como sendo A_0. Essa informação será usada posteriormente para o cálculo da área em outras etapas.
A_0

Fonte: Autores, 2021.

Como no enunciado da subtarefa já apresentava a resposta a ser considerada, entendemos que a técnica $\tau i_{4.1.1}$ é explícita, e consiste em considerar a área prevista no enunciado da tarefa, sendo mobilizada ao ler o enunciado e ao compreender que aquela área não precisaria necessariamente de um valor numérico para ser considerado. Tendo em vista todo o percurso, podemos conjecturar que esses estudantes mobilizaram a $\tau i_{4.1.1}$ pois observou-se que todos apresentaram a resposta esperada.

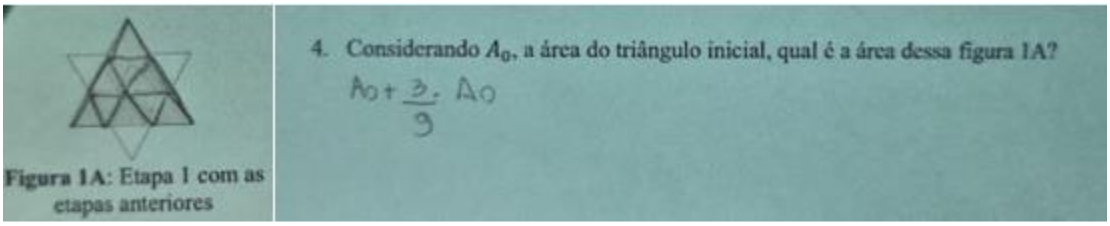
Desse modo, entendemos que a justificativa que é apresentada para a técnica, e entendida por tecnologia $\theta i_{4.1.1}$, consiste na noção de incógnita e interpretação de enunciado matemático. Para compor o quarteto praxeológico, temos que a teoria $\Theta i_{4.2.1}$ que rege as demais é compreendida pela álgebra. Portanto, entendemos que o quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8 e E9 na subtarefa $t_{4.2}$ é determinado por $[T_4, \tau i_{4.1.1}, \theta i_{4.1.1}, \Theta i_{4.1.1}]$.

A respeito da subtarefa $t_{4.2}$, tivemos três situações diferentes. A primeira refere-se aos estudantes E2 e E9, que não apresentaram resultados ou resoluções. A segunda situação diz respeito aos estudantes E3, E5 e E8, que apresentaram um resultado incorreto para essa subtarefa. Os estudantes E5 e E8 consideraram a resposta para $t_{4.2}$ como sendo a mesma compreendida na subtarefa $t_{4.1}$, ou seja, indicaram que o resultado seria A_0, o que não corresponde ao solicitado.

O estudante E3 trouxe uma ideia de multiplicidade, ou seja, considerou que a área da Etapa 1 seria o dobro na Etapa 2, como podemos observar na sua justificativa: “$2A_0$, se na 1ª tarefa é A_0, considerando, isso ficará $2A_0$”. Note que esse estudante pensou que haveria um aumento da área conforme as iterações das etapas.

No que concerne à terceira situação, temos a mobilização da técnica $\tau i_{4.2.1}$ pelos estudantes E1, E4, E6 e E7. Assim, a $\tau i_{4.2.1}$ consistiu em encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior, como podemos ver na Figura 42:

Figura 37: Técnica $\boldsymbol{\tau i_{4.3.1}}$ do E1



Fonte: Autores, 2021.

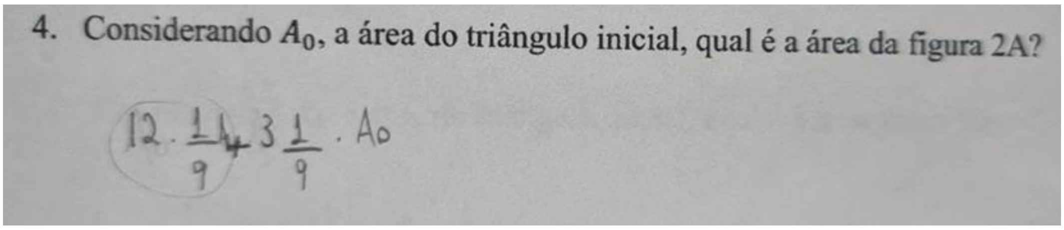
Observa-se que E1 concluiu que os triângulos gerados têm área igual a $\frac{1}{9}$ do triângulo inicial, como pode ser observado pela Figura 41. Isso acontece porque no interior do triângulo inicial é obtido um total de 9 triângulos equiláteros menores, gerando uma área igual a $\frac{1}{9}$ da área inicial, ou seja, $\frac{1}{9}A_0$. Com isso, o estudante encontrou a área dos triângulos gerados nessa etapa somado com a área da Etapa 1.

Os estudantes E4, E6 e E7 apresentaram somente o resultado final, no entanto, entendemos que aplicaram a técnica $\tau i_{4.2.1}$, pois utilizaram o *software* para auxiliar tanto na construção como nas conjecturas produzidas para desenvolver uma técnica. Com isso, considera-se que a $\theta i_{4.2.1}$ consiste no conhecimento do elemento figural “triângulo”; noção geométrica de área; noção de multiplicação algébrica. Para a teoria $\Theta i_{4.2.1}$, entendemos que foi necessária a utilização da aritmética, geometria e álgebra, pois foi preciso utilizar os recursos que são provenientes dessas teorias para se desenvolver uma técnica.

Portanto, entendemos que o quarteto praxeológico mobilizado pelos estudantes E1, E4, E6 e E7 na subtarefa $t_{4.3}$ é determinado por $[T_4, \tau i_{4.2.1}, \theta i_{4.2.1}, \Theta i_{4.2.1}]$. Tal praxeologia mobilizada pode ser prevista *a priori*, quando identificamos possíveis resoluções para a cada subtarefa.

No que diz respeito à subtarefa $t_{4.3}$, identificamos que os estudantes E8 e E9 apresentaram uma resolução incorreta, assim como podemos observar na Figura 43.

Figura 38: Resolução do E8


4. Considerando A_0, a área do triângulo inicial, qual é a área da figura 2A?

$12 \cdot \frac{1}{9} + 3 \frac{1}{9} \cdot A_0$

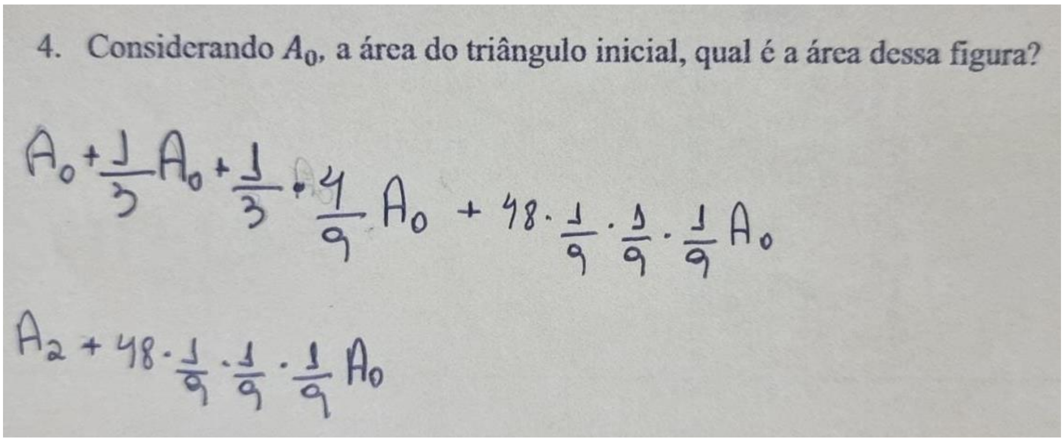
Fonte: Autores, 2021.

Intui-se que esse estudante encontrou, pelos seus registros, a área dos triângulos gerados na Etapa 2, mas de maneira incorreta. Ainda, fez a soma a medida de perímetro na sua Etapa 1 ao invés de somar com a medida de área na sua Etapa 1. Desse modo, deixa-se a resolução dessa subtarefa equivocada.

Os estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E6 e E7 não apresentaram qualquer tipo de resolução para a subtarefa $t_{4.3}$.

Para finalizar o conjunto, temos a subtarefa $t_{4.5}$ em que os estudantes E8 e E9 apresentaram uma maneira de resolver a subtarefa, conforme observamos na Figura 44:

Figura 39: Resolução do E9



Fonte: Autores, 2021.

Nesse caso, notamos que o estudante E9 realizou somente o somatório das Etapa 1 e Etapa 2, desconsiderando para uma Etapa n. Entendemos que esse estudante estava seguindo o caminho para encontrar uma fórmula, mas percebe-se que esse estudante não apresenta compreensão de generalidade, sendo algo que precisa ser estimulado. Assim, por apresentar cálculos equivocados para cumprir a subtarefa, não podemos identificar o quarteto praxeológico.

Os estudantes E1, E2, E3, E4, E5, E6 e E7 não apresentaram qualquer tipo de resolução para a subtarefa $t_{4.4}$.

Para tanto, foi realizada a análise praxeológica *a posteriori* do tipo de tarefa T_4, em que identificamos as praxeologias mobilizadas por alguns estudantes. Desse modo, realizaremos aproximações com a análise *a priori*, identificando quais as aproximações que foram possíveis técnicas de serem identificadas, conforme o exposto no Quadro 15:

Quadro 15: Aproximações das análises *a priori* e *a posteriori* das técnicas do tipo de tarefa T_4[24]

[24] As partes em que não forem marcados os "X" significa que a técnica mencionada não foi mobiliza *a priori*, *a posteriori* ou em ambas as situações.

Técnica	Subtarefas	Análise *a priori*	Análise *a posteriori*
Considerar a área prevista no enunciado da Tarefa	$\boldsymbol{t_{1.1}}$	X	X
Encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior (Etapa 0)	$\boldsymbol{t_{1.2}}$	X	X
Encontrar a medida da área dos triângulos acrescentados nessa etapa e somar com a área da etapa anterior (Etapa 1)	$\boldsymbol{t_{1.3}}$	X	
Encontrar um fator comum entre todas as subtarefas anteriores de modo a descrever a fórmula para a medida da área em uma Etapa n	$\boldsymbol{t_{1.4}}$	X	

Fonte: Autores (2021)

Com o Quadro 15, observamos quais técnicas previstas foram efetivamente mobilizadas pelos estudantes. Também, evidenciamos que não houve técnicas mobilizadas *a posteriori* e não foram previstas *a priori*. Nesse sentido, com as aproximações das análises, podemos constatar que a OM empregada para o tipo de tarefa T_4 foi validada devido à mobilização das técnicas previamente discutidas, contudo, notamos que nessa subtarefa a construção da fórmula não foi alcançada por nenhum estudante. Após as tarefas terem sido entregues, os ministrantes do curso realizaram a generalização no quadro para que os estudantes pudessem comparar suas respostas e complementar suas ideias.

Como uma forma de melhor esclarecer a Organização Didática da implementação, realizamos, na próxima seção, uma análise que discute as observações realizadas que resultaram na produção dos dados coletos. Assim, faremos a análise da OD sob a lente teórica dos momentos didáticos propostos por Chevallard, como forma de subsidiar a discussão acerca da implementação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com essa pesquisa, realizamos um estudo acerca de Organizações Praxeológicas desenvolvidas para a construção e exploração do Fractal Ilha de Koch. Deste modo, objetivamos investigar, por meio da Teoria Antropológica do Didático (TAD), as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch, em que pautamos na seguinte problemática de pesquisa: Quais as praxeologias mobilizadas por estudantes do Ensino Médio durante a construção de fórmulas para o cálculo de medidas de perímetro e área do Fractal Ilha de Koch?

Como forma de subsidiar a pesquisa, entendemos que a Teoria Antropológica do Didático foi relevante para a construção desse texto, uma vez que ela permitiu realizar um olhar teórico acerca do que se produziu e do que coletou. Assim, a TAD auxiliou na elaboração e na identificação das praxeológicas mobilizadas pelos estudantes durante a exploração do Fractal Ilha de Koch. Com isso, observamos que a TAD permitiu a elaboração, o estudo e análise acerca de um conhecimento e de práticas em sala de aula da Geometria Fractal, propiciando um material de ensino e aprendizagem para estudantes da Educação Básica, adequado ao contexto e à situação vigente. Do mesmo modo, a utilização do aporte metodológico adotado, a Engenharia Didática, propiciou realizar um estudo aprofundado a respeito do fractal Ilha de Koch, as tarefas propiciadas pela TAD e delineando todo o escopo metodológico desta pesquisa.

Diante da questão de pesquisa, obtivemos um resultado proveniente da realização do mapeamento, isto é, a revisão de literatura abordada nesta pesquisa, cujo objetivo consistiu em uma análise epistêmica do tema abordado e verificar como as pesquisas relacionadas à Geometria Fractal estavam sendo realizadas, evidenciando o diferencial adotado em nesta pesquisa para com as demais pesquisas. Com isso, observamos que esse mapeamento nos auxiliou na delimitação da pesquisa, uma vez que concluímos que houve uma predisposição para utilizar os *softwares* matemáticos para auxiliar pesquisas em sala de aula. Ainda, pudemos concluir que por meio das pesquisas revisitadas identificamos somente uma que trabalhava com o Fractal Ilha de Koch, que é o nosso objeto matemático.

Observamos que a Organização Matemática retratada, implementada e analisada, pode ser incrementada nas salas de aulas a partir da mobilização de Organizações Didáticas, escolhendo em qual contexto e em quais situações serão apresentadas aos estudantes. Assim, com a Teoria Antropológica do Didático, podemos isolar as tarefas e fazer uma análise a respeito das técnicas e as suas justificativas - a tecnologia - e a teoria, e realizar uma análise da OD para que possamos validá-la de acordo com os momentos didáticos.

Para complementar e auxiliar na obtenção de respostas aos objetivos geral e específicos, apresentamos um outro resultado, que diz respeito à contribuição da análise *a priori*, pois a partir dela previmos algumas praxeologias que poderiam ocorrer em sala de aula. Por meio da análise *a priori*, realizada a modelização da OP, que consistiu na Organização Didática e na Organização Matemática, realizamos uma análise dessas situações que caracterizaram a Organização Praxeológica.

Dessa maneira, pudemos identificar as praxeologias mobilizadas pelos estudantes. Algumas dessas praxeologias foram constatadas quando houve o confrontamento na análise a *posteriori* com a análise *a priori* e, outras puderam ser identificadas somente na análise *a posteriori*, ou seja, após a experimentação, houve situações que não foram previstas, porém contempladas durante a implementação, consequentemente, na análise *a posteriori*. Assim, foi possível verificarmos que houve fatos "novos" que não estavam previstos e que auxiliaram para a aprendizagem dos estudantes e na reconstrução das praxeologias.

Logo, ao analisarmos os dados, constatamos fatores que possibilitaram ou impossibilitaram o desenvolvimento da OP, em uma sala de aula. Para tal, nesse primeiro momento, conjecturamos a possibilidade de que o *software* GeoGebra pode ser um recurso para auxiliar as explorações matemáticas acerca do fractal, uma vez que por meio da análise dos dados, pudemos observar que houve uma relação entre o objeto matemático e o *software*, a qual permitiu realizar explorações e elencar hipóteses.

No entanto, algumas limitações no decorrer da implementação foram identificadas. Embora tenhamos realizado duas implementações piloto, estas foram realizadas no contexto da pandemia da COVID-19 e, por isso, foram feitas de modo remoto, o que não nos possibilitou refinar totalmente nossa implementação para a produção dos dados. Sendo assim, durante a implementação, identificamos que, além das dificuldades relacionadas a assuntos matemáticos (o que era de se esperar), a falta de conhecimento do *software* GeoGebra por parte dos alunos proporcionou uma intervenção dos pesquisadores no controle do tempo para a implementação.

Isto é, os estudantes demonstraram dificuldades para a construção do fractal no *software*, mesmo de posse do tutorial, e isso demandou mais tempo da implementação do que previamos. Neste caso, durante a exploração matemática do fractal, momento em que os estudantes realizavam as tarefas, o tempo foi escasso, impossibilitando uma exploração matemática com a qualidade que gostaríamos. Sendo assim, reconhecemos que para uma implementação como a que propomos, que fez uso de um *software* geométrico para construção (desconhecido pelos estudantes) e almejava a construção de fórmulas de perímetro e área do fractal Ilha de Koch, necessitávamos de um tempo maior que 4 horas/aulas.

Outra limitação que constatamos, foi que durante a experimentação, tivemos variáveis de difícil controle, pois estávamos em um momento pandêmico, o qual o colégio adotou o ensino remoto e hibrido (uma parcela dos alunos acompanhavam as aulas presencialmente e outra parcela acompanhavam remotamente), essa situação foi um limitador, pois não conseguimos, enquanto um grupo de 4 pesquisadores, articular ambos grupos de estudantes para que ocorresse aprendizagem nos dois ambientes de ensino.

A elaboração de uma Organização Didática para o ensino e aprendizagem de uma Organização Matemática possibilitou que identificássemos aspectos acerca dos conhecimentos prévios dos estudantes, a pertinência da (re)introdução da Geometria Fractal na Educação Básica, e a validade das Organizações Praxeológicas construídas. Nesse sentido, com a análise dos dados, observamos que os estudantes apresentaram dificuldades acerca de noções básicas de geometria, como: noção de área de uma figura, perímetro, definição de segmento, dentre outros. Os estudantes também apresentaram dificuldades em álgebra, como: noção de variável, compreensão de generalização, construção de fórmulas, dentre outras. Com isso, identificamos que ainda há lacunas acerca dos conhecimentos prévios destes estudantes.

Nesse sentido, entendemos que tal OP permitiu que esse conhecimento pudesse estar presente na Educação Básica, como forma de encaminhar e aguçar os estudantes a perceberem as diferentes perspectivas matemáticas, para além de uma matemática distante de aplicações. E, podemos afirmar que os estudantes se sentiram curiosos e instigados a investigar o fractal Ilha de Koch por meio do GeoGebra com base em seus padrões e regularidades, uma vez que este fractal tem um aspecto belo que se assemelha a um floco de neve.

A partir disso, ressaltamos que nas 4 tarefas que foram implementadas, identificamos praxeologias emergentes pelos estudantes, em que presenciamos dificuldades em realizar generalizações e identificar o padrão fractal. Com esse resultado, essa pesquisa reforça a importância de se inserir e continuar a realizar pesquisas por meio dos fractais, principalmente na sala de aula, uma vez que essa geometria propicia a articulação com outras noções matemáticas permeando o campo da interdisciplinaridade.

Destaca-se ainda com essa pesquisa, que existem muitos estudos a ser realizado partindo dessa pesquisa, surgindo questionamentos do tipo: como abordar o ensino da Geometria Fractal por meio de um software no ensino híbrido? De que maneira pode-se estudar outros fractais por meio da Teoria Antropológica do Didático? De forma é possível aplicar esses constructos teóricos utilizados nessa pesquisa na formação de professores? Permeando questionamentos destes tipos ou outros que apresentem respostas para as limitações apresentadas nessas pesquisas, sugere-se a continuidade desta pesquisa, ampliando os diferentes olhares e lentes teóricas que podem ser investigados e acrescidos a esta pesquisa em Educação Matemática.

Portanto, entendemos que essa pesquisa manifesta a importância de se trabalhar e realizar pesquisas com a Geometria Fractal em sala de aula, uma vez que constatamos que os estudantes apresentam dificuldades acerca de noções matemáticas que podem ser aprendidas e exploradas. Com esta pesquisa, apresentamos perspectivas que a Teoria Antropológica do Didático e da Engenharia didática pôde proporcionar aos dados coletados, ressignificando todo o contexto e constructos teóricos e metodológicos desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Unión**: Revista Iberoamericana De Educación Matemática, Espanha, v. 11, n. 42, p. 9-34, nov. 2015. Firma Invitada. Disponível em:

ARAÚJO, F. G. S.; MARINS, A. S.. Introduzindo a geometria fractal no ensino médio por meio da perspectiva de modelagem matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S.L.], v. 6, n. 18, p. 21-34, 31 dez. 2019

ARTAUD, M. Constituir uma organização matemática e uma organização de estudo-praxeologias para o professor e sua ecologia. I: **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. Cap. 5. p. 135-180.

ARTAUD, M. Introduction à l'approche écologique du didactique: l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *In*: IXIÈME ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 9., 1998, Caen. **Actes de la IXième École d'été de Didactique des Mathématiques.** Caen: ARDM&IUFM, 1998. p. 101-139.

ARTUAD, M. Des liens entre l'organisation de savoir et l'organisation de l'étude dans l'analyse praxéologique. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 4, p. 248-264, 11 jun. 2019.

ASSIS, T. A. de *et al*. Geometria Fractal: propriedades e características de fractais ideais. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 2, p. 2304.1-2304.10, 2008.

AZEREDO, C. M. R.; SOUZA, M. D.; BATISTA, S. C. F.; BARCELOS, G. T. Geometria fractal e progressões geométricas: análise de um simulador de fractais. **Novas Tecnologias na Educação**, Rio Grande do Sul, v. 11, n. 1, p. 1-10, jul. 2013.

BALDOVINOTTI, N. S. **Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática**. 2011. 204 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.

BARBOSA, L. M.; SILVA, R. S. R. Sobre pensamento computacional na construção de um triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Revista Pesquisa e Debate em Educação**, [S.I], v. 9, n. 1, p. 537-559, jan. 2019.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal**: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BICUDO, M. A. V. (org.) **Educação Matemática**. São Paulo: Centauro, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal**: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. *In*: **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. Cap. 1. p. 31-50.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique. **IUFM d'Aix-Marseille,** 1998.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches En Didactique Des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. 2. ed. **Grenoble**: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Organiser l´étude. 3. Ecologie & régulation. **Actes de la 11 École d´Été de Didactique des Mathématiques**. France: La Pensée Sauvage, 2002.

CHEVALLARD, Y. Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. *In*: 12TH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12., 2012, Seoul. **ICME-12.** Seoul: ICME, 2012. p. 173 187.

CHEVALLARD, Y. Uma ruptura epistemológica em ato. *In*: **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. princípios e fundamentos. Curitiba: CRV, 2018. Prólogo. p. 21-29.

CLEMENTE, J. C. *et al*. Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em educação matemática. In. VII Encontro Mineiro de Educação Matemática. 2015, São João Del-Rei. **Anais eletrônicos**. São João Del-Rei: UFSJ, 2015.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

EBERSON, R. R. **Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano**. 2004. 177 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

FERREIRA, E. F. P.; CAMPONEZ, L. G. B.; SCORTEGAGNA, L. **Integração das tecnologias com o ensino da matemática**: transformações e perspectivas no processo de ensino e aprendizagem, 2015.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. Ressonância e dissonância do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, Campinas, v. 1, n. 1, p. 19-39, mar. 1993

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FRANZIN, R. F. Proposta de ensino de Geometria por meio da Teoria Fractal e o software GeoGebra. **Debates em Educação**, [S.L.], v. 10, n. 22, p. 89-106, 21 dez. 2018.

GAZIRE, E. S. **O não resgate das geometrias**. 2000. 217 f. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GONÇALVES, A. G. N.; MISATO, H. T.; CRUZ, J. L.; ATHANAZIO, V. C. A utilização da Geometria Dinâmica para estudo da Progressão Geométrica via Fractais: anais do i simpósio interdisciplinar de tecnologias na educação [sinte]. **Anais do I Simpósio Interdisciplinar de Tecnologias na Educação [Sinte]**, p. 157-167, Não é um mês valido! 2015.

GOUVEA, F. R. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio e softwares de geometria dinâmica**. 2005. 259 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2005.

GRESSLER, M. D. **Construindo uma percepção complexa da realidade a partir do estudo dos fractais**. 2008. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, P, 2008.

HENRIQUES, A. Análise Institucional & Sequência Didática como Metodologia de Pesquisa. *In*: I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática, 2016, Bonito-Ms. **Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**. Bonito-Ms: LADIMA, 2016.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

JELINEK, K. R.; KAMPFF, A. J. C. A geometria que existe além do olhar: levando a geometria da natureza para dentro da escola. **Educação Matemática em Revista – Rs**, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 10, p. 75-81, jun. 2009.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2007.

KOEPSEL, A. P. P.; BAIER, T. A utilização de material didático manipulável e da geometria fractal para o aprendizado dos conceitos de área e perímetro de quadrados: um estudo de caso envolvendo uma estudante com baixa visão. **Revista Educação Especial**, [S.L.], v. 32, p. 4-15, 1 jan. 2019.

KOMAR, M. F. C.; BURAK, D.; SANTOS, E. M.; MARTINS, M. A. A modelagem matemática como metodologia para o ensino e a aprendizagem dos fractais. **Novas Tecnologias na Educação**, [S.I], v. 15, n. 2, p. 1-10, dez. 2017.

LEIVAS, J. C. P.; BETTIN, A. D. H. Teorema de pitágoras e o fractal árvore pitagórica: um experimento no ensino fundamental. **Brazilian Journal Of Education, Technology And Society (Brajets)**, [S.L.], v. 11, n. 3, p. 444-457, 1 nov. 2018.

LOPES, J. M.; SALVADOR, J. A.; BALIEIRO FILHO, I. F. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Inocêncio Fernandes Balieiro Filho**, São Carlos, v. 7, n. 3, p. 47-62, jul. 2013. Disponível em: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/issue/view/14. Acesso em: 04 mar. 2021.

LOPES, M. R. C. M.; AMARAL, A.; MATTO, A. F.; SILVA, K. B. R. Fractais na Educação Básica: aprendendo com quebra-cabeças, arte francesa e cartões. **Educação Matemática em Revista**, [S.I], p. 37-44, jul. 2014.

LORENZATO, S. Os por quês matemáticos dos alunos e as respostas dos professores. **Pró-posições**, Campinas, v. 4, n.1, p. 73-77, mar. 1993.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

MANDELBROT, B. **Objectos fractais**: forma, acaso e dimensão. 2. ed. Tradução: Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima. Lisboa: Gradiva, 1998.

MANDELBROT, B. **The Fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1977.

MESSINA, G. Investigación en o investigación acerca de la formación docente: un estado del arte en los noventa. **Revista Iberoamericana de Educación**, Santiago, v. 19, p. 145-207, 1 jan. 1999.

MINELI, J. P. **Fractais**: generalização de padrões no ensino fundamental. 2012. 88 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

MORAN, J. M. **Ensino e aprendizagem inovadores com apoio de tecnologias**. *In*: Novas tecnologias e mediação pedagógica. 21. ed. Campinas: Papirus, 2013.

MOREIRA, Vanessa S. S. S. **Geometria fractal na educação básica**. 2017. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

MURARI, C. Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. **Bolema**, Rio Claro (Sp), v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5744. Acesso em: 01 mar. 2021.

PAIXÃO, F C.; MORAN, M.; REZENDE, V. Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. **Boletim Online de Educação Matemática**, [S.L.], v. 8, n. 15, p. 109-127, 9 out. 2020.

PARANÁ. Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica:** Matemática. Curitiba: Secretária de Estado da Educação do Paraná, 2008. 81 p. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 17 abr. 2020.

PARANÁ. **Currículo da Rede Estadual Paranaense**. Curitiba: Estado do Paraná, 2021. Disponível em: https://www.educacao.pr.gov.br/sites/default/arquivos_restritos/files/documento/2021-05/crep_matematica_2021_anosfinais.pdf. Acesso em: 26 jan. 2021.

PARANÁ. **Referencial Curricular do Paraná**: princípios, direitos e orientações. Curitiba: Estado do Paraná, 2018. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf. Acesso em: 26 jan. 2022.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké:** Cepem/FE/ Unicamp, Campinas, SP, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. 1991. 348 f. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1991.

REZENDE, V.; MORAN, M.; MÁRTIRES, T. M.; PAIXÃO, F. C.. O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma investigação com alunos do ensino médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, [S.L.], v. 11, n. 2, p. 160-171, 11 set. 2018.

REZENDE, V.; MORAN, M.; MARTIRES, T. M.; TRAVASSOS, W. B. Registros de representação semiótica e sua articulação com o hexágono de durer nas aulas de matemática. **Em Teia**: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, [S.I], v. 9, n. 2, p. 1-25, dez. 2018.

RIBEIRO, R. D. G. L. **O ensino das geometrias não-euclidianas**: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica. 2012. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

ROMANOWSKI, J. P; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. **Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 37-50, dez. 2006.

SALLUM, É. M. Fractais no ensino médio. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 57, n. 1, p. 1-8, 2005.

SANTOS, T. S. **A inclusão das geometrias não euclidianas no currículo da educação básica**. 2009. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática), Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

SCALDELAI, D. O software GeoGebra. In: BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. (org.). **O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica**: frações, estatística, círculo e circunferência. Curitiba: Íthala, 2014. p. 13-23.

SCORTEGAGNA. L. **Informática na Educação**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015. (Anotação da aula)

SILVA, L. H.; OLIVEIRA, A. A. S. Contribuições do projeto piloto à coleta de dados em pesquisas na área de educação. **Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, p. 225-245, 2015. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A. Estudo de uma organização didática para a construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. In: VII CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2013, Montevideo. **Actas del VII CIBEM.** Montevideo: VII Cibem, 2013. p. 7677-7684.

VALENTE, J. A. A Informática Na Educação: como, para que e por que. **Revista de Ensino de Bioquímica**, [S.L.], v. 1, n. 1, p. 27-31, 2001. Sociedade Brasileira de Bioquímica e Biologia Molecular (SBBq).

VEJAN, M. P.; FRANCO, V. S. **Geometria não-euclidiana/ geometria dos fractais**. 2009.

VIEIRA PINTO, Á. **O conceito de tecnologia**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

APÊNDICES A – Tutorial para a construção do Fractal Ilha de Koch

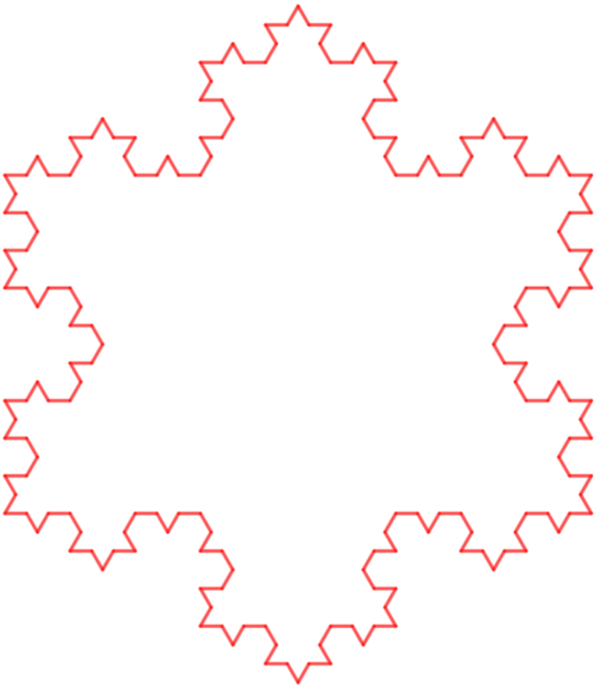
Explorando o Fractal Ilha de Koch por meio do *software* GeoGebra

Vinícius Murilo Fratucci[25]

Mariana Moran[26]

Vanessa Cristina Rhea[27]

Valdirene Maria dos Santos[28]



RESUMO

Os fractais podem ser entendidos como entes matemáticos os quais suas partes possuem semelhança com o todo. Eles compõem a Geometria dos Fractais, considerada como uma geometria não-euclidiana, essa geometria é parte integrante da BNCC (Base Nacional comum Curricular) e das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná. Para este

---

[25] Mestrando em Educação Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PRPGEM), Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). E-mail: viniciusfratucci@outlook.com

[26] Professora Doutora Adjunta D da Universidade Estadual de Maringá e compõe o corpo docente do Program[a] Pós-graduação em Educação Matemática (PRPGEM) Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). E-m[ail]: mmbarroso@uem.br

[27] Professora Colaboradora da Universidade Estadual de Maringá. Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) Universidade Estadual de Londrina (UEL). E-mail: vcrhea2@uem.br

[28] Professora Colaboradora da Universidade Estadual de Maringá. Mestre em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática (PCM) pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), graduanda em Pedagogia pela mesma universidade. E-mail: valdirene_santos2@hotmail.com

minicurso propomos a exploração de uma atividade relacionada à construção do Fractal Ilha de Koch utilizando o *software* GeoGebra. A atividade terá como foco a exploração de diversos conceitos de geometria, números e álgebra, presentes na Educação Básica. Com a realização desta atividade, espera-se que os participantes do minicurso compreendam a importância da Geometria dos Fractais para as aulas de Matemática, e vislumbrem as possibilidades de trabalho com diversos conceitos matemáticos durante a exploração de tarefas sobre Geometria dos Fractais em sala de aula.

INTRODUÇÃO

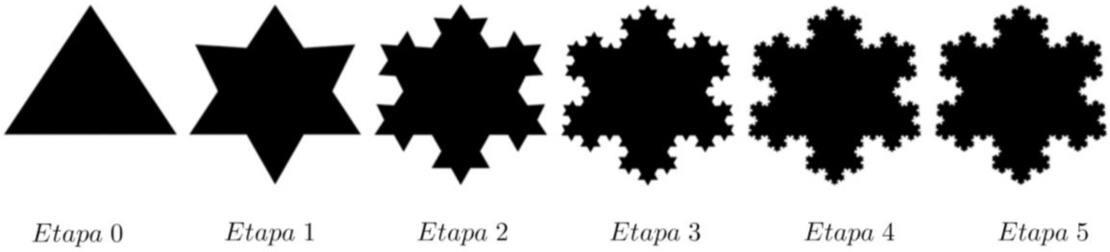
O estudo dos Fractais vem ocorrendo ao longo dos anos e seu precursor foi o matemático Bernoit Mandelbrot (1924-2010) que fez diversas contribuições para essa Geometria, dentre elas o termo “Fractais” (BARBOSA, 2005, p. 9). A Geometria Fractal é constituída por três características principais, são elas “[...] a auto-semelhança, a complexidade infinita e a sua dimensão” (ASSIS et al., 2008, p. 2304-2).

Essas propriedades dos fractais podem ser compreendidas de acordo com Assis *et al.* (2008), de maneira em que a autossemelhança pode ser entendida quando uma porção de um Fractal pode ser visualizada como uma réplica do Fractal como um todo, porém em uma escala menor. No que se refere a complexidade infinita, é compreendida pelo fato de sua geração de imagens ocorrer por um número infinito de iterações. E por fim, a dimensão Fractal, ela representa o grau de ocupação em que esse Fractal tem no espaço, ou seja, está relacionado com o seu grau de irregularidade.

Nota-se que a partir dos estudos dessas principais características que compõem um Fractal, podemos então dizer que a Curva de Koch, consequentemente, a Ilha de Koch é um Fractal. Concernente a isso, tem-se que os primeiros indícios da Ilha de Koch, apresentam-se com a Curva de Koch introduzida pelo matemático polonês Herge Von Koch em meados de 1904 e 1906, que hoje leva seu nome (BARBOSA, 2005). A partir disso, vem-se a criação da Ilha de Koch, que é iniciado com um triângulo equilátero e em seus segmentos há a construção da Curva de Koch, construindo o Floco de Neve, como podemos ver na Figura 1.

Com esses estudos, tem-se o interesse de desenvolver algumas situações em que o *software* GeoGebra pode ser utilizado para conduzir estudantes a construir e explorar o Fractal Ilha de Koch.

Figura 1 - Níveis do Fractal Ilha de Koch



Fonte: Autores (2021).

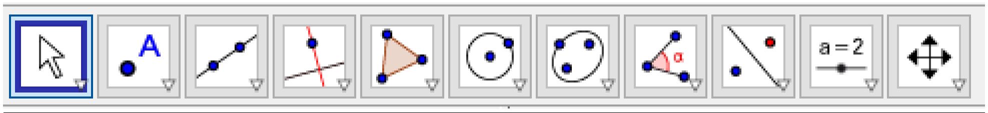
A atividade aqui proposta tem como alvo, professores e futuros professores que ensinam Matemática, sendo que os pontos abordados fazem referência a conteúdo do 8º ano a 2º ano do Ensino Médio, segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) e as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica para o Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008). Entretanto, realizadas as devidas adaptações, a mesma pode ser trabalhada em outros níveis escolares.

Para a construção da Curva de Koch utilizaremos o *software* GeoGebra Classic 5 para computador. Caso não tenha, pode ser encontrado para download no site: https://www.geogebra.org/download.

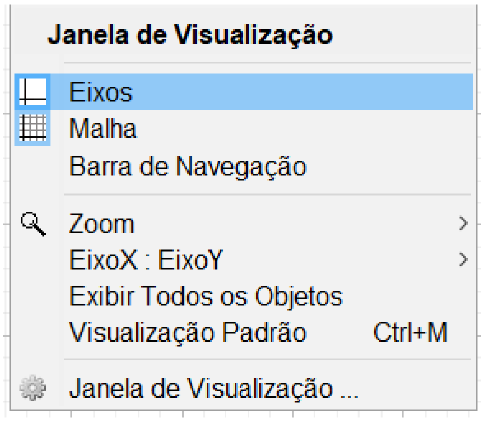
Todas as imagens e figuras apresentadas nessa apostila, foram construídas por seus autores.

Passos necessários para obtermos a Curva de Koch.

Abra o *software* GeoGebra. Feito isso, esclarecemos que cada quadrado da imagem abaixo será denominado de ícone no decorrer da construção.

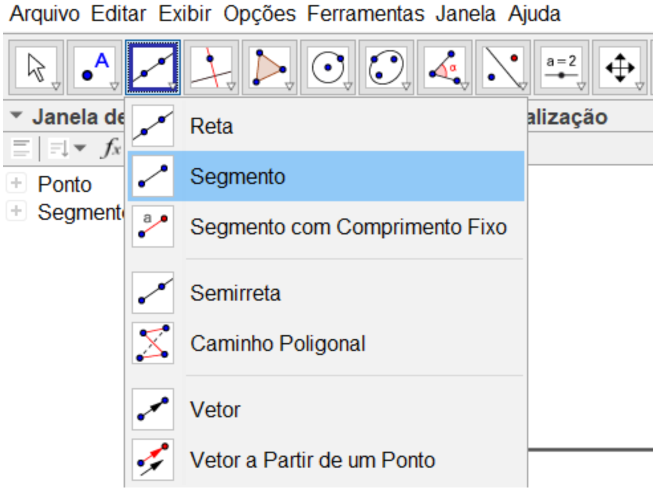


Com isso, clique com o botão direito na janela de visualização e selecione "Eixos" para ocultar os eixos.



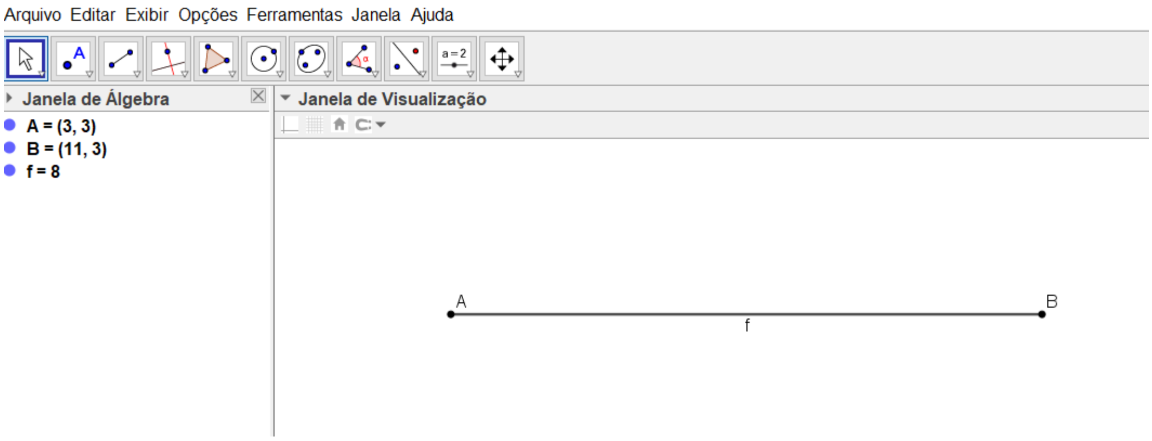
Faça o mesmo processo, porém agora será para ocultar a malha.

Passo 1: no terceiro ícone do GeoGebra, selecione a ferramenta “Segmento”.

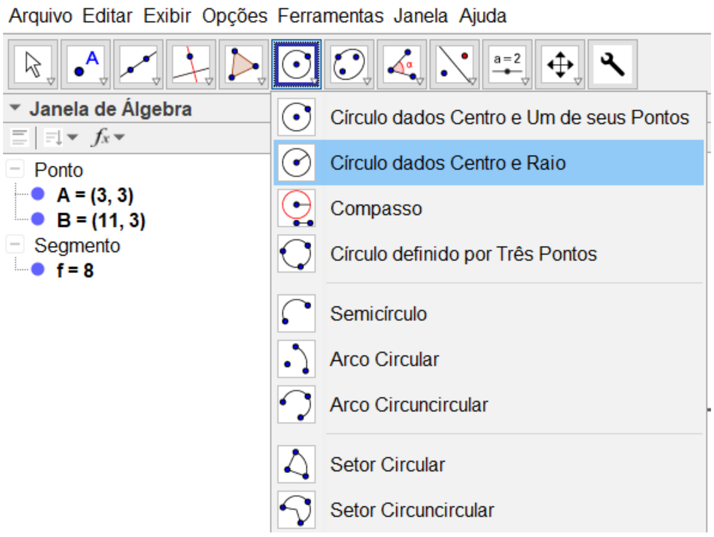


Feito isso, clique na área de construção e em seguida, construa um segmento de qualquer medida.

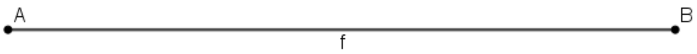
Deverá ficar semelhante a este:

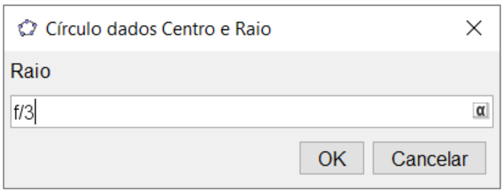


Passo 2: no sexto ícone, selecione a ferramenta “Círculo dados Centro e Raio”.

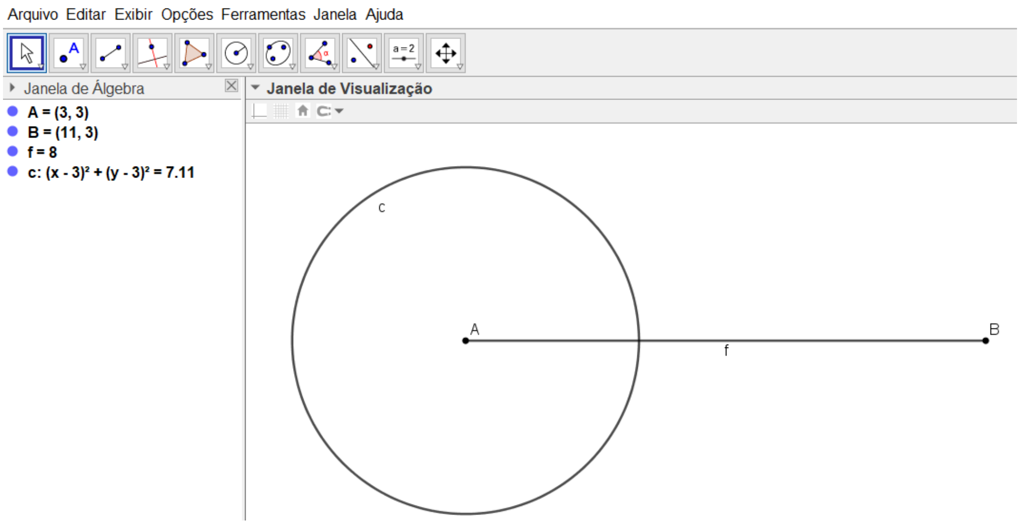


Agora, clique no ponto A, aparecerá uma janela para que se insira o raio de medida "$f/3$", na qual, f é o segmento criado anteriormente. Clique em OK.

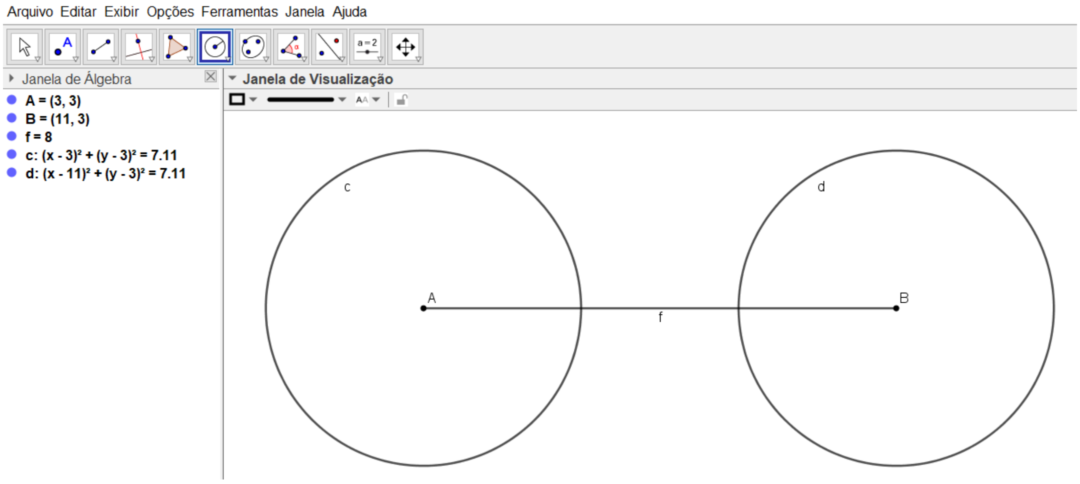




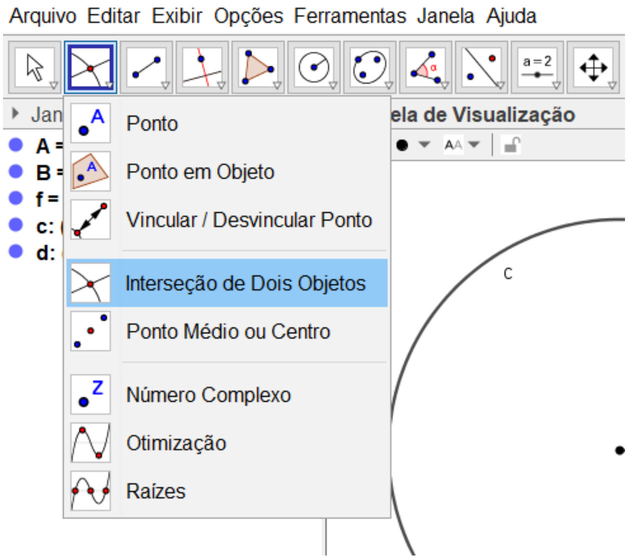
Deste modo, criaremos uma circunferência denominada de c da seguinte maneira:



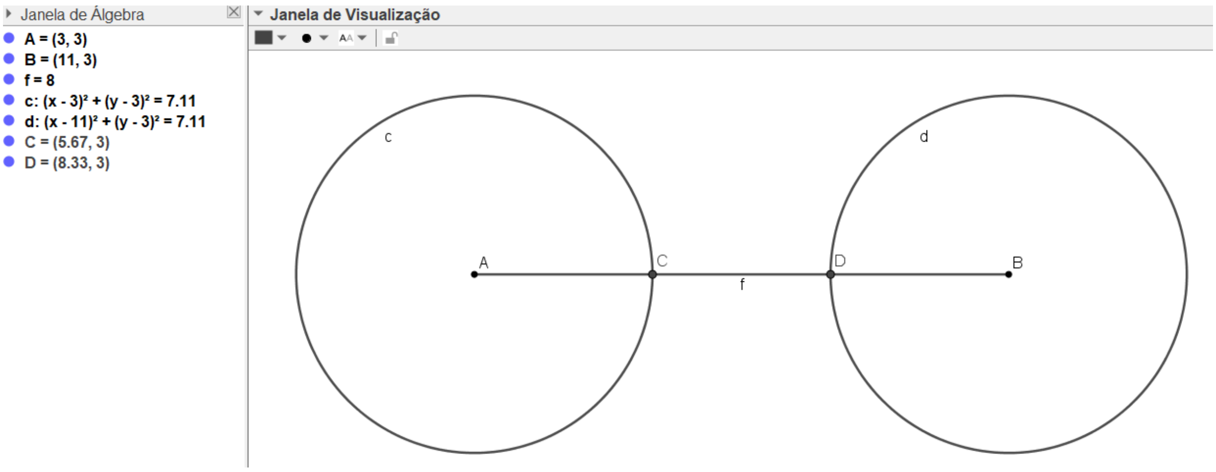
Faça o mesmo processo para o ponto B. Clique nele, aparecerá uma janela para que se insira o raio de tamanho "$f/3$", irá criar uma circunferência denominada de d e clique em OK. Ficará da seguinte forma:



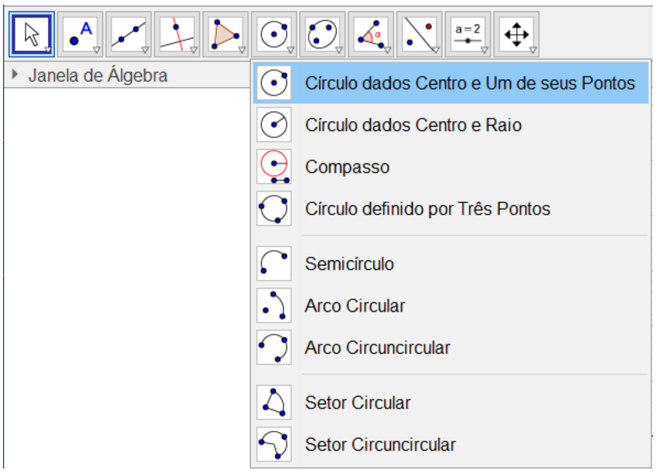
Passo 3: no segundo ícone, clique em "Interseção entre dois objetos".



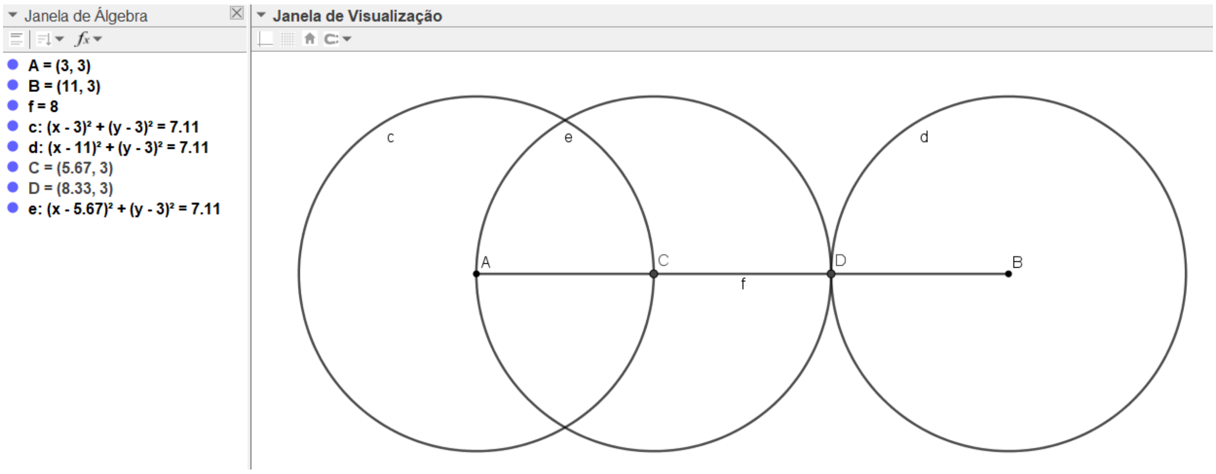
Agora, selecione o segmento *f* e a circunferência *c*, isso irá gerar um ponto C. Da mesma forma, seleciona o segmento *f* e a circunferência *d*, gerando um ponto D. Veja como ficam as interseções.



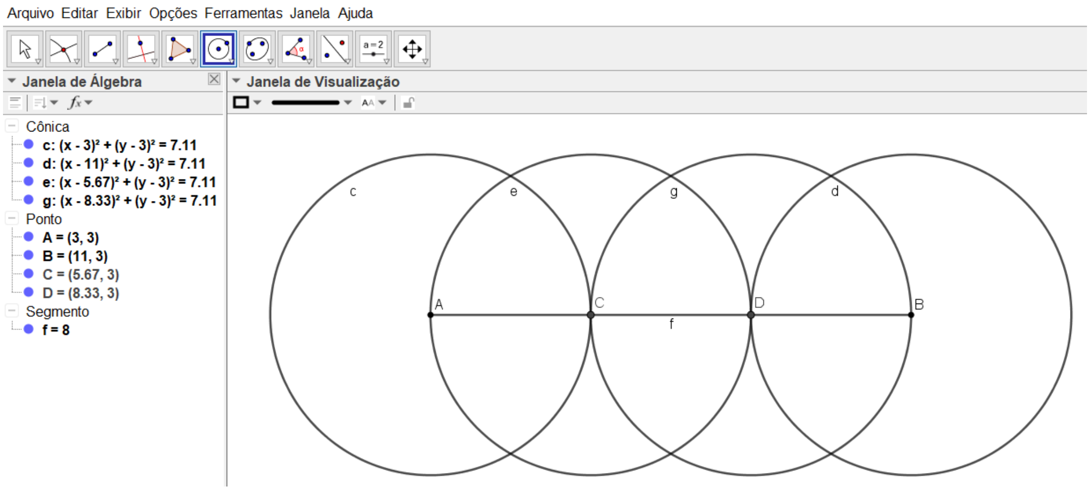
Passo 4: no sexto ícone, selecione a ferramenta “Círculo dados centro e um de seus pontos”.



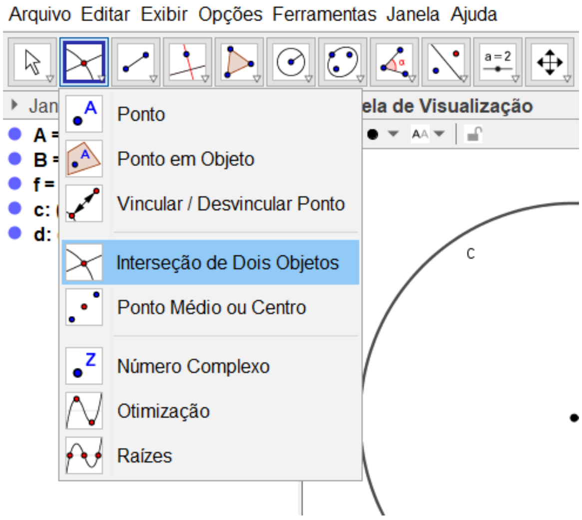
Feito isso, selecione o ponto C, sendo o centro, e o ponto D, para termos o raio CD.



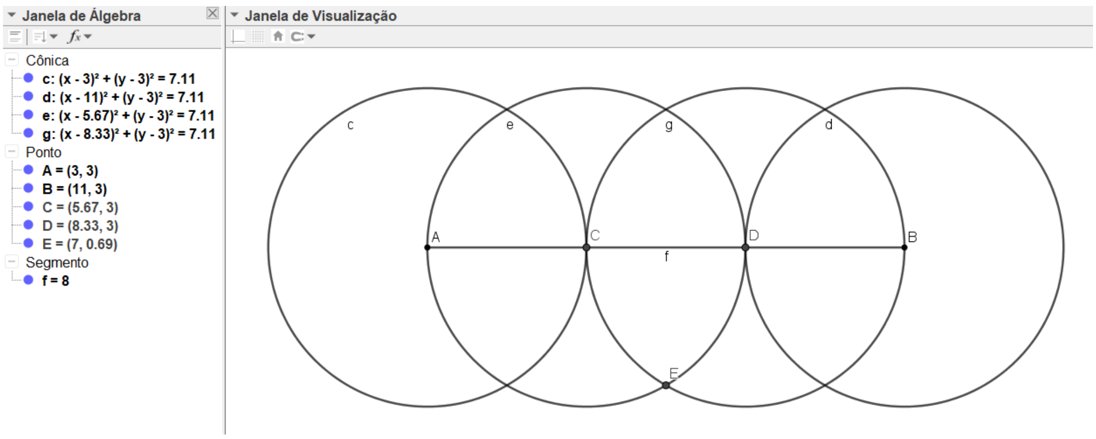
Da mesma maneira, agora selecione o ponto D, sendo o centro, e o ponto C, para termos o raio DC. Veja:



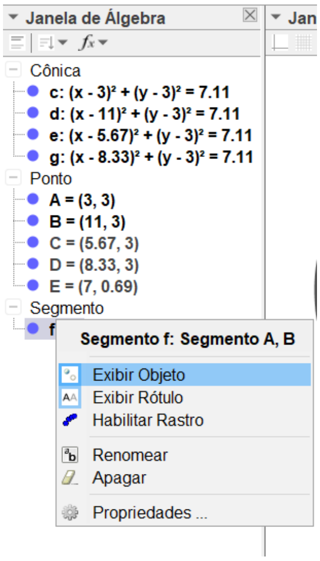
Passo 5: no segundo ícone, clique em "Interseção de Dois Objetos".



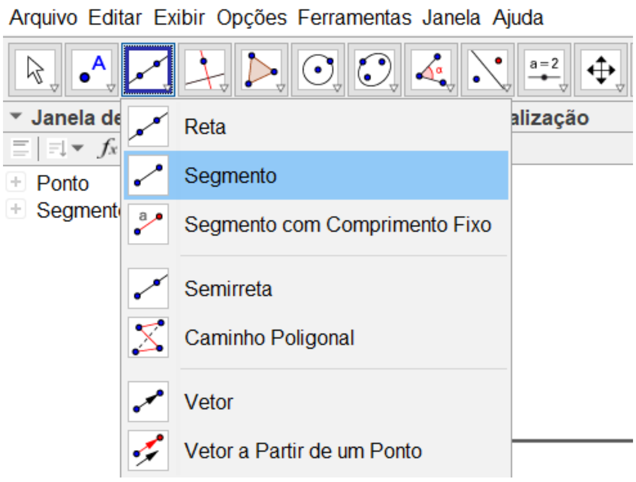
Clique nas circunferências *e* e *g*, gerando dois pois de interseção, considere o ponto que foi gerado na parte inferior do segmento. E assim, irá gerar um ponto E na interseção das circunferências *e* e *g* da seguinte maneira.



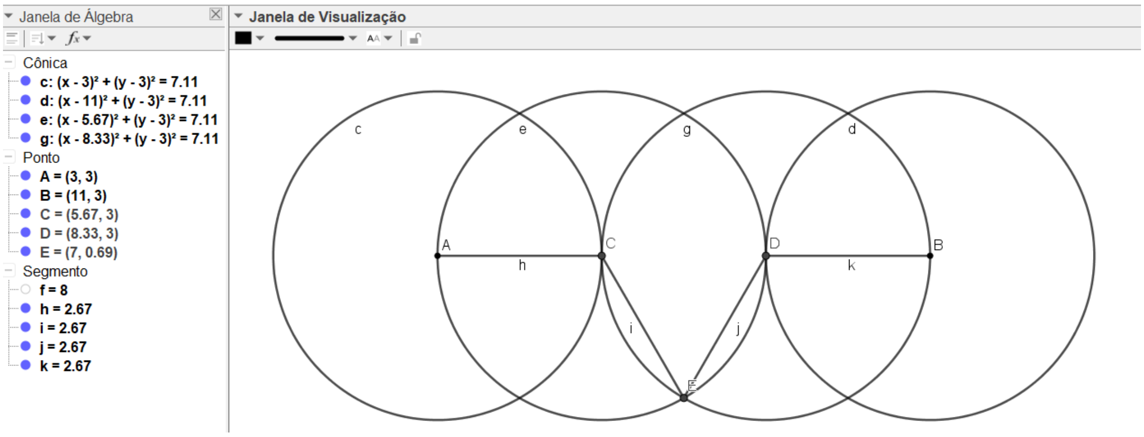
Esconda o segmento *f*.



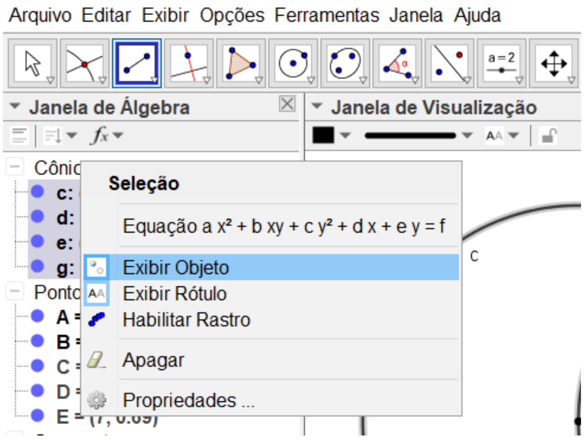
Passo 6: no terceiro ícone do GeoGebra, selecione a ferramenta "Segmento".



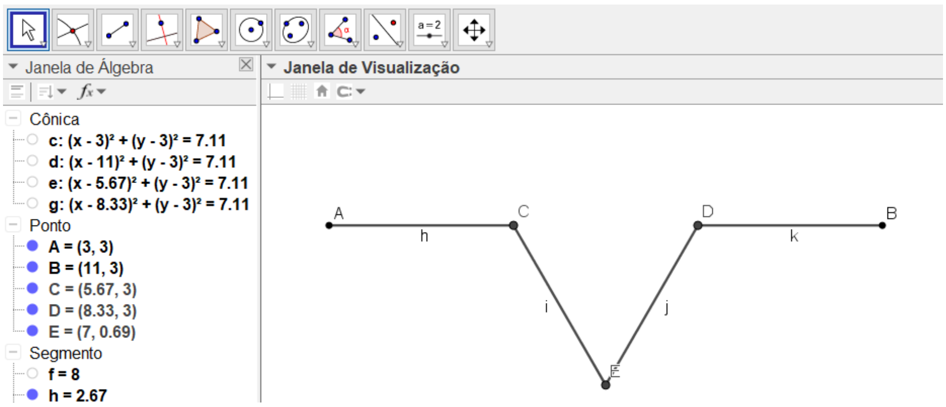
Com a utilização dessa ferramenta, construa segmentos AC, CE, ED e DB. A construção se ficará na seguinte forma:



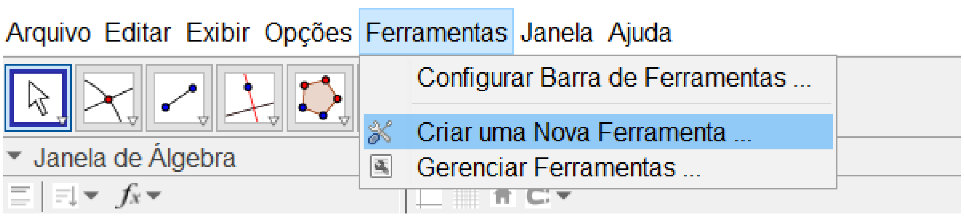
Agora, oculte as cônicas *c, d, e* e *g*. Selecione com o botão direito do mouse em cônica e clique em “Exibir Objeto”.



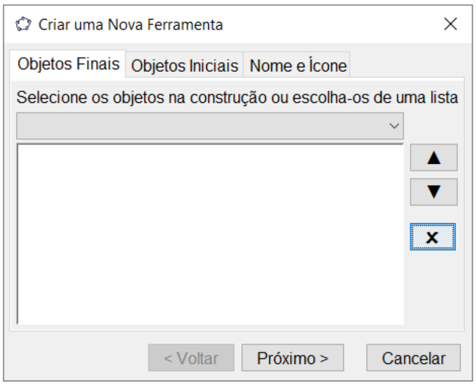
Desse modo, teremos um primeiro momento da curva de Koch. Veja:



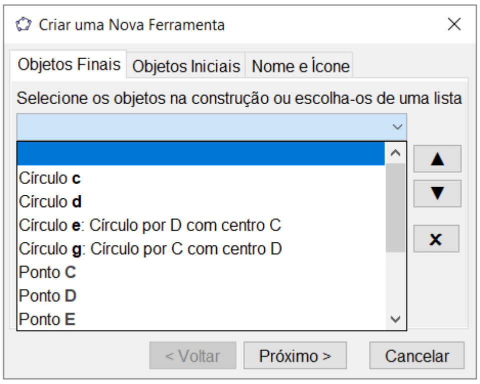
Passo 7: Vamos criar uma ferramenta para facilitar a nossa construção. Clique em “ferramentas” e selecione o item “Criar uma Nova Ferramenta...”.



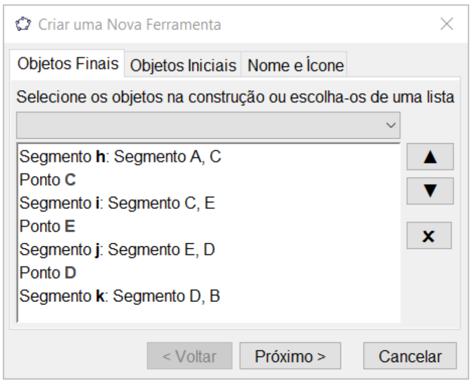
Aparecerá uma janela para acrescentar algumas informações.



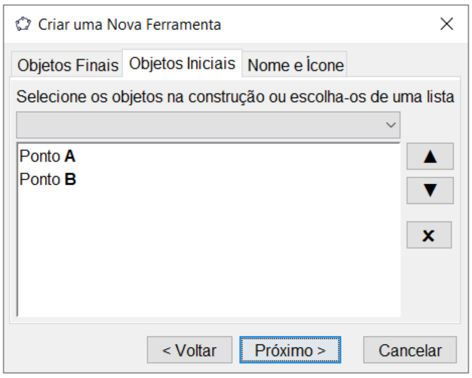
Em "Objetos Finais" selecione: segmento *h*, ponto C, segmento *i*, ponto E, segmento *j*, ponto D e o segmento *k*, consecutivamente.



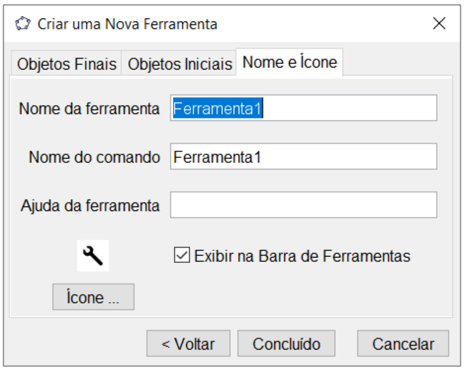
Após selecionado, ficará da seguinte forma:



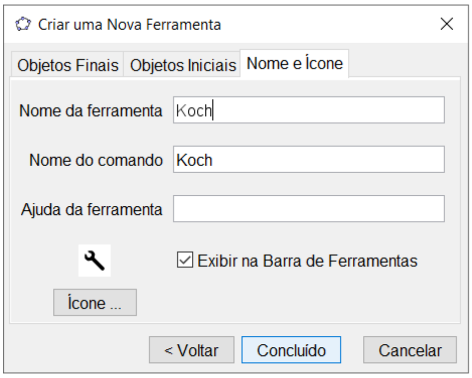
Clique em "Próximo", e iremos para a janela de "Objetos Iniciais". E nela, aparecerá "Ponto A" e "Ponto B".



Clique em próximo. Iremos para a janela “Nome e Ícone”.



De o nome da ferramenta de “Koch” ou da maneira que preferir e aperte em “Concluído”.

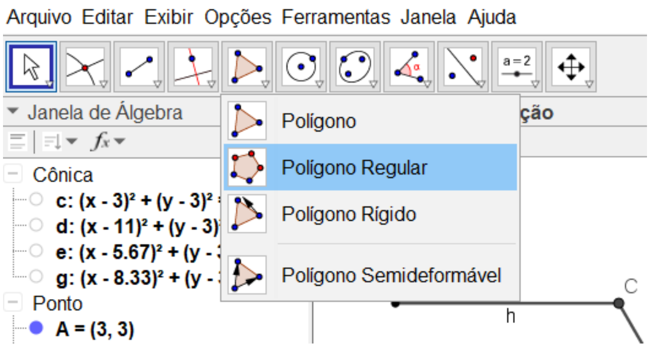


Pronto, criamos uma ferramenta que facilitará o nosso processo de construção da Curva de Koch. E assim, teremos o seguinte ícone no GeoGebra.

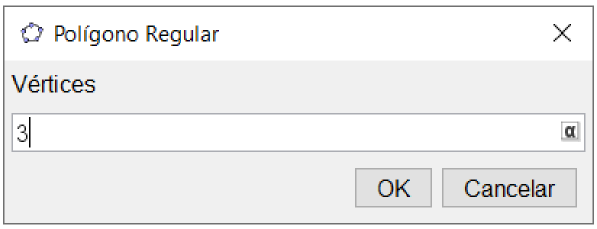
Veja que o comando dela é selecionar dois pontos distintos.

Como já criamos a ferramenta que nos auxilia para a criação da Curva de Koch, oculte todos os itens criados, ou seja, selecione-os e clique em “Exibir Objeto”. **ATENÇÃO: não feche o GeoGebra pois poderá perder a ferramenta criada, somente esconda-os!**

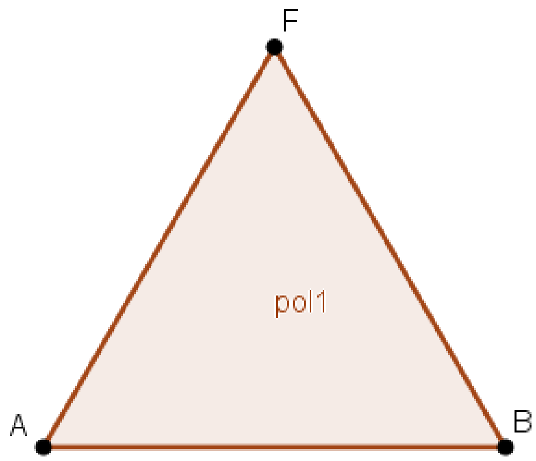
Passo 8: Selecione o quinto ícone, e utilize a ferramenta “Polígono Regular” e construa um triângulo equilátero.



Agora, selecione o ponto A e B, criando inicialmente, parecerá uma janela para incluir quantos vértices. Nela, acrescente o número 3, clique OK, para formar um triângulo equilátero.



E a **Figura 0** ficará assim:



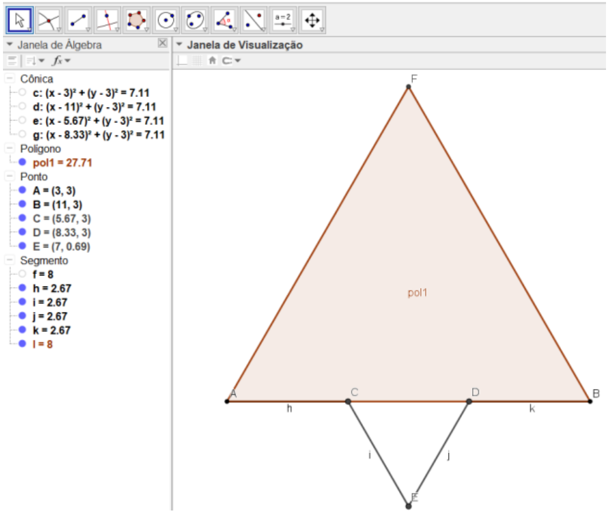
Esse triângulo equilátero é o primeiro passo para construirmos a Curva de Koch, e essa parte é denominada de **Etapa 0.**

ETAPA 0

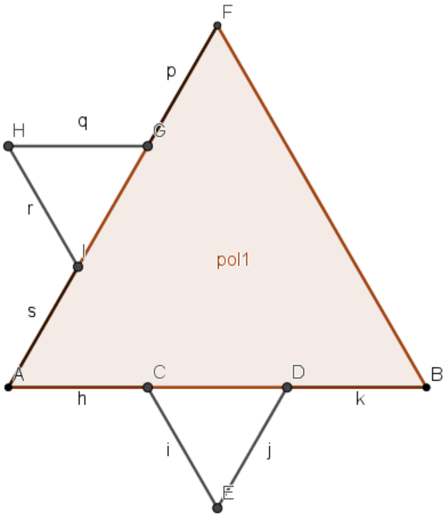
Considerando a Etapa 0, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa?
2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa?
3. Considerando o comprimento de cada segmento sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?
4. Considere a área dessa figura obtida com a Etapa 0 como sendo A_0. Essa informação será usada posteriormente para o cálculo da área em outras etapas.

Passo 9: Como já criamos uma ferramenta denominada Koch, selecione-a e clique em dois pontos, digamos, pontos A e B, respectivamente. Sempre selecione os pontos de maneira que siga o sentido anti-horário. Obteremos o seguinte:

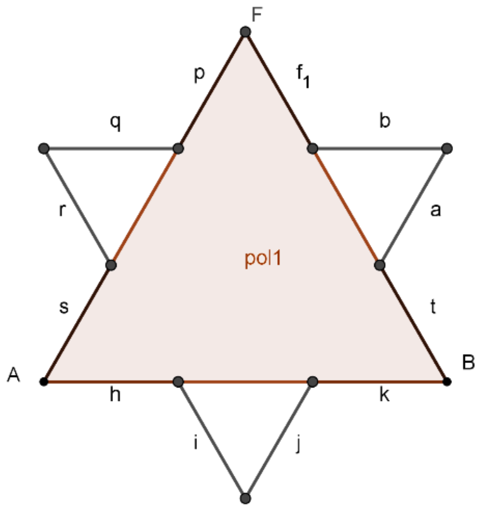


Agora, selecionado o ponto F e A, respectivamente, ficará da seguinte maneira.

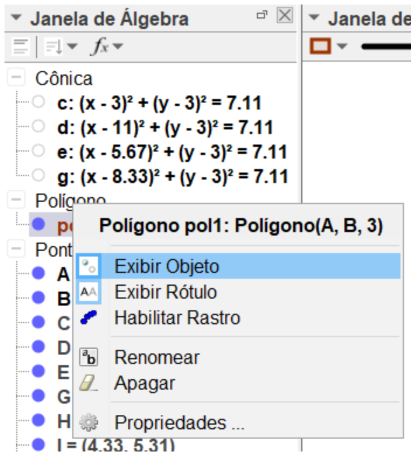


Faça isso sucessivamente, sempre escolhendo dois pontos de forma que seja o sentido anti-horário.

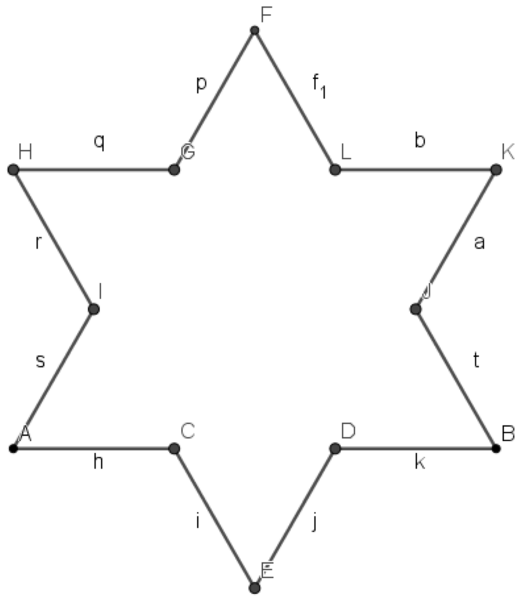
Temos a **Figura 1A.**



Esconda o polígono. Clique em “Exibir Objeto” para podermos escondê-lo.



Desta maneira, teremos a seguinte construção, a **Figura 1B**. E esta construção é a segunda parte da construção da Curva de Koch, essa parte é denominada de **Etapa 1.**



<table>
<tr><td>

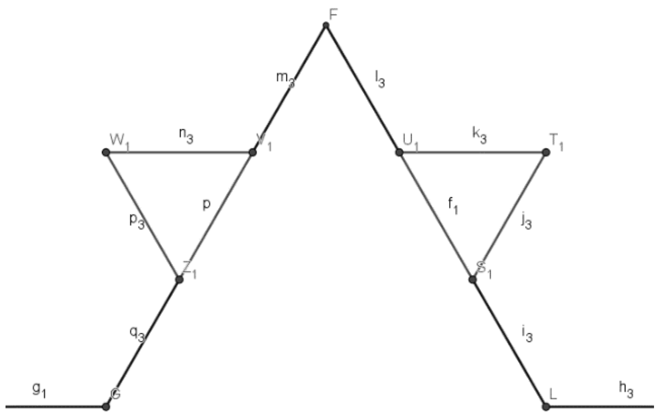
ETAPA 1

Considerando a Etapa 1, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

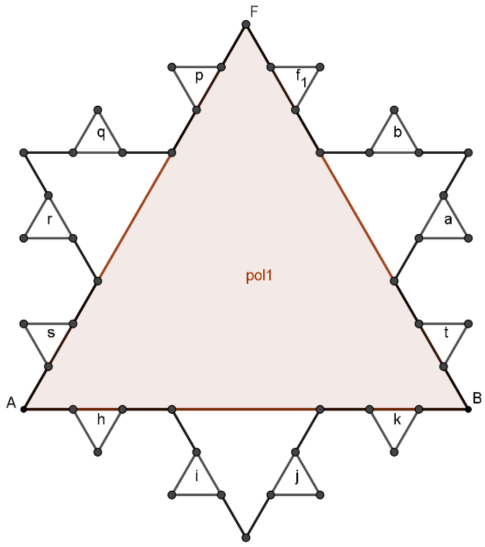
1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa da figura 1B?
2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa da figura 1A?
3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura 1B?
4. Considerando A_0, a área do triângulo inicial, qual é a área dessa figura 1A?

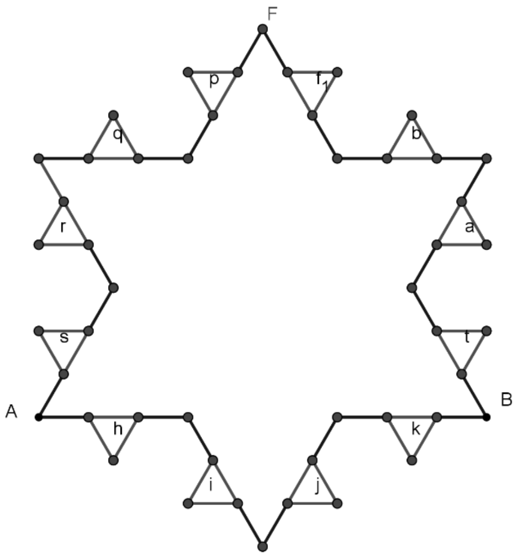
</td></tr>
</table>

Destaquemos que, quando realizamos esse processo novamente, considerando esses novos pontos criados, teremos a seguinte construção em um dos lados.

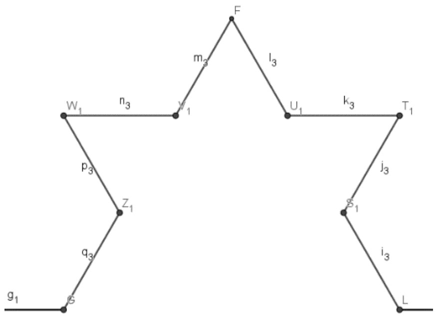


Continuando com as interações, fazendo isso para outros dois pontos no sentido anti-horário conseguimos a construção, denominada de **Figura 2A.**

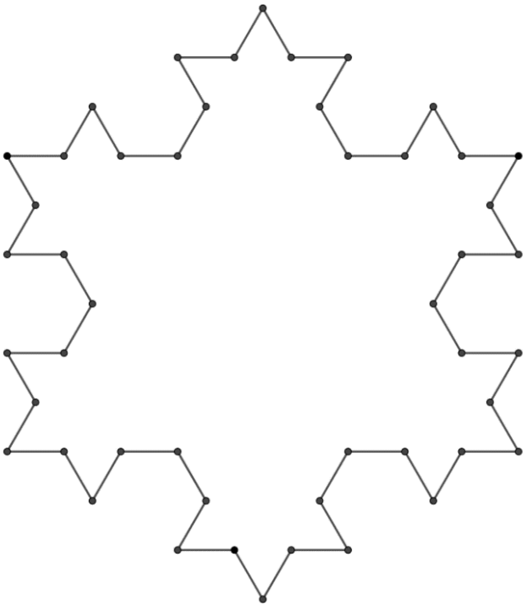




Observamos que temos um seguimento que fecha o triângulo, nesse caso, o segmento p e f_1. Então, basta escondê-lo. Assim:



Faça esse processo com os demais. Agora, fazendo a ocultação dos objetos, ou seja, esconder as denominações dadas a eles. Conseguindo então a **Figura 2B.** Essa nova construção será denominada de **ETAPA 2.**

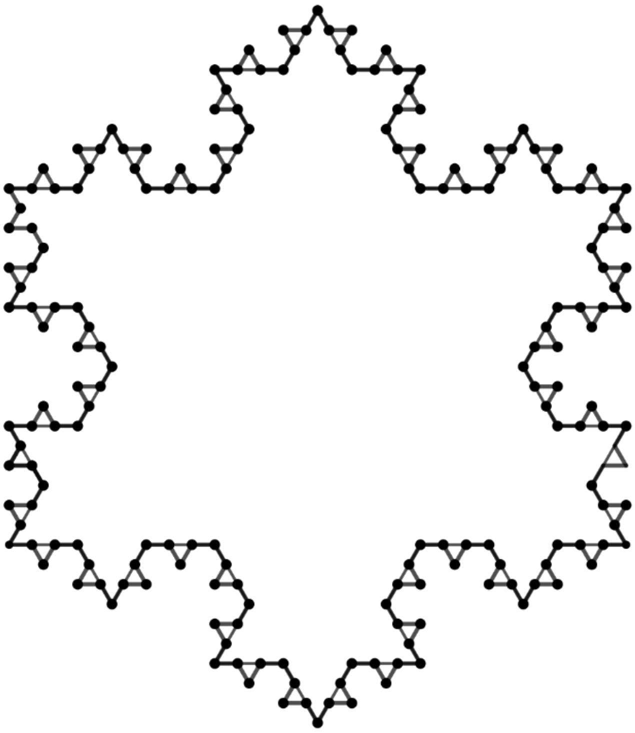


ETAPA 2

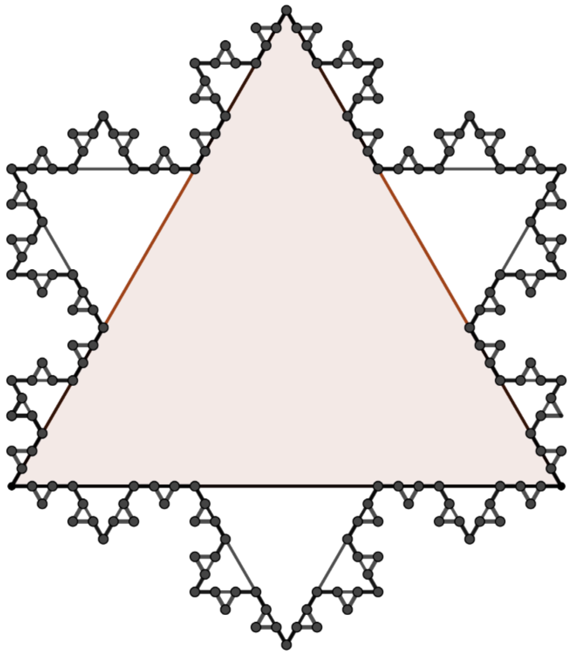
Considerando a Etapa 2, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

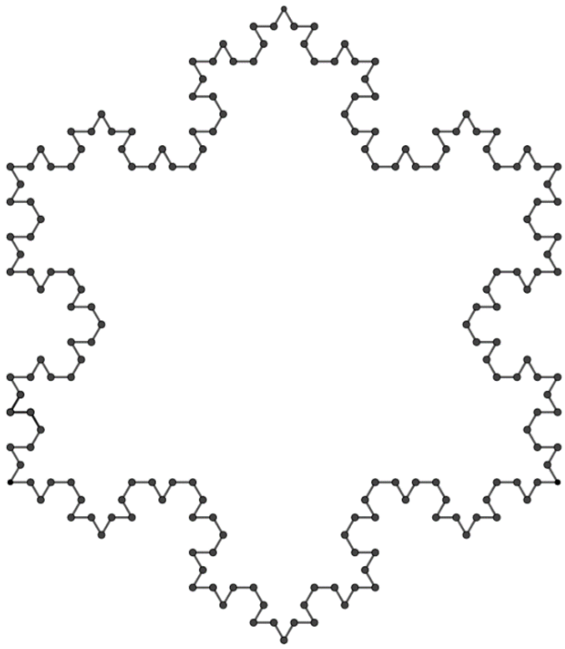
1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa da figura 2B?
2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa da figura 2A?
3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura 2B?
4. Considerando A_0, a área do triângulo inicial, qual é a área da figura 2A?

Fazendo esse processo novamente com os demais pontos. Lembrando que, deve ser feito para outros dois pontos no sentido anti-horário. Obtemos a **Figura 3A.**



Agora, fazendo a ocultação dos objetos e os segmentos, ou seja, esconder as denominações dadas a eles. Conseguimos a **Figura 3B.** Conseguimos a construção da Ilha de Koch na **ETAPA 3** Veja:





E para finalizarmos a construção ocultamos os pontos e colorimos a figura.

Tal iteração pode ser repetida n vezes de tal modo que vislumbramos a **ETAPA $\boldsymbol{n}$**, ou seja, a etapa n-ésima da construção. Essa etapa significa um número muito grande de iterações, que não pode ser apresentado, representando assim uma das principais características do Fractal, a sua complexidade infinita.

Imaginando que você chegou até a n-ésima etapa, resolva as tarefas da Etapa N.

ETAPA *N*

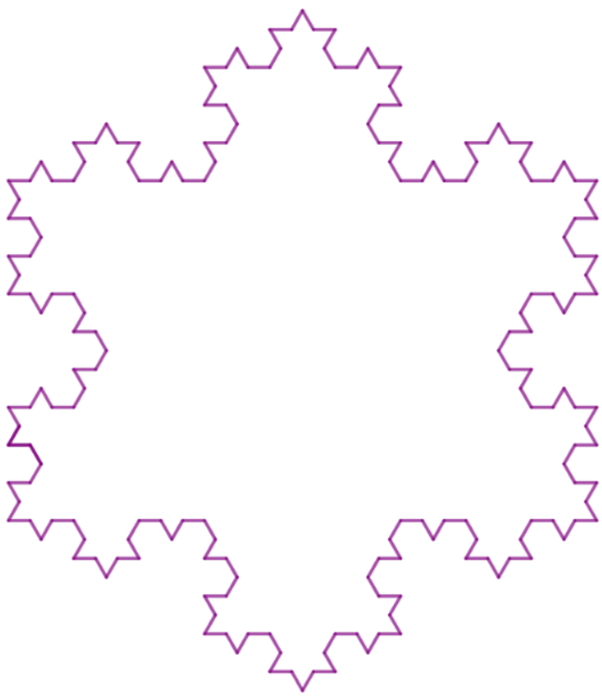
Considerando a Etapa n, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

1. Qual é a quantidade de segmentos construídos nessa etapa?
2. Qual é a quantidade de triângulos construídos nessa etapa?
3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?
4. Considerando A_0, a área do triângulo inicial, qual é a área dessa figura?

Resultados das tarefas de cada Etapa

Etapas	Quantidade de segmentos	Quantidade de triângulos	Medida de cada segmento	Perímetro da figura	Área da figura
0					
1					
2					
N					

A seguir, apresentamos alguns fractais coloridas construídos na **ETAPA 3**!



Basta agora, usar a criatividade e realizar quantas interações e alterações de cor que preferir. Divirta-se!

APÊNDICES B – Tarefas das Etapas do Fractal

Aluno:____

ETAPA 0

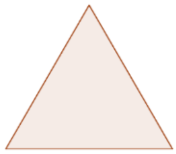


Figura 0: Etapa 0

Considerando a Etapa 0, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa?

2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa?

3. Considerando o comprimento de cada segmento sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?

4. Considere a área dessa figura obtida com a Etapa 0 como sendo A_0. Essa informação será usada posteriormente para o cálculo da área em outras etapas.

Aluno:____

ETAPA 1

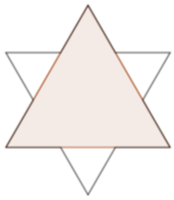


Figura 1A: Etapa 1 com as etapas anteriores

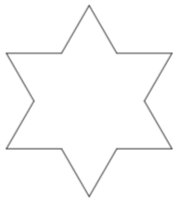


Figura 1B: Etapa 1

Considerando a Etapa 1, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa da figura 1B?

2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa da figura 1A?

3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura 1B?

4. Considerando A_0, a área do triângulo inicial, qual é a área dessa figura 1A?

Aluno:____

ETAPA 2

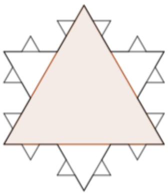


Figura 2A: Etapa 2 com as etapas anteriores

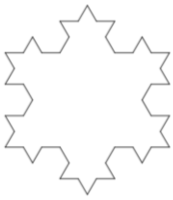


Figura 2B: Etapa 2

Considerando a Etapa 2, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

1. Qual é a quantidade de segmentos obtidos nessa etapa da figura 2B?

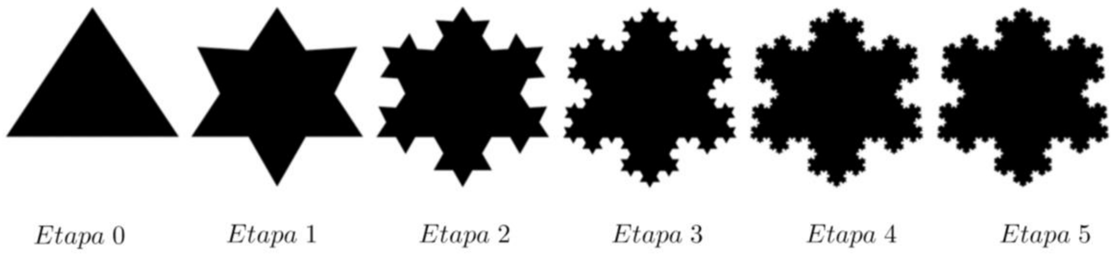
2. Qual é a quantidade de triângulos obtidos nessa etapa da figura 2A?

3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura 2B?

4. Considerando A_0, a área do triângulo inicial, qual é a área da figura 2A?

Aluno:____

ETAPA *n*



Considerando a Etapa *n*, responda os seguintes questionamentos justificando sua resposta:

1. Qual é a quantidade de segmentos construídos nessa etapa?

2. Qual é a quantidade de triângulos construídos nessa etapa?

3. Considerando o comprimento de cada segmento da Figura 0 como sendo c, qual é o perímetro da figura obtida nessa etapa?

4. Considerando A_0, a área do triângulo inicial, qual é a área dessa figura?

Resultados das tarefas de cada Etapa

Etapas	Quantidade de segmentos	Quantidade de triângulos	Medida de cada segmento	Perímetro da figura	Área da figura
0					
1					
2					
N					